LE VIEUX PAPIER

Publication de la Société « Le Vieux Papier » pour l'étude de la vie quotidienne à travers les documents et l'iconographie — Fondée en 1900.

Fascicule 431

Janvier 2019

LES JEUX DANS LES COLLECTIONS DU CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS DE PARIS, 4 – LA TOUR D'HANOÏ ET LE BAGUENAUDIER *(4e partie)*

par Michel Boutin

Fig. 1 – Boîte de la Tour d'Hanoï. (hauteur : 10 cm, largeur : 14,5 cm, longueur : 15 cm, masse : 365 g.) (© Musée des arts et métiers, Cnam, Paris / Photo Michèle Favareille)

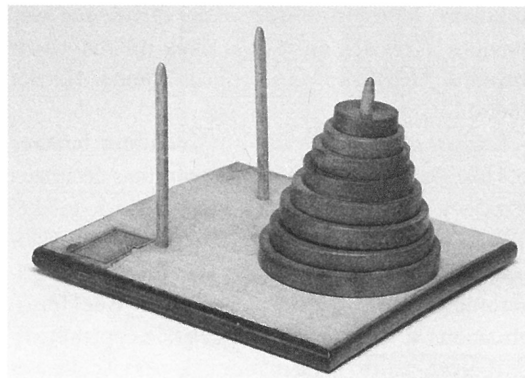


Fig. 2 – La Tour d'Hanoï sortie de la boîte, et installée. (© Musée des arts et métiers, Cnam, Paris / Photo Michèle Favareille)

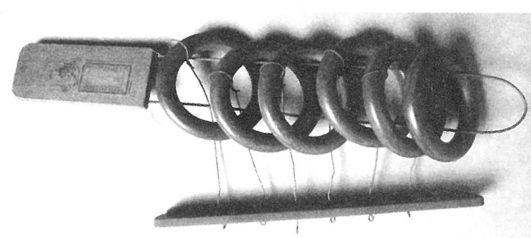


Fig. 3 – Baguenaudier bois six anneaux. (hauteur 12,5 cm, largeur : 7 cm, longueur : 32 cm, masse : 125 g). (Cnam, Paris – photo MB)

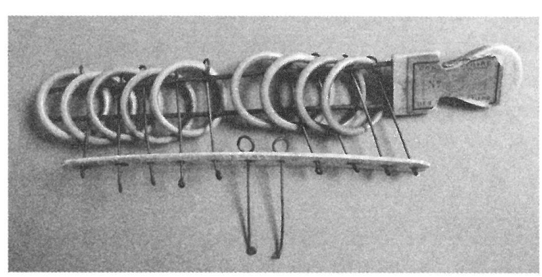


Fig. 4 – Baguenaudier ivoire onze anneaux. (hauteur 12,5 cm, largeur : 7 cm, longueur : 32 cm, masse : 125 g). (Cnam, Paris – photo MB)

La Tour d'Hanoï *(Fig. 1* et *2* **→couleurs-IX***)* et le baguenaudier *(Fig. 3* et *4* **→couleurs-X***)* sont deux casse-tête qui furent donnés au Conservatoire en 1888 par Édouard Lucas, selon le *Journal officiel* du 8 avril 1889. La Tour d'Hanoï fut inventée par E. Lucas en 1882, mais le baguenaudier est beaucoup plus ancien et d'origine inconnue. Ces deux casse-tête ont des liens de parenté indéniables en raison de l'aspect mathématique de leur fonctionnement qui repose sur la numération binaire ; c'est ainsi qu'ils sont présentés par Lucas dans son ouvrage sur la théorie des nombres[1] :

> Aux divers systèmes de numération se rapportent le baguenaudier, qui est une transformation du boulier du système binaire, ainsi que la Tour d'Hanoï, que nous avons publiée en 1882, et le jeu indien de Tchonka-Rouma, d'ailleurs, on peut imaginer des appareils du même genre pour tous les systèmes de numération.

Dans son premier volume des *Récréations mathématiques*, publié en 1882, Lucas rappelle quelques repères historiques sur la numération binaire en préambule à la description du baguenaudier. En particulier, il mentionne le mémoire que

1 – Édouard Lucas, *Théorie des nombres*, Paris, 1891, page XXXII.

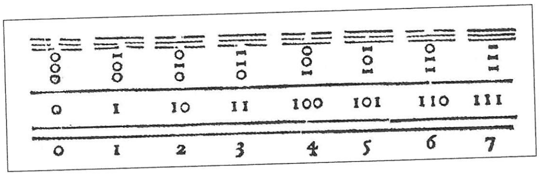


Fig. 5 – Concordance Trigrammes-binaire naturel, extrait de Leibniz (1703).

Leibniz a envoyé à l'Académie royale des sciences de Paris en 1703[2]. Cette publication en français est souvent considérée comme la première description du binaire, bien que ce sujet ait été mentionné avec quelques exemples de calculs dans un manuscrit non édité du mathématicien anglais Thomas Harriot (1560-1621).

Leibniz met en corrélation les nombres binaires de « 000000 » à « 100000 », et les nombres décimaux de « 0 » à « 32 ». Puis il établit une analogie mathématique entre la numération binaire et les 8 symboles des « Trigrammes » *(Fig. 5)* formant « l'Hexagramme » du *Yi King* (ou *Yi Jing*), ou « Livre des transformations ». C'est grâce à ses relations épistolaires régulières avec un mathématicien, le père jésuite Joachim Bouvet[3] (Le Mans, 1656-Pékin, 1732), que Leibniz a obtenu de Pékin une copie de l'Hexagramme en 1701. Bouvet s'était particulièrement intéressé au Yi King, traditionnellement attribué à Fu Xi (ou Fu Hsi, ou encore Fohi), un personnage de la mythologie chinoise. Leibniz et le père Bouvet seraient-ils à l'origine du décodage mathématique du « Livre des transformations » ? Peut-être pas, selon Édouard Lucas qui mentionne une relation certaine entre les symboles de l'Hexagramme et un boulier de six tiges ayant une seule bille sur chacune d'elles. Ainsi, Lucas donne une information intéressante dans son ouvrage *L'arithmétique amusante* (Paris, 1895, p. 164) : « Nous avons fait reproduire, au Conservatoire des Arts et Métiers, un boulier de ce genre, et nous pensons que notre explication semble plus plausible que celle de Leibniz, à cause de l'orientation des caractères. »

LA TOUR D'HANOÏ

Dans sa version « classique » la Tour d'Hanoï[4] est un casse-tête constitué par une planchette sur laquelle on a fixé trois tiges ; sur l'une d'elles on a enfilé huit disques de diamètre décroissant, le plus petit en haut de la pile et le plus grand en bas. L'objectif du joueur est de transposer tous les disques d'une tige à une autre en respectant des règles de déplacement très précises. Le Conservatoire possède deux jeux de ce type donnés par Édouard Lucas : le jeu classique avec 3 tiges et 8 disques et un jeu particulier avec 6 tiges et 8 disques.

Notes historiques

La Tour d'Hanoï est le seul jeu inventé par Édouard Lucas qui est entré dans la postérité. La première édition fut commercialisée en 1883 avec ce titre très curieux et apparemment très mystérieux : « La Tour d'Hanoï véritable casse-tête annamite. Jeu rapporté du Tonkin par le professeur N. Claus (de Siam). Mandarin du Collège Li-Sou-Stian ! » *(Fig. 1)*. La même année, une boîte du jeu avec sa notice arriva par la poste au siège du *Journal des débats politiques et littéraires* dans lequel Henri de Parville présenta ce nouveau casse-tête à ses lecteurs dans une chronique régulière de ce journal appelée « Revue des Sciences » :

> La poste nous a apporté ces jours-ci une petite boîte en carton peint, sur laquelle on lit : *La Tour d'Hanoï*, véritable casse-tête annamite, rapporté du Tonkin par le professeur N. Claus (de Siam), mandarin du collège Li-Sou-Stian. ...
>
> (...)
>
> Un mandarin, qui imagine un jeu fondé sur les combinaisons, doit sans cesse songer aux combinaisons, en voir et en mettre partout. Or, en permutant les lettres du signataire de la Tour d'Hanoï, il me semble que l'on peut traduire, sans la moindre difficulté : professeur *N. Claus (de Siam)*, mandarin du collège *Li-Sou-Stian* : Lucas d'Amiens, professeur du lycée Saint-Louis. Est-ce que moi aussi j'aurais trouvé mon problème ?[5]

Le mystérieux professeur N. Claus (de Siam) fut donc très rapidement identifié et, en conséquence, les histoires rocambolesques et les légendes entourant l'origine exotique du jeu tomberont rapidement en désuétude. La plupart des autres énigmes ont été peu à peu dévoilées, et certaines d'entre elles sont clairement explicitées en 2018 par Andreas M. Hinz, Sandi Klavzar et Ciril Petr, auteurs d'un ouvrage imposant de 450 pages[6] sur la Tour d'Hanoï. Sur le

---

2– Gottfried Wilhelm Leibniz, « Explication de l'arithmétique binaire, qui se sert des seuls caractères 0 & 1 ; avec des remarques sur son utilité, et sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures de Fohy », *Mémoires de mathématiques et physique de l'Académie royale des sciences*, 1703, p. 85-89.

