LE VIEUX PAPIER

Publication de la Société « Le Vieux Papier » pour l'étude de la vie quotidienne à travers les documents et l'iconographie — Fondée en 1900.

DANS CE NUMÉRO — « Les solitaires de Normandie » — Jeux optiques et images animées — Claude Cocquelle — Les pavés florentins du Père Sébastien (VI) — Remarques sur le terme « carte-adresse » — Un livre récent sur les images populaires

Fascicule 433

Juillet 2019

LES JEUX DANS LES COLLECTIONS DU CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS DE PARIS, 6 – LES PAVÉS FLORENTINS DU PÈRE SÉBASTIEN *(6e partie)*

par Michel Boutin

Outre les jeux décrits dans les cinq parties précédentes[1], le Conservatoire national des arts et métiers possède une boîte de « jeu de mosaïque » qui date probablement de la fin du XIXe siècle. Elle est sans notice ni fiche d'identification *(Fig. 1* et **→ couleurs-XII*a*)**. Ce jeu pourrait s'appeler « jeu de parquet » ou même « jeu des carrés de Truchet ». Ce type de boîte, fréquent à cette époque chez la plupart des éditeurs, correspond en effet au sixième et dernier fascicule annoncé dans la série des « Jeux scientifiques » éditée en 1889 par Chambon & Baye et Édouard Lucas : *Les pavés florentins du Père Sébastien.* Ce fascicule introuvable, semble inexistant, bien qu'il ait été annoncé dans l'index bibliographique du volume I des *Récréations mathématiques* de Lucas et au dos du livret n° 1 des *Jeux scientifiques* : *La Fasioulette*[2]. La disparition prématurée de Lucas[3] l'a probablement empêché de rédiger ce sixième fascicule sur les carrés de Truchet. Par conséquent, nous n'avons que les informations qu'il a données dans le quatrième chapitre du volume II de ses *Récréations mathématiques,* intitulé « Le jeu de parquet » (p. 101-119). Comme pour les autres fascicules (du n° 1 au n° 5), on peut penser que Lucas aurait suivi ces pages en y ajoutant quelques références historiques et ses habituelles notes humoristiques.

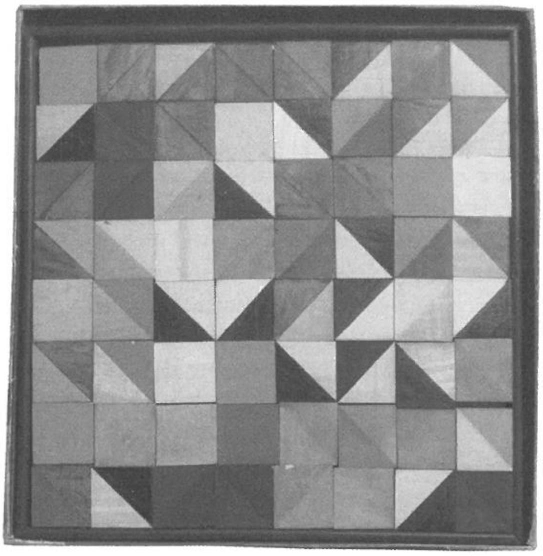


Fig. 1 – Boîte de jeu composée de carrés mi-partis et de carrés monochromes permettant de réaliser de multiples mosaïques. (Collection CNAM Paris, photo MB)

LES PAVÉS FLORENTINS DU PÈRE SÉBASTIEN

L'historique de la quatrième récréation du volume II des *Récréations mathématiques* de Lucas, « Le jeu de parquet », est une copie intégrale du quatrième paragraphe du livre de Louis Becq de Fouquières, *Les jeux des anciens,* publié en 1869 :

§. IV. — Le jeu du mosaïste.

Les anciens, qui possédaient à un degré supérieur le sens pratique de la vie, ne négligeaient rien de ce qui pouvait faire de leurs enfants des hommes sagaces et ingénieux. Dans les *Lois* de Platon (vii) on peut lire un passage remarquable, relatif à la gymnastique intellectuelle à laquelle il faut soumettre l'intelligence des enfants. Il y est dit qu'il faut les exercer à une foule de petits calculs à leur portée, comme par exemple de partager, en un nombre plus ou moins grand de leurs camarades, un certain nombre de pommes ou de couronnes, en sorte qu'ils soient forcés tout en s'amusant de recourir à la science des nombres. Il est évident en effet que les enfants dans leurs jeux développent la faculté qu'ils ont de compter, de comparer, d'ajouter, de diviser et qu'ainsi ils arrivent à se familiariser avec les nombres.

Parmi ces amusements mêlés de combinaisons (τεχνοπαίγνια), il faut ranger assurément la construction des mosaïques, qui demande une grande habileté, de l'expérience et une certaine connaissance des nombres. Les anciens aimaient beaucoup la variété et si dans leurs maisons ils n'avaient pas tous des mosaïques composées et finies comme de véritables peintures, ils voulaient au moins que le mosaïste fut assez habile pour varier à l'infini les dessins du parquet. Ceux-ci étaient d'une diversité dont on

1 – Voir *Le Vieux Papier* du n° 428 au n° 432.

2 – Michel Boutin, « 3-La Fasioulette (1889) », *Le Vieux Papier*, n° 430, octobre 2018, p. 529-537.

3 – Michel Boutin, « 1- Le Jeu icosien (1859) », *Le Vieux Papier*, n° 428, avril 2018, p. 433-441.

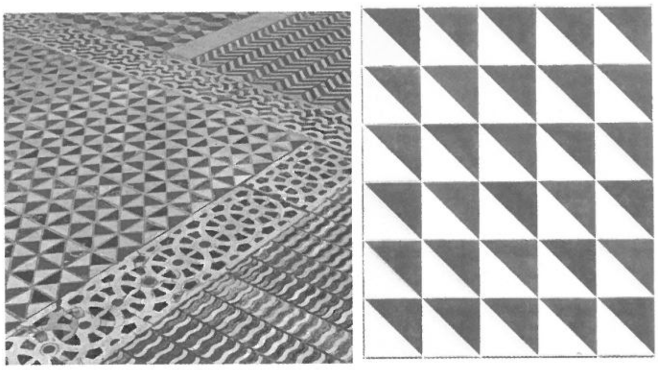


Fig. 2 – Mosaïques historiques construites sur la base des carrés de Truchet. L'illustration de gauche montre une petite partie du carrelage du baptistère de Florence (cité par Lucas), et l'image de droite correspond à une mosaïque de Cascais au Portugal.

peut à peine se faire une idée et ne demandaient pourtant que l'emploi d'un nombre relativement petit de carreaux mi-partis de noir et de blanc. Chaque carreau divisé par une diagonale en deux parties, l'une blanche, l'autre noire, pouvait se placer dans quatre positions différentes.[4]

Louis Becq de Fouquières met en avant les expressions « dessins de parquet » et « carreaux mi-partis de noir et de blanc » : c'est très précisément le sujet traité par Lucas dans son volume II des *Récréations* où il fait allusion aux jeux de parquet et aux carrelages, composés de carrés mi-partis et permettant de composer une multitude de motifs. Ces carrés coupés en deux selon une diagonale ont été décrits par le père Sébastien Truchet en 1704 dans un « Mémoire sur les combinaisons »[5]. Dans ce curieux titre *Les pavés florentins du père Sébastien*, tous les termes ont une signification précise : le Père Sébastien renvoie clairement au prêtre mathématicien français Sébastien Truchet (1657-1729) ; les pavés florentins invoquent la ville de Florence où Lucas avait été séduit par les carrelages italiens : « ...De plus, nous avons rencontré, en visitant le Baptistère de Florence et quelques autres monuments de l'Italie, des carrelages du même genre »[6]. En effet, à Florence et dans de nombreuses autres villes, on voit des mosaïques construites à partir des carrés mi-partis que l'on appelle aujourd'hui carrés de Truchet *(Fig. 2* et **→couleurs-XII***b)*.