3– Bouvet faisait partie du groupe de mathématiciens envoyé par Louis XIV en Chine en 1685.

4– En français, on a longtemps négligé le h aspiré de certains toponymes étrangers. Ainsi écrivait-on « d'Hollande » ou « d'Hanoï » là où nous préférons aujourd'hui « de Hanoï » ou « de Hollande ».

5– Henri de Parville, « Revue des Sciences », *Journal des débats politiques et littéraires*, 27 décembre 1883, p 1-2. Le texte complet de cette chronique fut repris en 1884 par deux périodiques : 1) Henri de Parville, « La Tour d'Hanoï et la question de Tonkin », *La Nature*, n° 565, 29 mars 1884, p. 285-286 ; 2) R. E. Allardice et A. Y. Fraser, « La Tour d'Hanoï », *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Second Session, 1883-84, 9th Meeting, 11 juillet 1884, p. 50-53.

6– Andreas M. Hinz, Sandi Klavzar, Ciril Petr, *The Tower of Hanoi : myths and maths*, 2nd edition, Bâle, Birkhäuser, 2018.

ventre du personnage central figurant au centre de l'illustration de la boîte *(Fig. 1)*, deux lettres, A-U, apparaissent clairement. Elles signifieraient « Agrégé de l'Université » ; c'était le cas d'Édouard Lucas. Sur le papier, dans le bambou à gauche, il y aurait le nom « Fo Hi » qui est l'ancienne translittération française de « Fu Xi » selon ces auteurs, qui rappellent également l'histoire invraisemblable racontée par Lucas dans la première page de la notice de 1883.

> D'après une vieille légende indienne, les brahmes se succèdent depuis longtemps, sur les marches de l'autel, dans le Temple de Bénarès, pour exécuter le déplacement de la tour sacrée de Brahma, aux soixante quatre étages en or fin, garnis de diamants de Golconde. Quand tout sera fini, la Tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin du monde !

Devant une telle histoire, nos trois auteurs s'interrogent. Ils se demandent pourquoi Lucas a nommé son jeu « Tour d'Hanoï », et ils proposent des explications à partir de l'illustration de la boîte sur laquelle quelques références géographiques sont indiquées : les villes (Hanoï et Tonkin) et une évocation de l'Annam (protectorat français de 1883 à 1945) en parlant de « casse-tête annamite ». En effet, ils tirent de l'oubli le traité de Hué en 1883 qui concéda le Tonkin et l'Annam à la France avec un statut de protectorat. Ensuite, ils rappellent qu'en 1882, la ville d'Hanoï fut dévastée par une attaque française. Le nom du jeu « Tour d'Hanoï » serait-il lié à l'histoire coloniale de la France en Indochine, plutôt qu'à l'histoire fantaisiste de la « tour sacrée de Brahma » ? D'autres indications restent mystérieuses, en particulier la mention de quatre villes d'édition du jeu (Paris, Pékin, Yedo (ancien nom de Tokyo) et Saïgon), et une remarque sur la fabrication des disques qui seraient en porcelaine en Chine, au Japon et au Tonkin !

Enfin, en haut à droite de l'illustration figurant sur la boîte, on voit nettement l'inscription « Breveté S.G.D.G. ». En effet, un brevet d'invention a bien été délivré à la société parisienne Grasson et Dupuy en 1883 avec le titre « La Tour d'Hanoï ou le véritable casse-tête annamite » *(Fig. 6)*. Cependant, cette boîte de 1883 ne mentionne pas d'éditeur, ni Grasson & Dupuy ni Chambon & Baye, bien que ces derniers aient édité le fascicule d'accompagnement en 1889, c'est-à-dire l'année de son dépôt de marque (juin 1889) et de l'Exposition universelle où il était présent. Cette Tour d'Hanoï originelle aurait-elle été éditée par Lucas lui-même à compte d'auteur ?

Vers la fin du XIX[e] siècle et au début du XX[e], la Tour d'Hanoï était produite par plusieurs éditeurs-fabricants de jeux, tel Revenaz & Tabernat qui la proposent sur leur catalogue de 1908-1909. On la

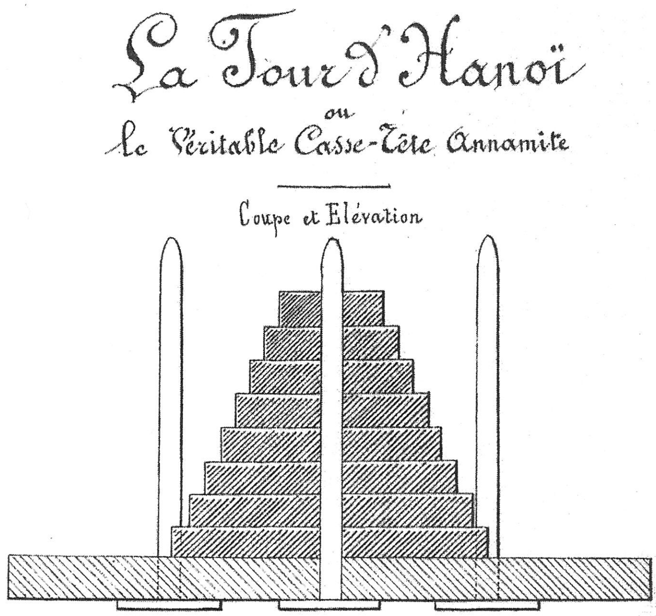


Fig. 6 – Extrait du brevet français de la Tour d'Hanoï (1883).

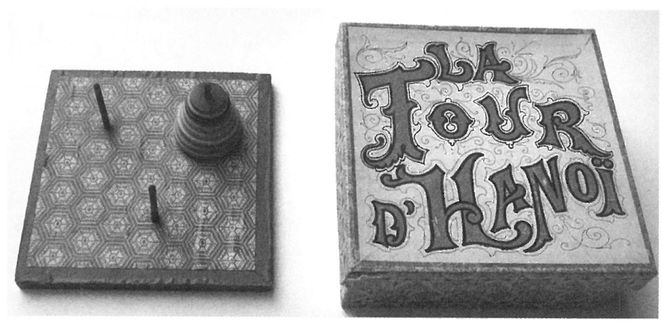


Fig. 7 – Tour d'Hanoï, caisse en bois « Nouveaux jeux divers ».
(Coll. et photo MB)

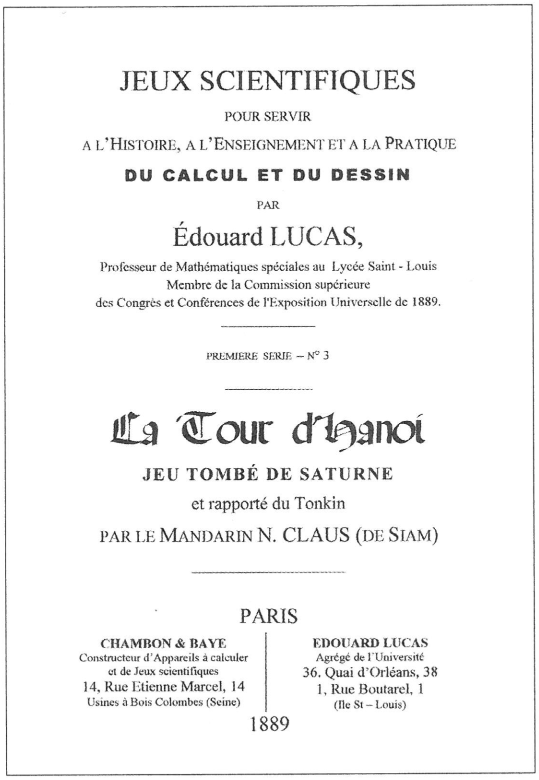
trouve ainsi dans des caisses de « jeux nouveaux réunis » ou de « Nouveaux Jeux Divers » *(Fig. 7)* au milieu de nombreux casse-tête éclectiques qui sont décrits dans l'ouvrage très illustré de nos collègues Geneviève Perrot et Françoise Mahy[7] et dans les livres sur les puzzles du collectionneur américain Jerry Slocum.

Le fascicule d'accompagnement de 1889

Le fascicule « Jeux scientifiques n° 3 : la Tour d'Hanoï » *(Fig. 8)* fut édité en 1889 par l'association Chambon & Baye et Édouard Lucas, avec la même présentation que les autres numéros[8]. Ce fascicule est construit autour de huit paragraphes.

7– Geneviève Perrot, Françoise Mahy, *Les casse-tête récréatifs à la Belle époque*, [Caen], Éditions GPFM, 2012.

8– Voir *Le Vieux Papier*, n° 429 et n° 430.



JEUX SCIENTIFIQUES

POUR SERVIR

A L'HISTOIRE, A L'ENSEIGNEMENT ET A LA PRATIQUE

DU CALCUL ET DU DESSIN

PAR

Édouard LUCAS,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint - Louis
Membre de la Commission supérieure
des Congrès et Conférences de l'Exposition Universelle de 1889.

PREMIERE SERIE – N° 3

La Tour d'Hanoï

JEU TOMBÉ DE SATURNE

et rapporté du Tonkin

PAR LE MANDARIN N. CLAUS (DE SIAM)

PARIS

CHAMBON & BAYE	EDOUARD LUCAS
Constructeur d'Appareils à calculer et de Jeux scientifiques	Agrégé de l'Université
14, Rue Etienne Marcel, 14	36, Quai d'Orléans, 38
Usines à Bois Colombes (Seine)	1, Rue Boutarel, 1 (Ile St - Louis)

1889

Fig. 8 – Page de titre du livret Jeux scientifiques n° 3 : La Tour d'Hanoï, jeu tombé de Saturne et rapporté du Tonkin.

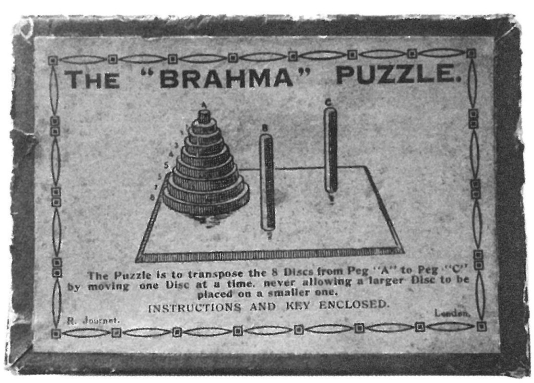


Fig. 9 – The Brahma Puzzle. (Coll. et photo MB)

Les Brahmes tombent : ce premier paragraphe commence par des références fantaisistes au Mahabharata qui est le livre sacré de l'Inde. Il serait traduit du sanskrit en français par « Le grand Archi-Prêtre des sacrifices, Te-Chu-Pog, ordonnateur des hécatombes de baleines, au Palais des mastodontes... » : ce traducteur serait une anagramme de Georges Pouchet (1833-1894), qui fut professeur d'anatomie au Muséum national d'histoire naturelle à Paris et directeur du laboratoire maritime de Concarneau. Ensuite, Lucas fait un long commentaire de son invention de « Légende indienne » avec la tour de 64 disques, et il précise que les règles auraient été imposées par Brahma[9], ce qui a conduit des éditeurs à intituler leur « Tour d'Hanoï » par « Tour de Brahma » *(Fig. 9)*.

Dans le grand temple de Bénarès au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, on aperçoit trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur l'une de ces aiguilles, le dieu Parabavastû enfila, au commencement des siècles, soixante-quatre disques d'or pur, le plus large reposant sur le bonze et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la Tour sacrée de Vishnou. Nuit et jour, les bonzes se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la Tour sacrée, de la première aiguille sur la troisième, étage par étage, sans jamais intervertir, sans jamais s'écarter des règles immuables imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les Brahmes tomberont et ce sera la fin du monde.[10]

Question de l'étage : dans un ensemble de remarques humoristiques mystérieuses, Lucas écrit : « Ce jeu inédit a été retrouvé dans les écrits de l'illustre Mandarin Fer-Fer-Tam-Tam »[11]. Ensuite, il explique simplement la règle du jeu : ne déplacer à chaque coup que l'étage d'une pile pour l'enfiler sur une tige libre ou sur une autre pile à condition que l'étage supérieur soit plus grand ; l'objectif final étant de déplacer une pile de disques, d'une tige à une autre.

Le Tombeau des cent dalles[12] : Lucas reprend quelques lignes de la notice se trouvant dans la boîte de 1883 :

Dans le prospectus de la première édition de 1883, qui parut en même temps à Paris, Pékin, Yédo et Saïgon, chez les libraires et marchands de nouveautés, il était dit ceci : nous pourrions offrir une prime de dix mille francs, de cent mille francs, d'un million de francs, et plus encore – n'ayant nul besoin de les avoir en poche, – à celui qui réaliserait à la main le transport de la Tour d'Hanoï à soixante quatre étages, conformément aux règles du jeu. Nous dirons tout de suite qu'il faudrait exécuter successivement le nombre de déplacements : 18 446 744 073 709 551 615. Ce qui, à un coup par seconde, exigerait plus de cinq milliards de siècles.

Il raconte ensuite l'histoire d'un « brave bourgeois », Aboul-Hassan, qui voulait toucher la somme promise avec une tour de 100 étages ! Mais

9– Vishnou et Brahma appartiennent à la mythologie de l'Inde.

10– *Jeux Scientifiques n° 3, la Tour d'Hanoï*, p. 3.

11– « Fer-Fer-Tam-Tam » serait une anagramme de Fermat, selon Francis Lucas.

12– Où il faut soupçonner un jeu de mots...

il est mort d'épuisement dans son cabinet de travail par ignorance de la numération binaire, dit Lucas !

La tour prends garde ! (ronde enfantine) : ce paragraphe pédagogique explique la manipulation des disques sur une tour à trois tiges (ABC) et deux disques (petit et grand). Au départ les deux disques sont sur la tige A donc en position AA. Il suffit de trois coups pour les changer de tige : AA à AB (le petit disque passe sur la tige B) ; AB à CB (le grand disque passe sur la tige C), enfin CB à CC, (le petit disque vient sur le grand), alors les deux disques sont superposés sur la tige C, ils ont donc changé de tige**13**. Ensuite, un tableau indique le nombre de mouvements selon le nombre de disques : 1 étage (1 coup) ; 2 étages (3 coups) ; 3 étages (7 coups) ; ...8 étages (255 coups), etc.

L'exposant des puissances : Lucas donne une méthode simple pour calculer le nombre de déplacements selon le nombre d'étages. Il reprend les résultats du tableau précédent, puis il rappelle que ce calcul correspond à une progression géométrique de raison 2. Ainsi on peut calculer directement le nombre de déplacements : $N = 2^n-1$. Pour une tour de 8 étages on a : $2^8-1 = 255$ déplacements. Pour une tour de 64 étages, on a un nombre de manœuvres égal à $2^{64}-1$; c'est le nombre de 20 chiffres qui est donné ci-dessus. Cette valeur étant fastidieuse à calculer à la fin du XIXe siècle, Lucas donne une méthode très simple pour connaître le nombre de chiffres du résultat de la progression. Par exemple, pour une tour de 100 disques, le joueur serait face à un nombre de 31 chiffres**14**.

Malice du sac de Raoul : c'est en effet un paragraphe plein de malice ! Lucas commence son chapitre :

Un savant lettré, aimable et spirituel, H. R. DE LAPIN - LIÈVRE, qui demeure, comme son nom l'indique, au Parc-des-Princes, a dévoilé dans ses *étincelantes Causeries Scientifiques*, le mystère qui recouvrait la naissance de celui qui rapporta du Tonkin la première Tour d'Hanoï. Il prétend que N. DE SIAM veut dire D'AMIENS, et que le mandarin de l'Annam ne serait qu'un enfant de la Picardie, tout juste aux Antipodes! Je ne saurais y contredire pour ma part, ne me rappelant rien de cette époque. **15**

Il poursuit ensuite avec des exemples de permutations de lettres et il précise qu'il n'y a pas de « malice » dans le titre ! Mais, on voit bien que H. R. Lapin-Lièvre est une anagramme d'Henri de Parville. En effet, cet ingénieur, journaliste scientifique, a dévoilé dès 1883 le nom de inventeur de la Tour d'Hanoï (Lucas, bien sûr) en précisant « On n'est jamais trahi que par soi-même » ! Henri de Parville est en effet l'auteur de la série *Causeries scientifiques*, publiée de 1861 à 1890, et il est décédé à Boulogne où, à cette époque, un lieu s'appelait

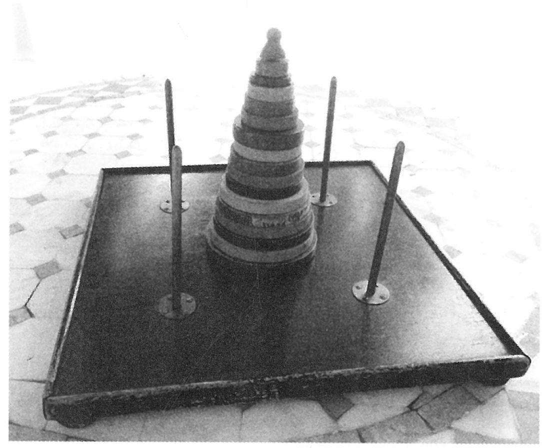


Fig. 10 – Tour 5 tiges et 16 disques. (Coll. et photo Francis Lucas)