Le Père Sébastien Truchet était mathématicien mais pas seulement, c'était un scientifique qui avait de nombreuses compétences, en particulier en hydraulique et en typographie[7]. Ainsi, à la fin du XVII^e^ siècle, il s'occupa du canal d'Orléans et, à cette occasion, il a découvert des « carreaux de Fayence carrés » :

Dans le dernier voyage que j'ai fait au Canal d'Orléans par ordre de son Altesse Royale, je trouvai dans un Château nommé la Motte S. Lyé à 4 Lieues en-deçà d'Orléans, plusieurs Carreaux de Fayence carrés & mi-partis de deux couleurs par une ligne diagonale, qui étaient destinés à carreler une Chapelle & plusieurs autres appartements.[8]

À la suite de cette découverte, Sébastien Truchet fut le premier à rechercher les divers motifs que l'on pouvait réaliser à partir d'un carré mi-parti. En 1704, il présente ses travaux à l'Académie royale des sciences en modélisant un carré mi-parti en quatre carrés obtenus par rotation. Ensuite, il associe ces carrés de base, deux par deux, dans la table I de sa publication avec le commentaire suivant :

Je trouvai qu'il y avait 64 manières différentes de ranger deux de ces carreaux, qui font 64 combinaisons, ce qui paraît surprenant : car deux lettres ou deux chiffres ne se combinent ordinairement que deux fois, parce qu'ils ne changent de situation que pour être mis l'un après l'autre dans une ligne, la base demeurant toujours la même : mais dans l'arrangement de deux carreaux, l'un des deux peut prendre quatre situations différentes, dans chacune desquelles l'autre carreau peut changer 16 fois, ce qui donne les 64 combinaisons que nous avons figurées et cottées dans la première Table suivante, dont l'explication est à côté. *(Voir Fig. 3)*.

Cette présentation, en effet, « paraît surprenant[e] », puisqu'il s'agit d'un arrangement de quatre éléments pris deux par deux, donc le nombre de motifs possibles est égal à $4^2 = 16$; pourtant Truchet présente une table de « 64 combinaisons de deux carreaux mi-partis de deux couleurs » ! *(Fig. 3)*. Les deux calculs sont tout de même corrects, car ils ne partent pas du même point de vue : Truchet montre les 64 motifs, que l'on peut réaliser avec la réunion de deux carrés, vus dans un plan, non sur une ligne. À partir de la première table donnée en *Fig. 3* (4^e^ colonne, 2^e^ ligne), la *Fig. 4* montre clairement les quatre positions possibles de deux carrés. Dans les tables II et III de son mémoire, il simplifie et réduit sa table initiale de 64 motifs à 32, puis à 16 et enfin à 10. Ce dernier résultat peut

---

4– Louis Becq de Fouquières, *Les jeux des anciens : leur description, leur origine, leurs rapports avec la religion, l'histoire et les mœurs*, Paris, C. Reinwald, 1869, p. 71-72. L'ouvrage de Becq de Fouquières, devenu un grand classique du sujet, fut réédité, avec quelques petits changements en 1873. Il est encore utile.

5– R. P. Sébastien Truchet, « Mémoire sur les combinaisons », paru dans *Histoire de l'Académie royale des Sciences, année MDCCIV. Avec les Mémoires de mathématique & de physique pour la même année*, Paris, Jean Boudot, 1706, p. 363-373 avec trois tables (I, II et III) et sept planches. Les planches de ce mémoire sont l'œuvre du graveur Louis Simonneau (1654-1727) ; certaines sont signées *Lud. Simonneau 1704*. Le mémoire de Truchet a été réimprimé dans la même série en 1712. Le terme combinaison a ici un sens général.

6– Édouard Lucas, « Quatrième récréation, Le jeu de parquet », dans *Récréations mathématiques*, II, Paris, 1863, p. 104-105.

7– Jacques André et Denis Girou, « L'invention du point typographique », sur http://jacques-andre.fr/faqtypo/truchet/truchet.html (dernière mise à jour : 6 février 2010), consulté le 23/05/2019.

8– Truchet, *op. cit.* note 5.

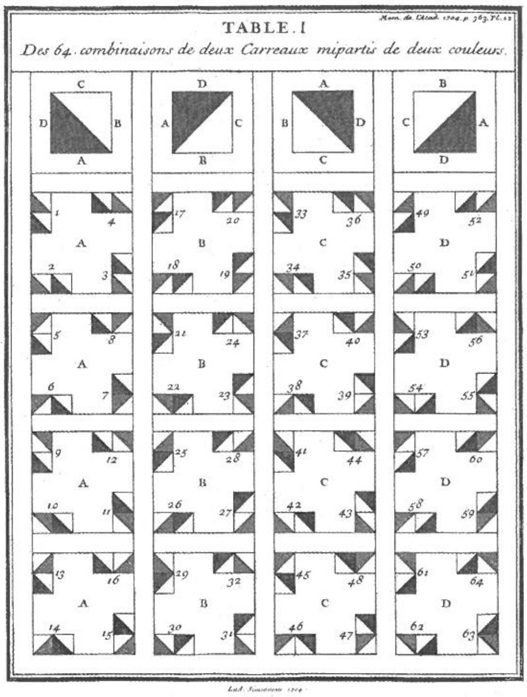


Fig. 3 – Table 1 du Mémoire de Truchet de 1704. Les quatre carrés mi-partis correspondent à la modélisation de Truchet reprise par de nombreux auteurs. La construction des 16 grands carrés de 4 motifs chacun est expliquée par Truchet lui-même (voir Fig. 4).

être obtenu directement par la formule dite de « combinaisons avec répétition »[9]. C'est aussi cette valeur qui est donnée par Lucas dans ses *Récréations* où il établit une comparaison entre les carrés mi-partis et les dominos[10] : par exemple il est évident que les paires « 1-2 » et « 2-1 » sont identiques dans un jeu de domino ! Mais, en observant la figure 4, on voit clairement par exemple que les associations repérées « 54 » et « 56 » ne sont pas équivalentes pour un mosaïste.

Le R. P. Sébastien Truchet n'a pas continué ses recherches sur les mosaïques, car il fut appelé par le roi Louis XIV pour travailler sur le projet du château de Versailles au sujet de l'hydraulique des nombreuses fontaines ; il s'est donc détourné des carrés mi-partis. Cependant, quelques années plus tard, le Père Dominique Douat, religieux carme comme Truchet, reprend la modélisation des carrés mi-partis et publie ses résultats dans un ouvrage de 1722, *Méthode pour faire une infinité de dessins différents, avec des carreaux mi-partis de deux couleurs par une diagonale*[11]. Dominique Douat fait montre de modestie vis-à-vis de Sébastien Truchet, qu'il cite dès le titre du livre et dans plusieurs paragraphes. Ce livre est beaucoup plus détaillé que la publication de Truchet, pourtant les carrés mi-partis sont connus aujourd'hui sous le nom de « carrés de Truchet ». La référence à Dominique Douat est totalement oubliée !

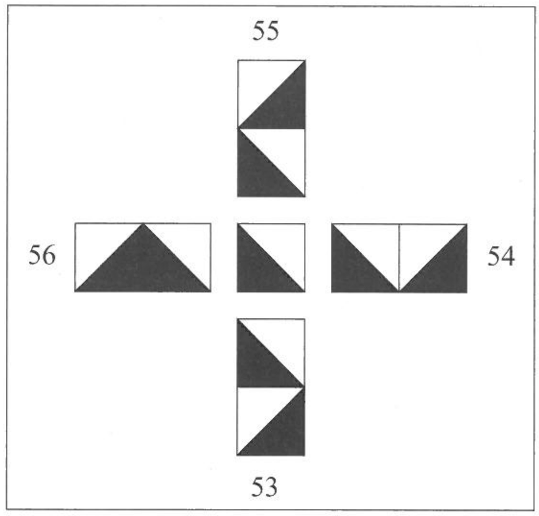


Fig. 4 – Autre représentation d'un grand carré de la table I de Sébastien Truchet (4e colonne, 2e ligne). Les quatre motifs sont autour d'un carré de base qui est toujours le même.

Une multitude d'œuvres d'art

Édouard Lucas aurait immanquablement développé quelques aspects mathématiques des pavages dans ce 6e fascicule annoncé mais non publié. Dans « Dénombrement des mosaïques » (*Récréations mathématiques* II, p. 105-107), ses calculs sur les arrangements de carrés mi-partis et surtout la présentation très sobre des résultats s'apparentent à celle de Douat. Ces mathématiciens, Truchet, Douat et Lucas, considèrent naturellement que l'on a en réalité quatre carrés mi-partis de base issus de la rotation du carré initial, d'où les présentations très claires de Douat sous forme de tables, comme celle intitulée « Seconde table contenant seize Permutations »[12] qui montre les motifs possibles en associant deux carrés *(Fig. 5)*. Édouard Lucas obtient bien entendu le même résultat, mais ensuite il simplifie à la manière des dominos en considérant par exemple que les configurations « 5 » et « 6 » de

---

9– Dans une combinaison avec répétition, l'ordre des éléments n'a pas d'importance. C'est le cas des dominos, par exemple les (4-5) et (5-4) sont identiques : dans le jeu, il n'y a qu'un seul domino pour ce couple de valeurs.

10– Il va sans dire que cette comparaison n'aurait pu être faite par le P. Truchet, car les dominos n'existaient pas de son temps.

11– Le titre complet de cet ouvrage publié à Paris en 1722 est : *Méthode pour une infinité de dessins différents, avec des carreaux mi-partis de deux couleurs par une ligne diagonale, ou observations du Père Dominique Douat, Religieux Carme de la province de Toulouse, sur un Mémoire inséré dans l'histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris l'année 1704, présentée par le Révérend Père Sébastien Truchet, Religieux du même Ordre, Académicien Honoraire.*

12– En mathématiques, ce genre « d'organisation » s'appelle : « arrangements avec répétitions ». La valeur se calcule simplement par la relation : $A = n^k$ où « n » est le nombre total d'éléments et « k » le nombre d'éléments pris (ou choisi). Dans cet exemple, $A = 4^2 = 16$ (en raison des quatre carrés de base).

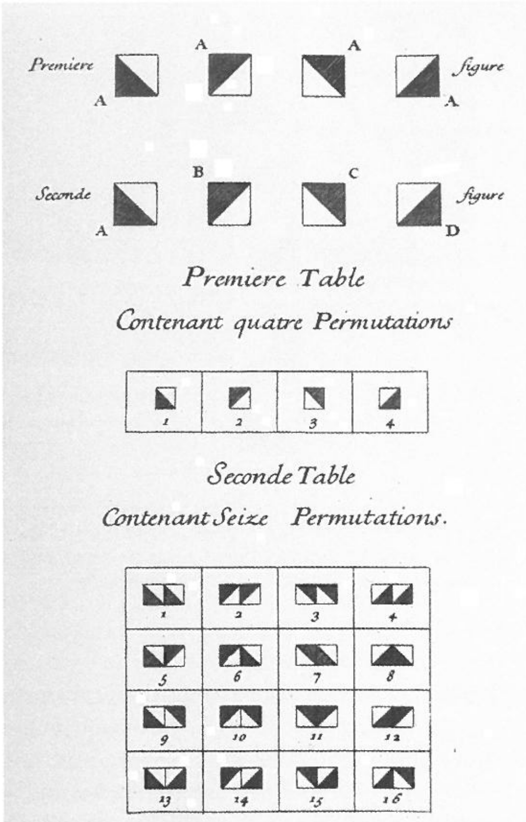


Fig. 5 – Première et seconde table du livre de Dominique Douat. Les 16 motifs possibles avec deux carrés sont clairement détaillés.

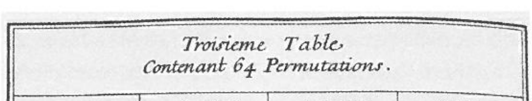


Fig. 6 – Troisième table de D. Douat : les motifs à 3 carrés.

la seconde table de Douat sont identiques ; alors, il obtient dix motifs possibles qui correspondent au nombre de « combinaisons avec répétitions ». Cette simplification est-elle justifiée pour construire des mosaïques ? Probablement pas, d'où les tables complètes de Douat pour deux carrés, trois carrés et quatre. Le nombre de motifs possibles augmente très vite avec le nombre de carrés utilisés : pour des assemblages avec k = 3 carrés, on en a : $A = 4^3 = 64$ *(Fig. 6)* ; pour $k = 4 : A = 4^4 = 256$.