« Parc-des-Princes » ! Ainsi, Lucas donne les indices qui permettent d'identifier très facilement H. de Parville**16** qui fut probablement le premier à dénouer les énigmes liées à la Tour d'Hanoï. Dans la seconde partie de ce paragraphe, il reprend une information qu'il avait déjà donnée dans une publication de janvier 1884 signée N. Claus (de Siam)**17** :

Mais revenons à notre Tour. Une remarque fort intéressante sur la pratique du jeu a été faite, pour la première fois, par le neveu de l'inventeur, M. RAOUL OLIVE, alors élève au lycée Charlemagne. Pour monter la tour sur trois tiges, quel que soit le nombre des étages, il faut faire continuellement tourner le disque le plus petit, toujours dans le même sens de rotation circulaire ABC ou ACB, tous les deux coups. **18**

Tours à cinq clous : « Nous avons modifié, dans cette nouvelle édition, les dispositions de la Tour », dit Lucas. Il propose alors une tour à 5 tiges et 16 disques répartis en quatre couleurs, ce qui permet toutes sortes de variantes *(Fig. 10)*. Parmi les quatre « problèmes » mentionnés, voici le premier :

Le clou central étant vide, on enfile les pions de même couleur, dans l'ordre de grandeur décroissante, sur les quatre autres tiges. Cela posé, réunir conformément aux règles données, les pions de deux couleurs sur la tige centrale. [p. 13]

13– Ce système de notation, non utilisé par Lucas, est conforme au graphe donné en Fig. 13.

14– Le nombre de chiffres est égal à la partie entière de [log 2^{100}], en ajoutant 1. Ce calcul donne la valeur de 31 chiffres.

15– *Jeux Scientifiques n° 3, la Tour d'Hanoï*, p. 11.

16– Dans ce paragraphe, Lucas associe : « H. R. Lapin-Lièvre » ; « étincelantes Causeries Scientifiques » ; « Parc-des-Princes ». Tout est cohérent pour découvrir Henri de Parville.

17– N. CLAUS (DE SIAM), « La Tour d'Hanoï, Jeu de calcul », *Science et Nature*, Vol. 1, n° 8, 19 janvier 1884, p. 127-128.

18– *Jeux Scientifiques n° 3, la Tour d'Hanoï*, p. 12. Raoul Olivier est le petit-neveu (et non le neveu) de Lucas, qu'il avait déjà mentionné dans sa publication de janvier 1884 (cf. note précédente).

Bien entendu, il est pratiquement impossible de déplacer 16 disques sur une autre tige avec les règles habituelles. Il y aurait beaucoup trop de manœuvres. Le Conservatoire possède une tour avec 6 tiges (ou clous) et 8 disques, mais il n'a pas de tour à 5 tiges et 16 disques.

Détours tout autour des tours : dans ce surprenant et dernier paragraphe du fascicule, Lucas commence ainsi :

Il nous reste à faire quelques aveux au lecteur. La Tour d'Hanoï n'a pas été rapportée du Tonkin, puisque l'inventeur n'y est jamais allé. Elle a été imaginée en 1876, au n° 56 de la rue Monge, à Paris, dans la maison bâtie sur l'emplacement de celle où mourut PASCAL, le 19 août 1663. L'auteur réunissait alors les matériaux nécessaires pour écrire l'histoire, du calcul, de ses méthodes, de ses appareils et de ses machines. [19]

Ensuite, il explique simplement que la Tour d'Hanoï n'est qu'une représentation de l'arithmétique binaire ; une transformation du boulier chinois de Fo-Hi et du baguenaudier, puis il mentionne sa communication à un congrès au sujet de Pascal.

Aspects mathématiques de la tour d'Hanoï 3 tiges et « n » disques

– Nombre de déplacements requis pour « n » disques

La règle de déplacement des disques est donnée dans « Question de l'étage » du fascicule d'accompagnement du jeu (voir ci-dessus). Le fonctionnement est très simple, mais avant de se lancer à jouer avec une tour composée d'un grand nombre de disques, il est prudent de connaître préalablement le nombre de coups nécessaires pour déplacer la tour sur une autre tige, en fonction du nombre de disques. Quel que soit leur nombre, le plus grand d'entre eux n'est déplacé qu'une seule fois, mais le reste de la tour doit changer deux fois de tige : la première fois pour libérer le disque le plus bas (c'est-à-dire le plus grand) et la seconde pour le recouvrir sur une autre tige. Ainsi, la totalité des déplacements, pour une tour de « n » disques, est toujours égale à la somme de « 1 » déplacement (celui du grand disque) et de deux fois le nombre de déplacements correspondant à une tour de « n-1 » disques. Par exemple, pour 4 disques, on a les trois plus petits à déplacer (7 coups), puis le grand disque (1 coup), puis une seconde fois les trois plus petits (7 coups). On a donc : $N_4 = 7+1+7 = 15$ déplacements. Ainsi : $N_n = N_{n-1} + 1 + N_{n-1} = 1 + 2N_{n-1}$

Cette relation permet d'initier une suite récursive dont la conclusion permettra d'établir par récurrence une relation mathématique pour calculer directement le nombre de coups à effectuer pour

Décimal		0	1	2	3	4	5	6	7
Binaire naturel	2^0	0	1	0	1	0	1	0	1
	2^1	0	0	1	1	0	0	1	1
	2^2	0	0	0	0	1	1	1	1
Binaire Réfléchi (code de Gray)	d0	0	1	1	0	0	1	1	0
	d1	0	0	1	1	1	1	0	0
	d2	0	0	0	0	1	1	1	1

Fig. 11 – Codes décimal, binaire naturel et binaire réfléchi (dit code de Gray). [20]

déplacer une tour de « n » disques d'une tige à une autre : $N_n = 2^n - 1$.

– Codage binaire et ternaire des déplacements

Le déplacement des disques suit inéluctablement un protocole précis qui fut décrit dès 1884 par le petit-neveu d'Édouard Lucas, Raoul Olive (voir « Malice du sac à Raoul »). En respectant ce protocole, la suite des déplacements peut être exprimée par une suite de nombres binaires dont le nombre de chiffres (ou bits) [21] est égal au nombre de disques. Dès 1882, dans le premier volume de ses *Récréations mathématiques*, Lucas a réservé sa « sixième récréation » à la numération binaire avant de l'appliquer au baguenaudier dans la « septième récréation ». La Tour d'Hanoï est présentée dans les volumes III et IV, donc bien après son invention en 1882. La suite des nombres binaires qui correspond à celle des décimaux est appelée « code binaire naturel », mais on peut organiser une suite de nombres binaires de plusieurs manières [22] dont l'une d'elles, appelée « code binaire réfléchi », est caractérisée par ses propriétés d'adjacence. Quand on passe d'un nombre au suivant, un seul bit change d'état (0 à 1 ou 1 à 0) *(Fig. 11)*. Cette propriété fut mise à profit par un clerc de notaire lyonnais [23] du nom de Louis Gros pour modéliser le fonctionnement du baguenaudier.

19– *Jeux Scientifiques n° 3, la Tour d'Hanoï*, p. 14.

20– Le code binaire naturel est pondéré : par exemple le décimal (base 10) égal à $(5)_{10} = 1(2^2) + 1(2^0)$; il correspond au binaire (base 2) égal à $(101)_2$. Le binaire réfléchi est adjacent cyclique : quand on passe d'une combinaison à une autre, un seul bit change.

21– Le terme « bit » est la contraction de « *binary digit » pouvant se traduire par* « chiffre binaire ». Ce terme est attribué à John Tukey qui l'a proposé en 1948, mais c'est Claude Shannon, qui l'a fait connaître la même année.

22– Le nombre de codages possibles est calculé ainsi : $(2^n)^n$; avec « n » : nombre de bits.

23– Louis Gros, *Théorie du baguenodier*, par un clerc de notaire lyonnais, Lyon, Vingtrinier, 1872.

Près d'un siècle plus tard, un ingénieur américain, Franck Gray, a utilisé ce même code en 1947 dans un brevet d'invention enregistré aux États-Unis où il décrit un système pour transmettre des informations par impulsions électriques pour le compte de la société Bell Telephone Laboratories. Le code binaire réfléchi est connu depuis cette époque sous le nom de « code de Gray », bien que son collègue George Stibitz ait déposé un brevet pour un système électro-mécanique dont le fonctionnement est également basé sur ce code.

Le code de Gray a un intérêt dans de nombreux domaines y compris dans les jeux, en particulier pour modéliser les déplacements des disques de la Tour d'Hanoï et pour séparer les anneaux et la broche d'un baguenaudier. Les déplacements des disques correspondent à une succession de nombres binaires selon un point de vue « disques ». Considérons une tour à trois disques (d0 pour le plus petit, d1 pour le moyen, d2 pour le plus grand), et trois tiges (A, B, C). Au départ, les disques sont sur la tige A. *La Fig. 12* montre la succession des 7 déplacements à partir de la situation initiale codée « 000 ». Le premier déplacement consiste à transposer le disque « d0 » de la tige « A » vers la tige « B ». Cette nouvelle situation est alors codée 001. En effet, seul le disque d0 a changé de position. La succession des coups pour déplacer la tour d'une tige à une autre revient à écrire le code de Gray quel que soit le nombre de disques.