Dans un plan, le nombre d'arrangements devient rapidement très important. Par exemple, pour un pavage de deux carrés sur deux – c'est-à-dire un pavage de deux colonnes et deux lignes – on aura $(4^2) \times (4^2) = (4^4) = 256$ arrangements possibles. En général, pour un pavage de « p » lignes sur « m » colonne, on a : $A = 4^{pm}$ arrangements possibles. Sur un échiquier, on aurait théoriquement $A = 4^{64}$ mosaïques différentes possibles ! Voilà un jeu simple dont les richesses créatives sont « pratiquement » inépuisables. Après ces considérations calculatoires, Sébastien Truchet illustre sa publication avec des planches de mosaïques qui montrent la richesse des motifs que l'on peut réaliser *(Fig. 7)*. Ces figures ont été gravées par Louis Simonneau en 1704.

Jeu de parquet et jeu de mosaïque

À la fin du XIX^e siècle, les éditeurs vendaient des boîtes de jeux très diverses destinées aux enfants pour créer des mosaïques. Le plus célèbre d'entre eux, Watilliaux, en proposait plusieurs sortes dans son catalogue de 1903 : les unes sont nommées « Jeux de parquet » ; les autres « Les jeux de mosaïque en cube de couleur ». Les figures *8 et 9* montrent l'une de ces boîtes qui contient 72 triangles rectangles isocèles dont 36 blancs et 36 noirs. En joignant deux triangles par leur hypoténuse, on obtient un carré, soit noir soit blanc soit bicolore. Si on s'impose de jouer uniquement avec les ensembles formant des carrés bicolores, on pourra réaliser des pavages intégralement conçus avec des carrés de Truchet. En joignant deux triangles de même couleur, on pourra construire de nouveaux genres de pavages que l'on retrouve aussi bien dans les monuments historiques que chez les mosaïstes d'aujourd'hui. Les boîtes de mosaïque les plus courantes proposent souvent des triangles et des carrés de différentes couleurs permettant de créer une plus grande variété de pavages. Alain Rabussier, collectionneur de jeux anciens, en présente plusieurs espèces sur son site[13].

13 – http://www.jeuxanciensdecollection.com/les-jeux-de-mosaiques-parquetage.html, consulté le 23/05/2019.

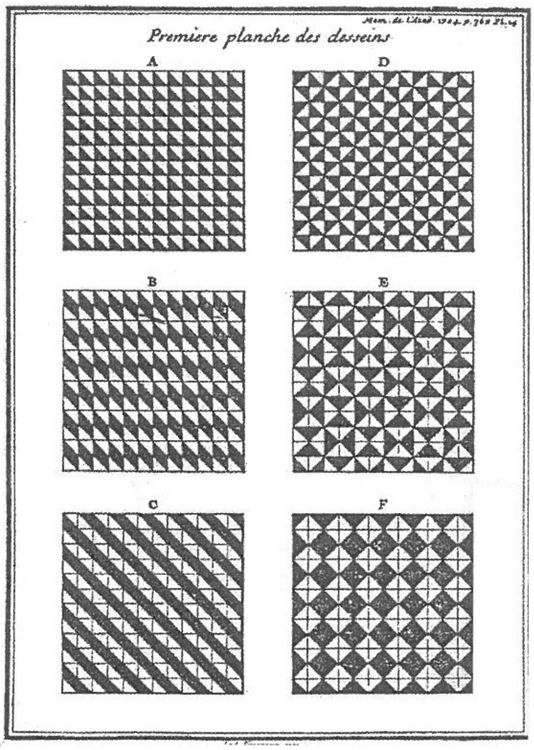


Fig. 7 – « Première planche des desseins ». En haut à droite, on a l'indication « Mem. De L'Acad. 1704. P. 367 Pl. 14 ». En bas, au centre : « Lud. Simonneau 1704 ». Le pavage « A » correspond à la mosaïque du Portugal représentée en figure 2.

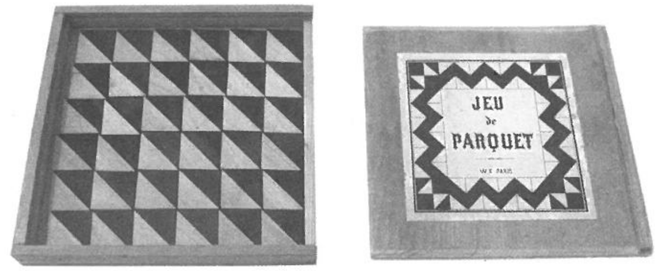


Fig. 8 – Jeu du parquet édité par Watilliaux, fin XIXᵉ-début XXᵉ siècle. (Coll. et photos MB)

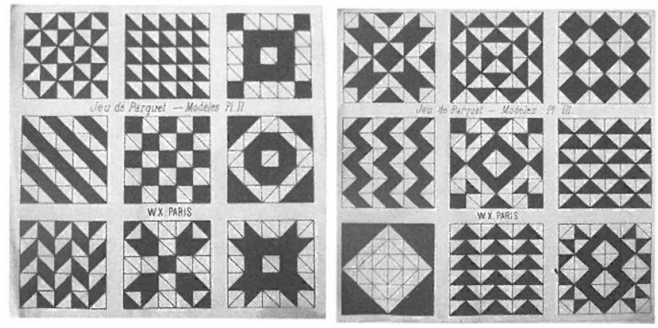


Fig. 9 – Exemple de mosaïque proposée par Watilliaux dans sa boîte « Jeu du parquet » (Fig. 8). Certaines sont construites uniquement avec des carrés mi-partis. (Coll. et photos MB)

Pavages linéaires de Truchet : pavage LT

Les mosaïques de Truchet se trouvant dans les monuments historiques depuis l'Antiquité sont des œuvres d'art dont la beauté et l'harmonie ne sont pas dues au hasard mais à la créativité des mosaïstes-artistes. Certaines de ces mosaïques sont appelées « pavage linéaire de Truchet » (ou « pavage LT ») en raison de leur contrainte de fabrication : sur la totalité du pavage, la continuité des couleurs doit être respectée, donc deux carrés adjacents du pavage doivent avoir la même couleur. Avec cette règle, la modélisation de ces pavages peut être établie seulement avec deux carrés unicolores dont la diagonale est positive pour l'un et négative pour l'autre.

Ces deux carrés de base unicolores peuvent être codés en binaire : celui avec la diagonale positive correspondra par exemple à « 1 », et l'autre à « 0 ». Ainsi, une association de deux carrés permettra d'obtenir quatre motifs unicolores différents « 00 ; 01 ; 10 ; 11 », et huit mosaïques en introduisant les couleurs *(Fig. 10)*. Alors, l'élaboration d'un « pavage LT » peut se faire en deux étapes : en un premier temps, seuls les carrés unicolores de base seront pris en considération, ensuite il suffira de choisir la couleur (blanche ou noire) d'un triangle, puis la couleur de tous les autres en découlera[14]. Ainsi, dans un pavage LT de quatre carrés de base, il n'y aura que huit arrangements unicolores possibles, donc seize pavages ou mosaïques différents. Pour réaliser de tels pavages, on peut utiliser le calcul booléen (voir cette méthode mathématique de construction en annexe).

Pavages de Truchet étendus

Depuis les années 1960, une autre approche des pavages de Truchet est mise à profit dans les œuvres d'art, les jeux, les puzzles, et bien sûr dans les mosaïques. Ces pavages, appelés « pavages de Truchet étendus » sont construits à partir du modèle historique, mais le séparateur du carré en deux parties n'est plus une simple diagonale. La *Fig. 11* montre deux de ces nouveaux carrés mi-partis, sachant que les créateurs de mosaïques ont en imaginé beaucoup d'autres. Il semblerait que les carrés à deux arcs de cercles *(Fig. 11b)* aient été popularisés par Martin Gardner dans sa rubrique « Mathematical games », dans *Scientific American*, octobre 1963, où il décrit un jeu de connexion inventé en 1960 par Larry Black, alors étudiant au MIT. Cet article est repris dans

14– Hervé Lehning, « Sébastien Truchet, le prêtre paveur », *Tangente*, n° 99, juillet-août 2004, p. 18-21.

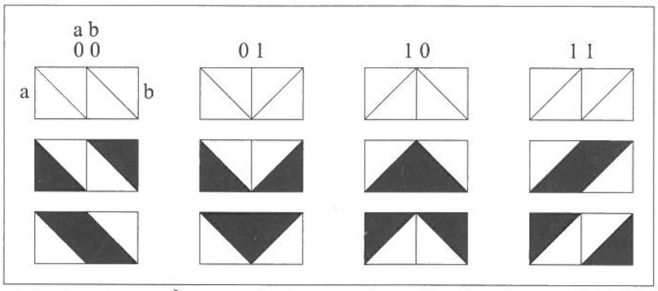


Fig. 10 – Les 4 arrangements de 2 carrés unicolores et les 8 mosaïques qui en découlent.

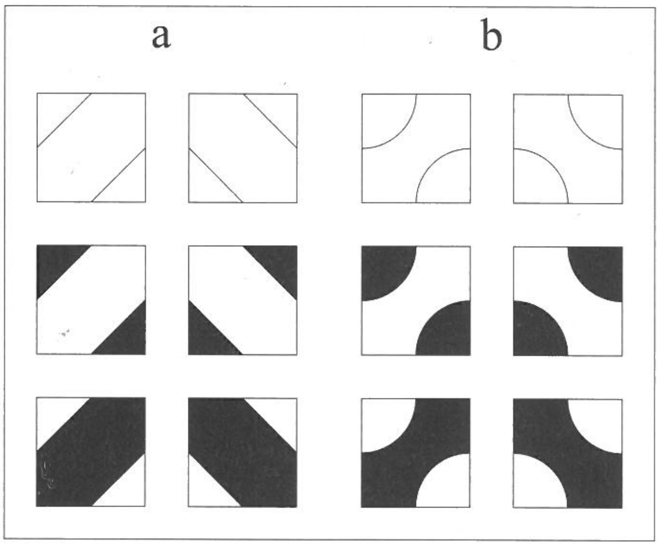


Fig. 11a et 11b – Deux exemples de carrés pour réaliser des « pavages de Truchet étendus » : a) avec deux segments de droite et quatre connexions ; b) avec deux arcs de cercle.

l'un de ses ouvrages[15]. Ce jeu ne semble pas avoir été commercialisé mais il est couramment décrit sous le nom de « Black Path » dans différentes publications concernant les jeux mathématiques ou les jeux combinatoires, tels ces deux ouvrages, dont le premier écrit par les trois mathématiciens R. Berlerkamp, J. H. Conway et R. K. Guy, publié en 1982[16], et le second par Cameron Browne en 2005[17]. Cependant ces « carrés de Truchet étendus » *(Fig. 11)*, qui ont quatre connexions, ne sont pas une structure nouvelle : bien au contraire ! Ils étaient connus des mathématiciens arabes, comme en témoigne le traité d'Abu l-Wafa (940-998), dit aussi Buzjani, *Kitab ... al-handasiyya* (« Sur l'indispensable aux artisans en fait de construction »)[18]. Bien plus anciens, des ornements, basés sur le modèle donné en *Fig. 11b*, furent découverts sur le site préhistorique de Schela Cladovei, près de Bucarest en Roumanie[19]. La culture de Schela Cladovei, découverte dans les années 1960, est aujourd'hui regroupée avec celle, plus connue, de Lepenski Vir. La chronologie de ces sites des Balkans fait encore débat, car on est clairement à la charnière du Mésolithique (fin de la Préhistoire « classique ») et du Néolithique (agriculture et élevage) venu du Proche-Orient. Mais il est remarquable de voir que de tels « pavages » étaient déjà conçus à si haute époque.

Après ce premier jeu, Black Path, d'autres ont suivi, toujours conçus autour du même genre de pavage. Certains jeux ont été édités avec succès, d'autres publiés sur le Web ou dans des ouvrages qui gravitent autour des mathématiques. Parmi les jeux édités avec succès, on peut noter : Turnabout (Mag-Nif, États-Unis, 1973), Trax (inventé par David Smith, Nouvelle-Zélande, 1980) et Amoeba (Marx & Company, Rayaume-Uni, 1975). Ce dernier fut également diffusé en Allemagne par Ravensburger sous le nom de Tantalus, également en 1975[20]. Amoeba, ou Tantalus, est un jeu breveté (GB1244121) par W. B. Pink en 1969. On y joue sur un tablier composé d'un pavage de Truchet étendu, de' sept pièces unicolores sur sept, et avec des cartes dont la face visible de chacune d'elles montre des formes arrondies reproduisant des motifs abstraits que l'on pourra réaliser matériellement en pivotant d'un quart de tour les pièces du tablier *(Fig. 12)*. Par des successions de rotations de ces pièces, une à chaque tour de jeu, le joueur qui réussira à reproduire la forme abstraite dessinée sur l'une de ses cartes gagnera la partie[21].

Quelques publications au sujet de ces « nouveaux carrés » remettent en question le seul nom de Truchet

15– Martin Gardner, « Four unusual board games », dans *Martin Gardner's Sixth book of mathematical diversions from Scientific American*, San Francisco, W. H. Freeman, 1971, p. 39-47.

16– Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy, *Winning ways for your mathematical plays*, 2 vol., New York, Academic Press, 1982.

17– Cameron Browne, *Connection games: variations on a theme*, Wellesley, MA, AK Peters, 2005, p. 199-200.

18– Reza Sarhangi, Slavik Jablan et Radmila Sazdanovic, « Modularity in medieval Persian mosaics: textual, empirical, analytical and theoretical considerations », *Visual Mahematics Journal*, n° 1, 2005, p. 281-292. Les auteurs proposent d'appeler ce modèle « Kufi Modules » (« modules coufiques ») par référence au style de calligraphie (coufique) de l'arabe.