Le plus petit disque se déplace une fois sur deux toujours dans le même sens, et les autres sont mis sur la seule tige disponible permettant de ne jamais recouvrir un disque plus petit. En partant de la tige A, pour un nombre impair de disques (3 dans ce cas), si le cycle du petit disque est A-B-C-A-B, alors la position finale de la tour sera sur la tige B ; en partant en sens inverse, A-C-B-A-C, la tour serait transposée en C. Pour un nombre pair de disques, ce scénario est inversé.

La plupart des nombreuses publications au sujet de la tour d'Hanoï sont des approches mathématiques ; par exemple, les deux articles publiés dans la revue française *Pour la Science*, par Jean Lefort en 2008[24] et Jean-Paul Delahaye en 2015[25], modélisent les déplacements des disques par un graphe, ce qui permet d'indiquer clairement tous les déplacements possibles quelle que soit la phase du jeu. Ils soulignent aussi la correspondance entre la Tour d'Hanoï et les structures fractales. Par exemple, en *Fig. 13*, les trois graphes montrent les positions pour trois types de tour : avec un disque (I), deux (II) et trois (III). Pour trois disques, les sommets du triangle correspondent aux positions stables des disques au départ ou à l'arrivée : AAA si

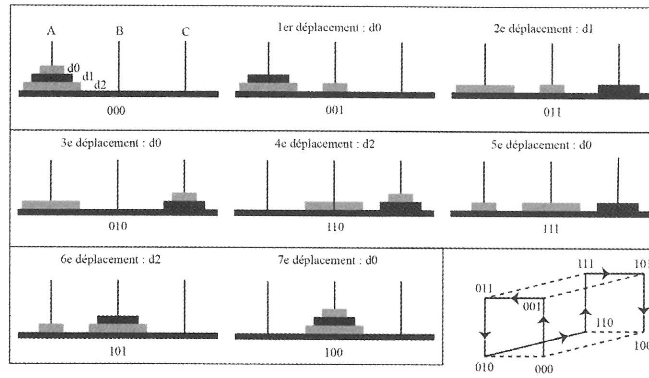


Fig. 12 – Codage binaire réfléchi du déplacement des disques pour une tour 3 disques - 3 tiges. Le graphe en bas à droite montre le cycle hamiltonien du déplacement des disques. (voir Le Vieux Papier, n° 428)

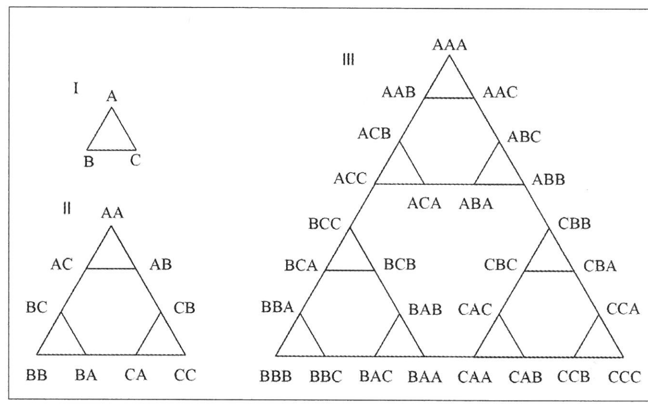


Fig. 13 – Graphes relatifs aux déplacements pour une tour : un disque (I) ; deux disques (II) ; trois disques (III). Sur ces graphes, le codage des sommets est ternaire.

les trois disques sont sur la tige A ; BBB, s'ils sont sur la tige B ; CCC, sur la tige C. Le caractère de droite du code à chacun des sommets indique toujours où se trouve le petit disque d0, le caractère central indique la position de d1, et le caractère de gauche donne la position de d2, c'est-à dire celle du grand disque. Quelques exemples de déplacements :

AAA : les trois disques sont sur la tige A

AAA vers AAB : d0 passe de la tige A à la tige B

AAB vers ACB : d1 passe de la tige A à la tige C

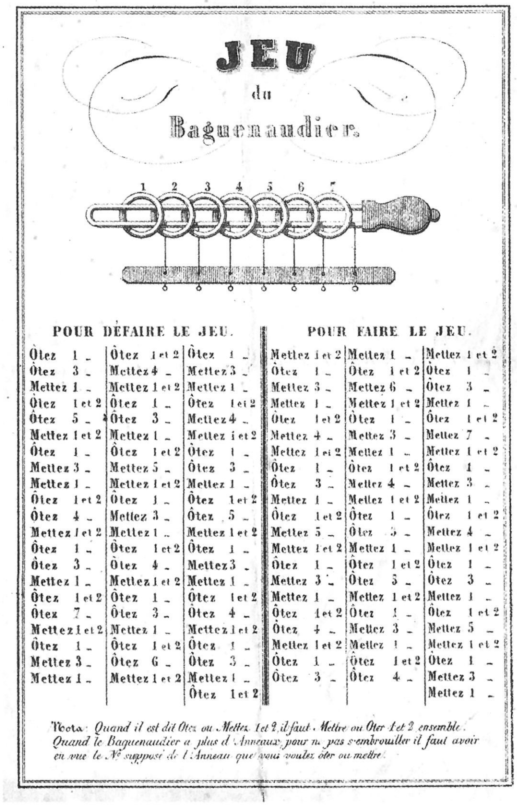
ACB vers ACC : d0 passe de la tige B à la tige C ; deux disques sont alors sur la tige C,

etc. jusqu'à BBB.

Ces graphes indiquent toutes les possibilités pour déplacer la tour d'une tige à une autre. Les plus courts chemins suivent les côtés du triangle. En partant de

24– Jean Lefort, « La tour de Hanoï », *Des jeux d'esprit pour la science-Dossier Pour la Science*, n° 59, avril-juin 2008, p. 91-93.

25– Jean-Paul Delahaye, « Les tours de Hanoï, plus qu'un jeu d'enfants », *Pour la Science*, n° 457, novembre 2015, p. 108-114.



JEU
du
Baguenaudier.

POUR DÉFAIRE LE JEU.			POUR FAIRE LE JEU.		
Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 1 et 2
Ôtez 3 –	Mettez 4 –	Mettez 3 –	Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –
Mettez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 3 –	Mettez 6 –	Ôtez 3 –
Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 1 –
Ôtez 5 –	Ôtez 3 –	Mettez 4 –	Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2
Mettez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 4 –	Mettez 3 –	Mettez 7 –
Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 1 et 2
Mettez 3 –	Mettez 5 –	Ôtez 3 –	Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –
Mettez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 1 –	Ôtez 3 –	Mettez 4 –	Mettez 3 –
Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 1 –
Ôtez 4 –	Mettez 3 –	Ôtez 5 –	Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2
Mettez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 5 –	Ôtez 3 –	Mettez 4 –
Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 1 et 2
Ôtez 3 –	Ôtez 4 –	Mettez 3 –	Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –
Mettez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 3 –	Ôtez 5 –	Ôtez 3 –
Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 1 –
Ôtez 7 –	Ôtez 3 –	Ôtez 4 –	Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2
Mettez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 1 et 2	Ôtez 4 –	Mettez 3 –	Mettez 5 –
Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 1 –	Mettez 1 et 2
Mettez 3 –	Ôtez 6 –	Ôtez 3 –	Ôtez 1 –	Ôtez 1 et 2	Ôtez 1 –
Mettez 1 –	Mettez 1 et 2	Mettez 1 –	Ôtez 3 –	Ôtez 4 –	Mettez 3 –
		Ôtez 1 et 2			Mettez 1 –

Nota : Quand il est dit Ôtez ou Mettez 1 et 2, il faut Mettre ou Ôter 1 et 2 ensemble. Quand le Baguenaudier a plus d'Anneaux, pour ne pas s'embrouiller il faut avoir en vue le N° supposé de l'Anneau que vous voulez ôter ou mettre.