19– Slavik Jablan, « Do you like Paleolithic op-art? », *Kybernetes*, vol. 40, n° 9, 2011, p. 1045-1054. L'auteur n'est pas le mieux informé des débats sur la périodisation du site. Sur la chronologie de la culture de Lepenski Vir-Schela Cladovei, voir Aurelian Rusu, « Lepenski Vir - Schela Cladovei Culture's chronology and its interpretation », *Brukenthal. Acta Musei*, VI, 1, 2011, p. 7-22. Les arrangements géométriques trouvés à Schela Cladovei paraissent accompagner un changement net dans l'architecture domestique, probablement dû aux contacts avec les traditions néolithiques venues du Proche-Orient. Ils pourraient dater entre 7000 et 6300 avant notre ère. (NDLR)

20– Michel Boutin, *Le livre des jeux de pions*, Paris, Bornemann, 1999.

21– Les joueurs ont quatre cartes en main, et ils les cachent à leur adversaire. À tour de rôle, un joueur pivote un pion du tablier pour essayer de reproduire le motif de l'une de ses quatre cartes.

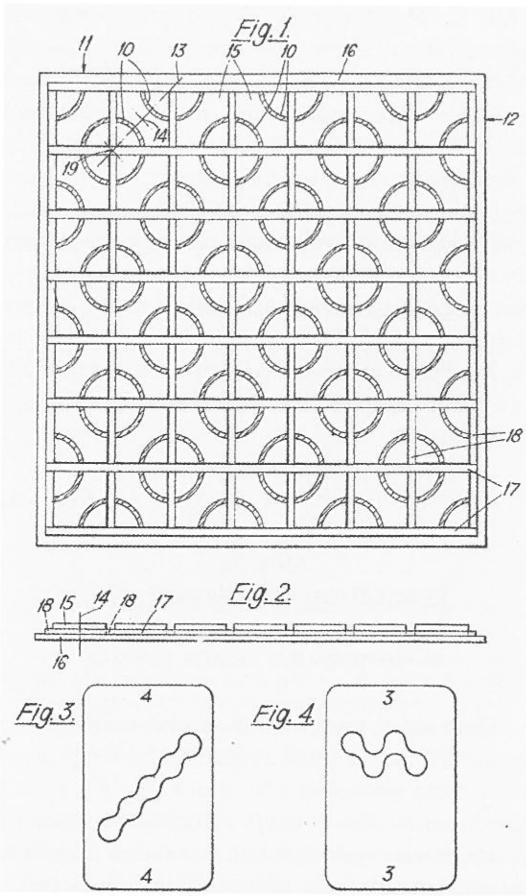


Fig. 12 – Illustrations extraites du brevet d'invention britannique de W. Pink (1969), où cette illustration montre le tablier du jeu avec les pièces en position initiale, et deux cartes avec des exemples de modèle à construire par la rotation des pièces.

pour les désigner, ainsi Philippe Esperet et Denis Girou[22] font remarquer que ces carrés, ceux de la *Fig. 11b*, sont abusivement appelés « de Truchet », et devraient être nommés « pavages SLPT » en l'honneur de Smith-Lewthwaite-Pickover-Truchet. Le premier de ces quatre auteurs a effectivement décrit les carrés historiques et introduit ceux avec deux arcs de cercle dans un article de 1987[23]. Le nom de G. W. Lewthwaite est cité en sa qualité d'inventeur d'un jeu dont les pièces sont ces mêmes carrés : c'est le « Jeu des méandres ». Il fut décrit par Martin Gardner en juin 1975 dans *Scientific American*, puis, en français, dans le hors-série *Pour la Science* d'octobre 1977[24]. Le Jeu des méandres est repris dans l'ouvrage mentionné en note 20, et décrit en *Fig. 13*. Ces jeux, « Black Pass », « Amoeba », « Méandres » furent mentionnés dans diverses publications bien avant celle de Cyril S. Smith. Il a en effet modélisé ces pavages d'un « nouveau genre », mais en réalité, ils ont plusieurs milliers d'années, puisqu'on en trouve dès la fin de la Préhistoire dans les Balkans (voir plus

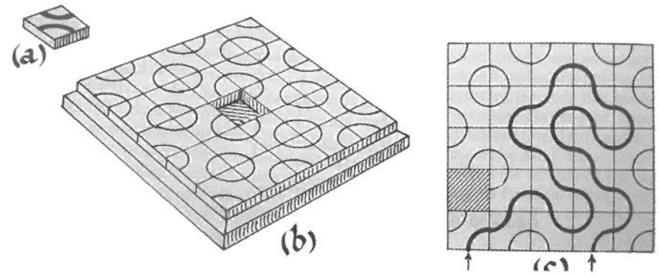


Fig. 13 – Jeu des Méandres (extrait du livre de Berlekamp, Conway et Guy, p. 684).

haut). L'expression « pavages de Truchet étendus » serait-elle abusive ? Probablement pas.

Dans un article de 2008[25], Cameron Brown revient sur les richesses des configurations obtenues par ces carrés à deux arcs de cercles qu'il compare avec raison aux carrés de Truchet ; à cette même date, il inventa un jeu de connexion qu'il a intitulé « Trichet », dont les règles sont sur le Web. Voilà un nom de jeu bien pensé !

Les carrés de MacMahon

Si on trace les deux diagonales d'un carré, on obtient quatre compartiments. C'est à partir de cette idée que le mathématicien britannique Percy Alexander MacMahon (1854-1929) créa les 24 carrés colorés dits « carrés de MacMahon » qu'il a décrit dans son libre *New Mathematical Pastimes* édité en 1921 à Cambridge. MacMahon s'est imposé une règle de construction très précise : obtenir un ensemble de carrés différents en utilisant trois couleurs et en s'autorisant à colorier plusieurs compartiments d'un carré avec la même couleur. Selon ces contraintes, on obtient 24 carrés différents. Dans son livre, MacMahon a remplacé les trois couleurs par trois chiffres, ce qui n'enlève rien à la lisibilité du système (*Fig. 14*). Ces 24 carrés ont inspiré les inventeurs de casse-tête et de jeux à plusieurs joueurs comme celui édité par « Bec et Croc » qui propose une règle de type jeu de dominos ; ce jeu nommé tout simplement « Carrés de MacMahon » est visible avec sa règle sur le site de François Haffner[26].

22– Philippe Esperet, Denis Girou, « Coloriage du pavage "de Truchet" », *Cahiers Gutenberg*, n° 31, 1998, p. 5-8.

23– Cyril S. Smith, Pauline Boucher, « The tiling patterns of Sébastien Truchet and the topology of strutural hierarchy », *Leonardo*, Vol. 20, n° 4, 1987, p. 373-385.

24– Martin Gardner, « Divertissements mathématiques », *Pour la Science*, numéro hors-série, octobre 1977. Ce hors-série annonce le n° 1 – novembre 1977 – de l'édition française de *Scientific American*.

25– Cameron Browne, « Chaos and graphics : Truchet curves and surfaces », *Computers & Graphics*, vol. 32, n° 2, avril 2008, p. 268-281.

26– https://jeuxsoc.fr/

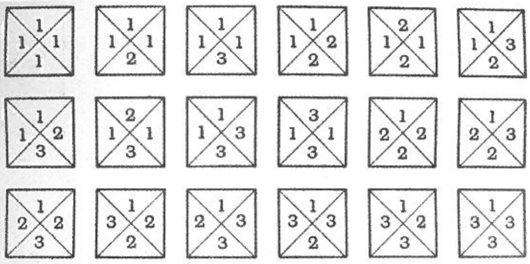


Fig. 14 – Les 24 carrés de MacMahon (extrait du livre New Mathematical Pastimes, *p. 23).*

CONCLUSION

Les carrés mi-partis, quels que soient les modèles considérés, sont au carrefour de l'art, des mathématiques, de l'histoire et certainement de bien d'autres disciplines. Bien que la richesse de ce sujet soit immense, nous avons privilégié les aspects ludiques des pavages de Truchet en raison du cadre de cette série d'articles dans *Le Vieux Papier* : d'un côté, les jeux mathématiques des collections du Conservatoire national des arts et métiers, de l'autre, la série des six fascicules « Jeux scientifiques » éditée par Chambon & Baye et Lucas en 1889. Les collections du CNAM comptent cinq jeux (l'Icosagonal, la Fasioulette, la Tour d'Hanoï, l'Arithmétique diabolique et un jeu de mosaïque)[27] parmi les six jeux relatifs aux six fascicules. Le jeu manquant est « La Pipopipette, jeu de combinaisons », qui est décrit dans le fascicule n° 2. Nous ne savons pas s'il a été édité, bien que les illustrations figurant dans le périodique *La Nature*[28] laissent penser qu'il a bien existé, au moins en tant que prototype, peut-être à l'occasion de l'Exposition universelle de 1889.

Les artisans de l'Antiquité ou de la Renaissance ne connaissaient pas les modèles de Truchet, bien entendu, et Truchet n'a pas inventé les pavages qui portent son nom. Cependant, c'est probablement le premier mathématicien qui a étudié rigoureusement la structure de ce type de pavages à partir d'une modélisation en quatre carrés élémentaires. Le carré mi-parti est alors un module de base pour de nombreux mosaïstes ; il est aussi un repère intéressant pour la compréhension et l'appropriation de la « démarche scientifique » à destination des élèves des collèges et des lycées. Ainsi, les associations de professeurs de mathématiques et les clubs dans les lycées utilisent régulièrement les carrés mi-partis, c'est-à-dire de Truchet, parfois sans donner la référence du mathématicien, ce qui n'est pas toujours nécessaire. L'essentiel est de donner aux élèves des outils à connotation ludique pour faire découvrir les notions de pavages, de module de base et de modèles mathématiques. Les carrés de Truchet, ceux de MacMahon et bien d'autres structures géométriques figurent par exemple dans l'ouvrage *Maths & puzzles*, qui fut édité par l'Association régionale des professeurs de mathématiques de Poitiers (APMEP) en 2016 à l'occasion d'une exposition[29]. Aussi, les épreuves des « Olympiades de mathématiques - série S- 2017 » de l'Académie de Lyon proposaient comme sujet « une étude de pavages de Truchet » où les candidats devaient répondre à des questions concernant l'utilisation du binaire dans les pavages linéaires. D'autres enseignements du secondaire pourraient certainement tirer profit de ces carrés : histoire ; art ; littérature et bien d'autres disciplines. ■

(À suivre)

ANNEXE
RÉALISATION D'UN PAVAGE « LT » AVEC UN GRAND NOMBRE DE CARRÉS, À PARTIR D'UN CODAGE BINAIRE

Deux carrés unicolores (l'un avec une diagonale positive, l'autre avec une diagonale négative) peuvent s'assembler selon 4 motifs : $2^2 = 4$ *(Fig. 10)*. Pour 3 carrés, on a : $2^3 = 8$ motifs différents. Mais pour 4 carrés, on en a également 8 en raison de la contrainte de construction de ces pavages LT *(Fig. 15)*. En effet, sur chacune des 8 configurations composées de 3 carrés, il n'y a pas de choix pour ajouter un 4^e carré (un seul modèle sur les deux convient). Alors, pour un assemblage de 4 carrés, il n'y a toujours que 8 motifs possibles. Le codage binaire de ces quatre carrés unicolores dégage une règle que l'on peut exprimer par la fonction booléenne « ou exclusif » de trois variables : les trois premiers carrés sont les trois variables « abc » et le quatrième « x » est le résultat de cette fonction booléenne ou exclusif[30]. La *Fig. 15* montre le passage des huit assemblages de trois carrés vers huit de quatre carrés qui pourront être associés à deux mosaïques bicolores, donc pour ces quatre carrés unicolores, on aura seize carrés bicolores *(Fig. 16)*.

27– Ces cinq jeux sont décrits par Michel Boutin dans *Le Vieux Papier*, fasc. 428 à 432.

28– « Nouveaux jeux scientifiques de M. Édouard Lucas », *La Nature*, 2^e semestre 1889. Voir aussi Michel Boutin, « 3-La Fasioulette (1889) », *Le Vieux Papier*, n° 430, octobre 2018, p. 529-537.

29– *Maths & puzzles : créez des maths de toutes pièces !* Poitiers, APMEP / Régionale APMEP de Poitou-Charentes, 2016 (*APMEP*, n° 109, septembre 2016), 216 p.

30– En algèbre booléenne, une fonction dite « ou exclusif » est validée quand un nombre impair de variables est validé. Par exemple, pour 3 variables, les « combinaisons » 001 ; 010 ; 100 ; 111 correspondent à la fonction « ou exclusif ».

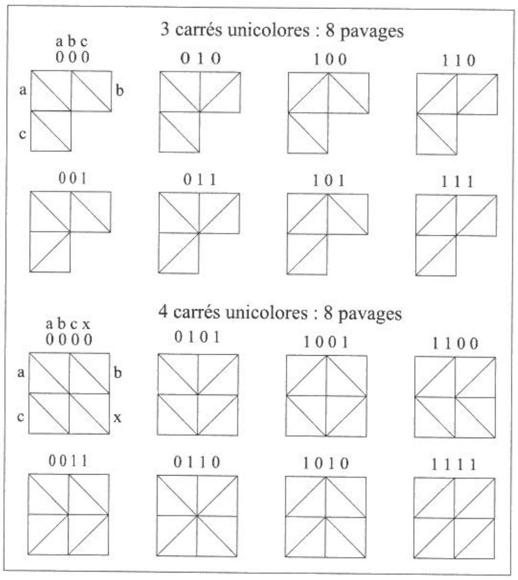


Fig. 15 – Arrangements possibles de trois carrés mi-partis « abc », puis de quatre « abcx ». Chaque configuration est associée à son code binaire : le carré, dont la diagonale est positive, est affecté de la valeur binaire « 1 », celui avec la diagonale négative correspondra à « 0 ». L'implantation du quatrième carré « x » répond à l'équation booléenne, $x = a \oplus b \oplus c$, qui est la fonction « ou exclusif » d'un système booléen à trois variables.