Fig. 14 – Table des mouvements des anneaux incluant les manœuvres rapides. (Coll. et photo MB)

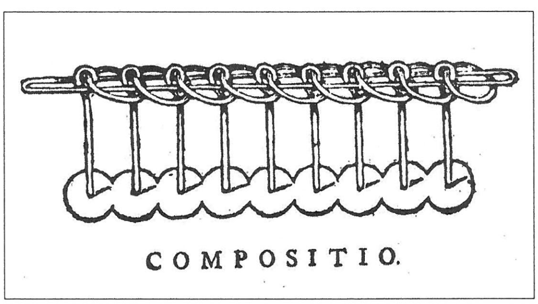


Fig. 15 – Baguenaudier (extrait du livre de J. Wallis).

la tige A sur laquelle on a les trois disques « code AAA », si on part à gauche on arrive sur le sommet AAB (c'est-à-dire que le petit disque est sur la tige B et les autres restent sur la tige A), si on part à droite on arrive sur le sommet AAC, alors le petit disque est sur la tige C, et les autres sont restés sur la tige A. En partant du sommet AAA, on peut aller en AAC, puis en AAB, etc. Par exemple de AAA en BBB, on peut suivre les sommets, AAA-AAC-ABC-ABB-CBB-CBC-CAC-CAA-BAA-BAC-BBC-BBB ; les règles de déplacement sont respectées, mais le chemin suivi n'est pas le plus court. À partir de ces graphes, on voit la naissance d'une structure fractale qui se préciserait en augmentant le nombre de disques.

LE BAGUENAUDIER

Le baguenaudier – « Chinese Rings », en anglais – est un casse-tête composé d'une broche sur laquelle sont enfilés des anneaux imbriqués les uns dans les autres par des tiges attachées « librement » à une barre. Le Conservatoire national des arts et métiers en possède deux exemplaires qui lui ont été donnés par Édouard Lucas : l'un est composé de six anneaux en bois *(Fig. 3)*, l'autre de onze anneaux en ivoire *(Fig. 4)*.

Notes historiques

L'origine du baguenaudier est obscure, bien qu'elle soit souvent attribuée à des légendes chinoises. L'anthropologue américain Stewart Culin (1858-1929) rapporte que le jeu aurait été inventé par le soldat Hung Ming (181-234) pour occuper sa femme, lors de son départ en guerre. L'histoire raconte qu'elle aurait oublié son chagrin en essayant de sortir les anneaux de la broche[26] ! Cette légende est reprise par de nombreux auteurs depuis lors, mais les références du baguenaudier à la littérature chinoise ancienne sont à prendre avec précautions, selon Albrecht Heeffer et Andreas M. Hinz[27] qui citent l'ouvrage de Joseph Needham sur les sciences dans la civilisation chinoise[28]. Édouard Lucas ne s'exprime pas sur les légendes entourant le baguenaudier, il reproduit un texte de Cardan publié en 1550[29], et traduit en français par Richard Leblanc en 1556[30]. Le baguenaudier y est sommairement décrit ainsi que son fonctionnement sans référence à la numération binaire. Cardan donne une précision en fin de texte : « Cette subtilité n'est pas utile en soi, bien qu'elle puisse s'appliquer aux serrures astucieuses faites pour les coffres ». Une remarque de Lucas vient compléter ces propos :

M. le docteur O.-J. Broch, président de la commission du royaume de Norvège à l'Exposition universelle de 1878, m'a dit que, dans son pays, les habitants des campagnes

26– Stewart Culin, *Korean games. With notes on the corresponding games of China and Japan*, Philadelphie, University of Pennsylvania, 1895; réimp. *Games of the Orient, Korea, China, Japan*, Rutland (VT) / Tokyo, Charles E. Tuttle Company, 1958, p. 31-32.

27– Albrecht Heeffer, Andreas M. Hinz, « A Difficult Case : Pacioli and Cardano on the Chinese Rings », *Recreational Magazine*, vol. 4, n° 8, 2017; p. 5-23.

28– Joseph Needham, *Science and Civilisation in China*, Vol. 3: *Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*, Cambridge, Cambridge University Press, 1959, p. 111.

29– Jérôme Cardan (Girolamo Cardano), *De Subtilitate Libri XXI*, Nuremberg, J. Petri, 1550, Liber XV « De incerti generis aut inutilibus subtilitatibus », p. 522-523.

30– *Les livres de Hiérome Cardanus,... intitulés de la subtilité et subtiles inventions*, Paris, G. Le Noir, 1556.

RÉSOLUTION DU BAGUENAUDIER

Exemple pour 7 anneaux : $S_7 = (1010101)_2 = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = (85)_{10} = 1 + 4^1 + 4^2 + 4^3$

Exemple pour 8 anneaux : $S_8 = (10101010)_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = (170)_{10} = 2\ (1 + 4^1 + 4^2 + 4^3)$

Ces résultats peuvent être généralisés à n'importe quel nombre d'anneaux. Ainsi, calculer S_{ni} ou S_{np} revient à calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison q = 4, de terme initial $U_0 = 1$ (pour n impair) ou $U_0 = 2$ (pour n pair).

Dans le cas général, on a : $S_n = U_0\,(q^{n+1}-1)/(q-1)$

Pour un nombre d'anneaux « n » impair : $S_{ni} = [4^{(n+1)/2}-1]/3 = (2^{n+1} - 1)/3$

Exemple pour n = 7 : $S_7 = (2^8-1)/3 = (256-1)/3 = 85$

Pour un nombre d'anneaux « n » pair : $S_{np} = 2[4^{n/2}-1]/3 = (2^{n+1}-2)/3$

Exemple pour n = 8 : $S_8 = (2^9-2)/3 = (512-2)/3 = 170$

se servent encore du baguenaudier pour fermer leurs bahuts et leurs sacs.[31]

Peu avant Cardan, le mathématicien italien Luca Pacioli (*ca* 1445-1517) a écrit autour de 1500 un ouvrage singulier, *De viribus quantitatis*, dont le manuscrit est conservé à la bibliothèque universitaire de Bologne[32]. C'est un recueil de récréations mathématiques et de casse-tête ; le baguenaudier y est décrit avec des explications précises pour sa résolution, mais il n'y a pas d'illustration. Le troisième auteur européen qui a décrit le baguenaudier est le mathématicien anglais John Wallis (1616-1703). Dans son *Treatise of algebra* (Londres, 1685), il consacre six pages à la description mathématique de ce casse-tête qu'il nomme « De Complicatis Annulis ». C'est le premier ouvrage qui décrit le baguenaudier rigoureusement et mathématiquement, avec de nombreuses illustrations *(Fig. 15)*, sans mentionner la numération binaire qui sera établie quelques années plus tard par Leibniz.

Aspects mathématiques du baguenaudier

Le montage des anneaux sur la broche suit pas à pas le code binaire réfléchi (ou code de Gray) ; par exemple, pour un baguenaudier dont les 8 anneaux sont sortis de la broche, le nombre binaire associé, dans le code de Gray, est égal à « 00000000 ». Quand ces 8 anneaux sont montés, ce nombre binaire devient « 11111111 »[33]. Cette dernière valeur correspond à « 10101010 » en binaire naturel dont l'équivalent décimal est égal à 170 *(Encadré)*. On a alors le nombre théorique de coups pour « monter » ou « démonter » un baguenaudier de 8 anneaux. Pratiquement, les deux premiers anneaux peuvent souvent être manœuvrés en même temps, alors la marche du baguenaudier est plus rapide *(Fig. 14)*.

À partir de ces concordances binaire naturel-binaire réfléchi-décimal, on peut calculer préalablement le nombre de coups par des relations mathématiques simples *(Encadré)*. Si on est face à un défi pour démonter un baguenaudier qui a « beaucoup » d'anneaux, il vaudrait mieux renoncer en calculant le nombre de manœuvres afin d'évaluer préalablement la durée de cette activité récréative !

Les brevets d'invention

Le baguenaudier est un casse-tête du domaine public, pourtant plusieurs dizaines de brevets d'invention ont été déposés au XX^e siècle à son sujet dans plusieurs pays : Canada, Espagne, États-Unis, France, Japon, Royaume-Uni, Suisse et probablement dans quelques autres. Certaines inventions concernent simplement des techniques

31– Édouard Lucas, *Récréations mathématiques*, I, Paris, 1882, p. 165.

32– L'ouvrage a été publié en 1997 : Luca Pacioli, *De viribus quantitatis*, transcrit par Maria Garlaschi Peirani, éd. Augusto Marinoni, Milan, Ente Raccolta Vinciana, 1997. Le problème CVII, « Do cavare et mettere una strenghetta salda in al quanti anelli saldi, difficil caso », se rapporte au baguenaudier (avec 7 anneaux).

33– La correspondance entre le baguenaudier et le code binaire réfléchi fut établie par Louis Gros en 1872 (voir plus haut).

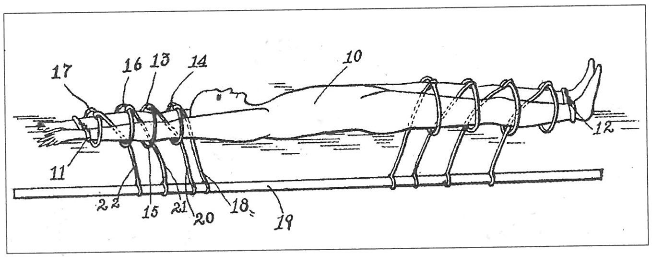


Fig. 16 – Extrait du brevet US1625452.