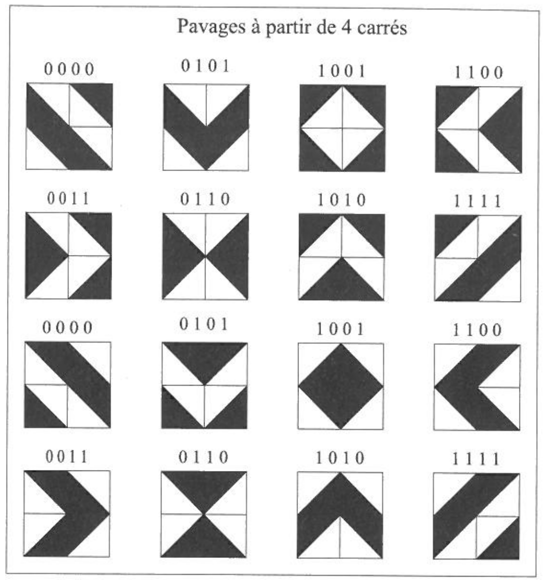


Fig. 16 – Réalisation des 16 mosaïques possibles à partir de 4 carrés unicolores. Les huit premiers sont complémentaires par rapport aux huit suivants.

Cette modélisation permet de réaliser une multitude de pavages à partir d'une matrice « m » colonnes sur « p » lignes *(Fig. 17)*. Le mosaïste définit selon son choix le codage de la première ligne « p1 » (ce qui correspond à toutes les cases de tête des colonnes), puis des cases de la colonne « m1 ». En appliquant la même règle que pour les mosaïques de quatre carrés donnés en figure 15, on peut compléter la matrice qui sera unique car il n'y a qu'une seule possibilité pour compléter les cases vides. Quand cette matrice sera achevée, il suffira de remplacer les « 1 » par des carrés à diagonale positive et les « 0 » en carré à diagonale négative. La mosaïque unicolore obtenue permettra d'obtenir bien entendu deux mosaïques bicolores.

Le nombre de pavages unicolores dépend du nombre de colonnes et du nombre de lignes. Pour un pavage de « m » colonnes sur « p » lignes, le mosaïste a « 2^m » possibilités pour le choix du nombre binaire sur la première ligne et « 2^{p-1} » pour compléter les premières cases des lignes ; la première case de la première ligne étant déjà comptée. Ensuite, pour un pavage unicolore, on a deux mosaïques bicolores :

• Nombre total de mosaïques possibles « M1 », pour « m » colonnes et « p » lignes :
$M1 = 2(2^{m+p-1})$
$M1 = 2^{m+p}$

• Nombre de mosaïques possibles « M2 » pour l'exemple donné en Fig. 17.
$M2 = 2^{6+6} = 2^{12} = 4096$

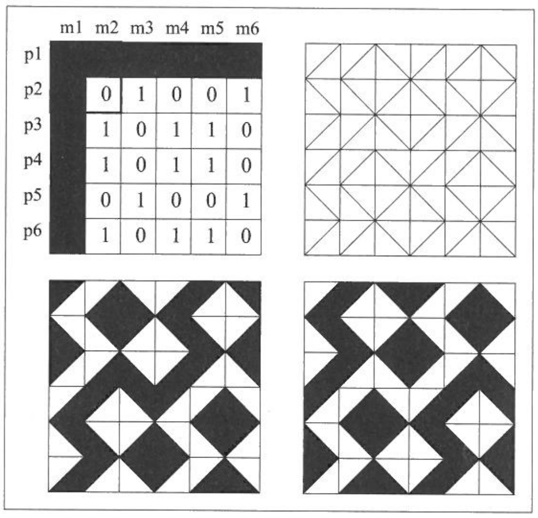
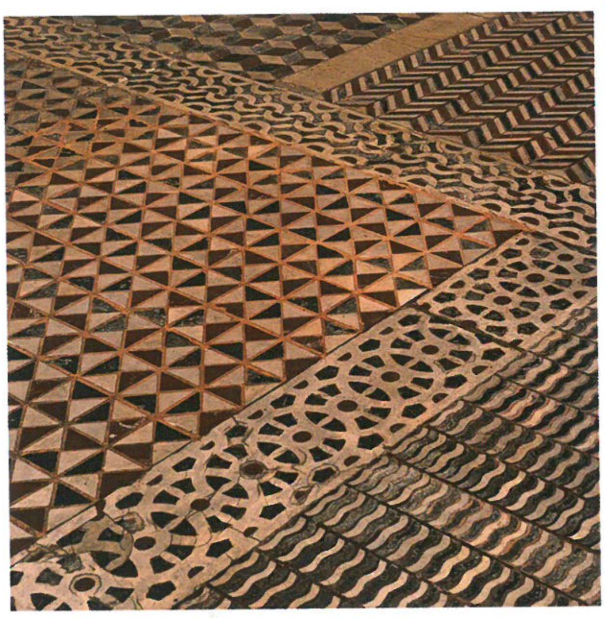
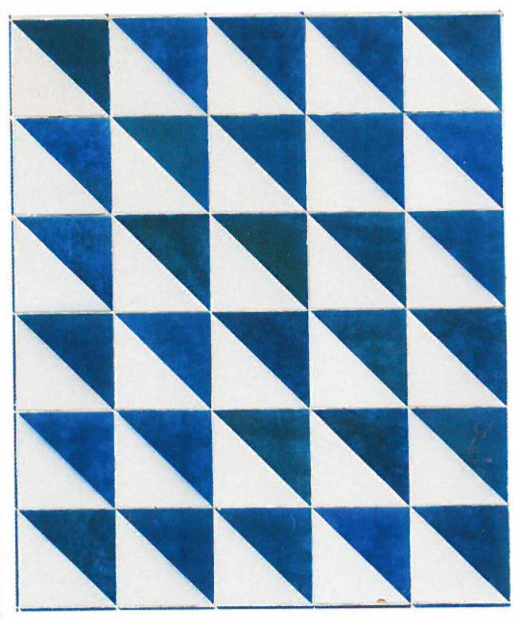


Fig. 17 – Exemple de mosaïques « 6 x 6 » La première matrice montre un choix possible des carrés de la colonne « m_1 » et de la ligne « p_1 ». Ce choix impose l'état logique de tous les autres carrés, par exemple : $m_2p_2 = m_1p_1 \oplus m_1p_2 \oplus m_2p_1$.
À partir d'un ensemble de trois carrés, on peut compléter le quatrième en appliquant cette équation.

Le mosaïste a donc 4096 solutions pour créer son œuvre en respectant les contraintes du pavage LT. Si cette méthode de construction des pavages avec des carrés mi-partis est intéressante pour les amateurs de mathématiques et de récréations mathématiques, concerne-t-elle les artisans-créateurs de mosaïques ? Peut-être pas...

Boîte de jeu composée de carrés mi-partis et de carrés monochromes permettant de réaliser de multiples mosaïques. (Collection CNAM Paris, photo MB)





Mosaïques historiques construites sur la base de carrés de Truchet.
L'illustration de gauche montre une petite partie du carrelage du baptistère de Florence (cité par Lucas), et l'image de gauche correspond à une mosaïque de Cascais au Portugal.