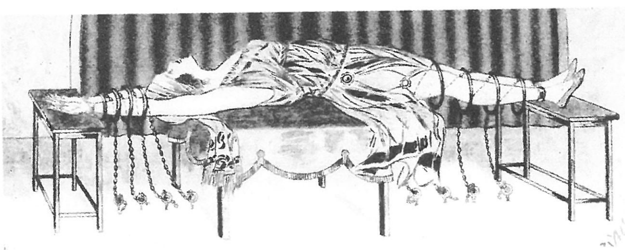


Fig. 17 – Spectacle de « magie ». Extrait du périodique Science and Invention 1927.

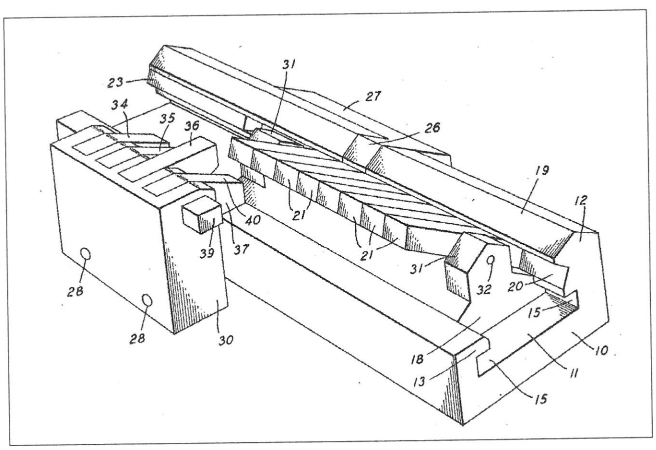


Fig. 18 – Extrait du brevet US3637215.

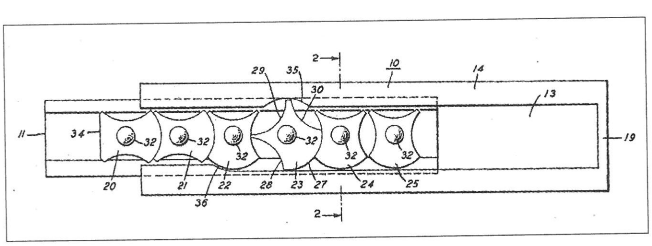


Fig. 19 – Extrait du brevet US3637216.

de fabrication à partir du jeu classique et n'apportent pas de nouveautés ludiques. En revanche, d'autres inventeurs proposent des variations intéressantes, parfois curieuses, qui ont conduit à de nouveaux jeux dont certains ont obtenu un remarquable succès commercial. En voici quelques exemples dans l'ordre chronologique des « dates de priorité », c'est-à-dire des dates d'enregistrement avant publication.

– 1913, *Puzzle*, William T. Rutledge, US1091709

Dans cette variante du baguenaudier, les anneaux sont fixes et maintenus sur un support rigide ; un cordon s'entremêle entre eux à la manière de la broche du jeu classique. C'est un jeu qui est toujours commercialisé, et il est décrit dans la plupart des ouvrages [34] concernant les casse-tête.

– 1926, *Escape Trick Device*, Theodore P. Brunner, US1625452

Cette curieuse invention concerne l'utilisation du baguenaudier dans de singuliers spectacles. La première figure du brevet montre parfaitement l'objectif de l'invention *(Fig. 16)*. Il s'agit d'allonger une personne sur des chaises ou des tables, et de l'insérer dans un baguenaudier à taille humaine, ensuite un magicien la libère par de mystérieuses manipulations des anneaux qui vont et viennent entre ses bras puis entre ses jambes. On pourrait penser à une farce, mais non ! Ce genre de spectacle a bien existé aux États-Unis. Il a été évoqué dans le périodique scientifique américain, *Science and Invention* [35] qui montre une jeune femme, allongée sur trois tables, et enfermée dans les anneaux d'un baguenaudier *(Fig. 17)*. L'auteur de cet article explique comment libérer la prisonnière des anneaux à partir d'une série de croquis. Martin Gardner n'a pas manqué de repérer cette application bien singulière du code binaire [36] !

– 1970 (11 December), Locking Disc Puzzle, William Keister, US3637215

– 1970 (22 December),Pattern-Matching Puzzle, William Keister, US3637216

William Keister (1907-1997) était un spécialiste du calcul binaire et de la communication téléphonique dans les laboratoires Bell. Il a entrepris la fabrication d'un système électronique pour résoudre le baguenaudier, mais devant des difficultés imprévues, il a découvert que le célèbre casse-tête séculaire n'était qu'un aspect de jeux que l'on pourrait concevoir à partir du calcul binaire. Ainsi, il a inventé et breveté deux casse-tête qui sont des variantes du baguenaudier, le premier, *Locking Dis Puzzle (Fig. 18)*, fut commercialisé sous le nom de « *Hexadecimal* », le second, *Pattern-Matching Puzzle (Fig. 19)*, sous le nom de « Spin-out ». Ce dernier a

34– Par exemple, Peter van Delft et Jack Botermans, *1000 casse-tête du monde entier*, Paris, Le Chêne, 1977, « L'escalier », p. 152.

35– Anonyme, « Marvelous escape trick », *Science and Invention*, n° 5, septembre 1927, p. 397.

36– Martin Gardner, « The Binary Gray Code », dans *Knotted doughnuts and other mathematical entertainments*, New York, W.H. Freeman, 1986, p. 11-27.

beaucoup de succès et il est décrit par de nombreux auteurs, par exemple par Jean-Paul Delahaye dans l'un de ses ouvrages [37].

– 1977, La clef prisonnière, Michel Reusse, FR2411587

L'inventeur reprend l'idée de la fermeture des coffres avec un baguenaudier qui aurait été pratiquée en Norvège, mais les preuves se font attendre... Dans ce système, la clef du coffre est solidaire de la broche, celle-ci doit donc être séparée des anneaux pour libérer la clef. Heureusement pour les utilisateurs de ce dispositif de sécurité : il n'y a que trois anneaux !

– 1982, Chinese ring puzzle, Stephen Edward Wise, GB2114009

La seule particularité de cette invention est le nombre important d'anneaux, égal à 13. Il faudrait 5461 manœuvres pour séparer les anneaux de la broche *(Encadré)*. Si l'on compte 3 secondes pour déplacer un anneau, il faudra plus de 4 heures pour défaire le baguenaudier, et autant pour le remonter ! Est-il bien raisonnable de s'engager dans une telle entreprise à moins de participer à un concours ?

CONCLUSION

La Tour d'Hanoï, un jeu d'enfant conçu par un mathématicien, séduit également les laboratoires de psychologie. En 1979, Jean-François Richard, mathématicien et psychologue, a organisé une série de tests auprès de 1459 enfants de 7 ans, issus de 66 cours préparatoires à partir d'une Tour d'Hanoï à trois tiges et trois disques. Les résultats ont été réunis sur des graphes en forme de triangle *(Fig. 13)*, ce qui a permis aux chercheurs de noter tous les chemins choisis par les enfants pour la manœuvre des disques. Voici quelques lignes du résumé de la publication [38] relative à cette enquête sociologique :

> Le problème de la tour de Hanoï a été proposé à un échantillon important d'enfants de 7 ans en vue de déterminer quelles sont les capacités de planification et plus généralement d'organisation de l'action à cet âge. ... La conclusion est que la planification n'intervient que dans une phase assez tardive de la résolution et correspond à une transformation de la représentation du problème, motivée par l'échec des règles suscitées par les premières représentations du problème aboutissant à la prise en compte d'aspects critiques de la situation négligés jusque-là. La première forme de planification qui apparaît alors est de type progressif.

Cette étude, montrant l'intérêt de la Tour d'Hanoï en psychologie cognitive, aboutit à des conclusions

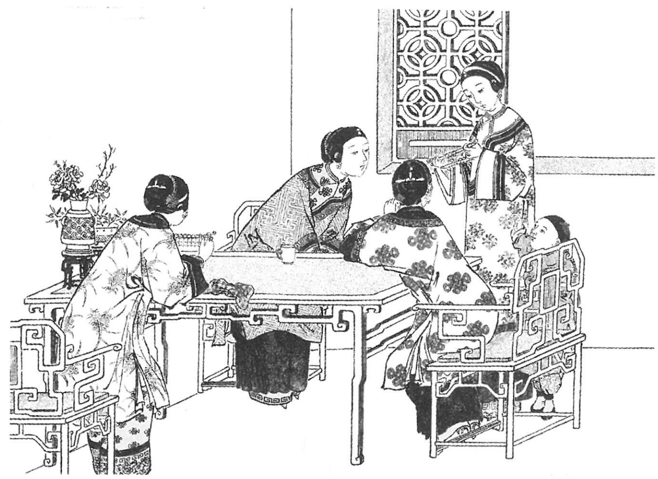


Fig. 20 – Illustration chinoise de Yu Youru (fin XIXᵉ siècle).

qui sont certainement toujours d'actualité. Dans un ouvrage récent [39] au sujet de l'intelligence requise pour travailler chez Google, où la connaissance du code de Gray est indispensable, la Tour d'Hanoï serait parfois utilisée comme test de sélection. Ce casse-tête « simple » serait donc l'un des supports pertinents pour élaborer des algorithmes « recyclés sous forme de jeu vidéo ». Depuis son invention en 1882, de nombreux mathématiciens ont étudié la tour d'Hanoï, ils ont organisé des colloques à son sujet [40], publié des ouvrages et des centaines d'articles dans de nombreux pays.

Le baguenaudier est aussi l'un des casse-tête bien connu dans l'univers des mathématiques, notamment par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP). Par exemple, pour les Olympiades 2015, l'académie de Créteil a proposé un sujet sur un baguenaudier à sept anneaux [41]. Depuis la fin du XIXᵉ siècle, le baguenaudier s'est diffusé en Europe par le biais des ouvrages sur les jeux, les puzzles, les récréations mathématiques. Cependant, il semblerait que ce jeu soit peu présent dans les œuvres d'art ou la littérature, bien qu'il soit très ancien. Cependant, le

---

37– Jean-Paul DELAHAYE, « Jeu du voyageur et baguenaudier », dans *Jeux mathématiques et mathématiques des jeux*, Paris, Bibliothèque Pour la Science, 1998, p. 83-91.

38– Jean-François RICHARD, « Planification et organisation des actions dans la résolution du problème de la tour de Hanoï par des enfants de 7 ans », *L'année psychologique*, n° 2, vol. 82, 1982, p. 307-336.

39– William POUNDSTONE, « Êtes-vous assez intelligent pour travailler chez Google ? », Paris, Jean-Claude Lattès, 2013.

40– La « Tour d'Hanoï », un casse-tête mathématique d'Édouard Lucas (1842-1891), 5-8 février 2009, Institut Henri Poincaré, Paris.

41– Paul-Louis HENNEQUIN (dir.), Jean BARBIER (éd.), *Les Olympiades académiques de mathématiques 2015*, Créteil, APMEP, 2015, Sujet pour l'Académie de Créteil : Le baguenaudier, p. 69-71.

catalogue d'une exposition de 2008 à San Francisco[42] mentionne quelques références du baguenaudier dans la littérature chinoise, et reproduit une illustration de l'artiste chinois Wu Youru (1840-1893) montrant quatre femmes jouant au baguenaudier *(Fig. 20)*.

La tour d'Hanoï et le baguenaudier ont toujours passionné les auteurs de mathématiques récréatives : Édouard Lucas, Maurice Kraitchik, André Sainte-Laguë, Henry Ernest Dudeney, Martin Gardner, Jean-Paul Delahaye, et d'autres. Très souvent, ces auteurs communiquent des sources inédites et proposent de surprenantes variations, tel H. E. Dudeney (1847-1930) qui a « inventé » une tour d'Hanoï à quatre tiges, appelée *The Reve's Puzzle,* et l'a présentée au début de son ouvrage *The Canterbury Puzzles*[43]. Dudeney commence par une référence à l'écrivain anglais du XIVe siècle Geoffrey Chaucer, qui est l'auteur des célèbres contes de Canterbury (*Canterbury Tales*), puis il raconte qu'un homme, nommé Reve, « rusé et quelque peu érudit », a proposé un jeu bien curieux avec des fromages posés sur des tabourets installés côte à côte sur une ligne. Il prend huit fromages de tailles différentes et il les pose les uns sur les autres du plus grand au plus petit sur un tabouret d'extrémité. Alors, Reve demande à une personne de transposer les huit fromages sur le tabouret opposé selon des règles très précises : un seul fromage doit être déplacé par mouvement et un fromage ne doit pas être posé sur un plus petit que lui. Les deux tabourets intermédiaires sont bien sûr indispensables au respect des règles de transfert. Dès que les huit fromages sont déplacés, Reve propose le même jeu avec dix fromages puis vingt et un ! Dudeney donne des solutions à ses problèmes de fromages en fin de livre. ■

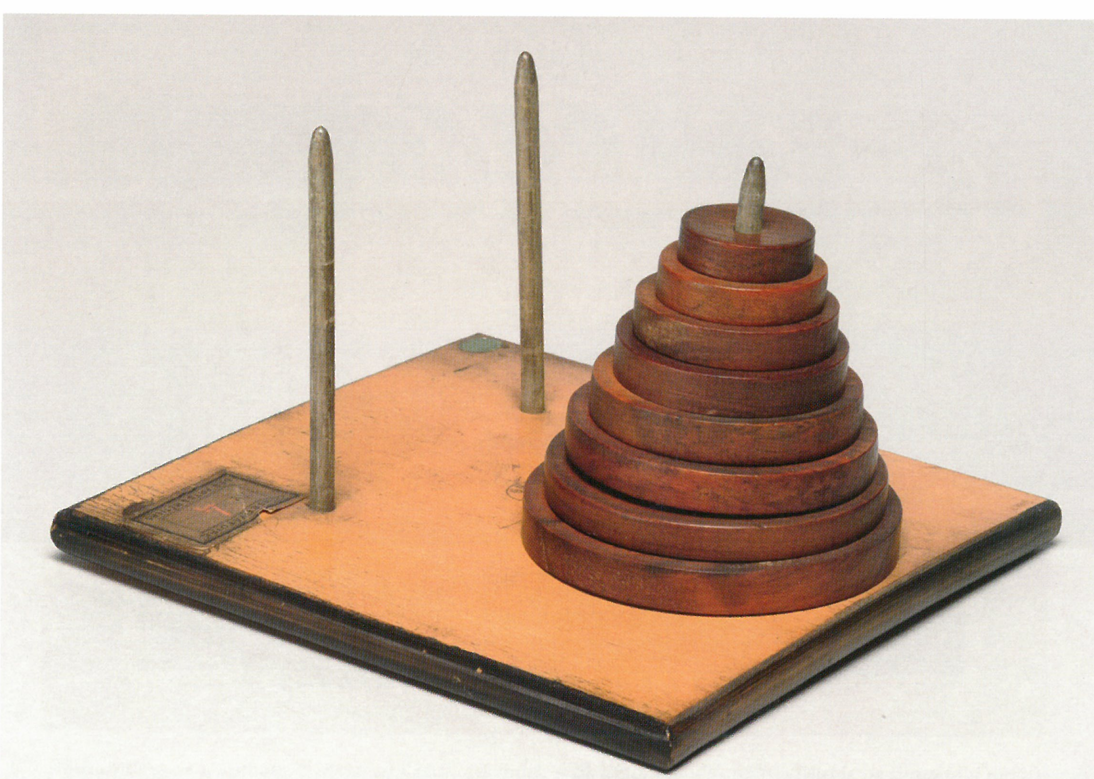
(À suivre.)

Remerciements

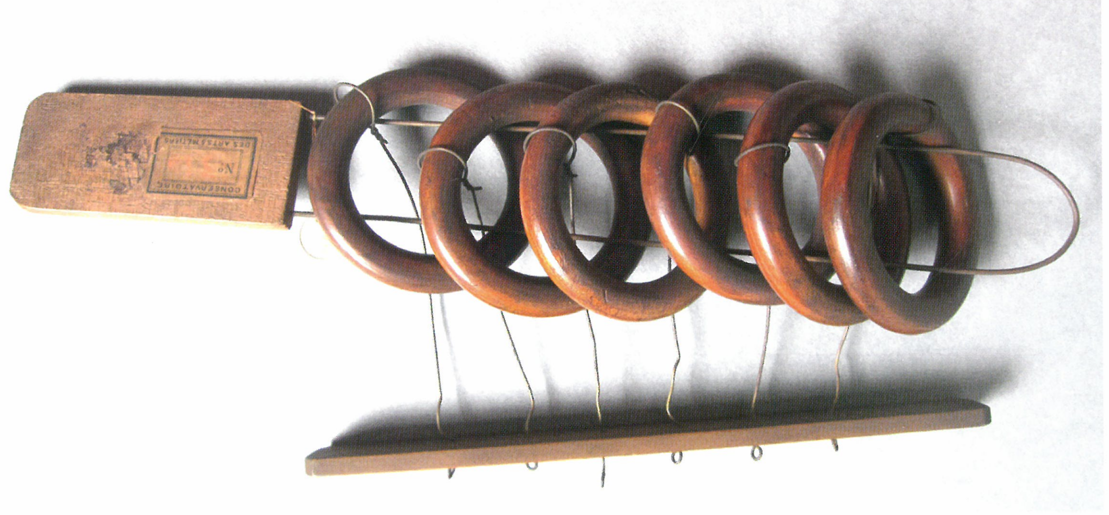
Bertille Boutin, CNAM (Frédérique Desvergnes, Cyrille Foasso, Cécile Formaglio), Thierry Depaulis, Francis Lucas, Jean-Pascal Gonnord.

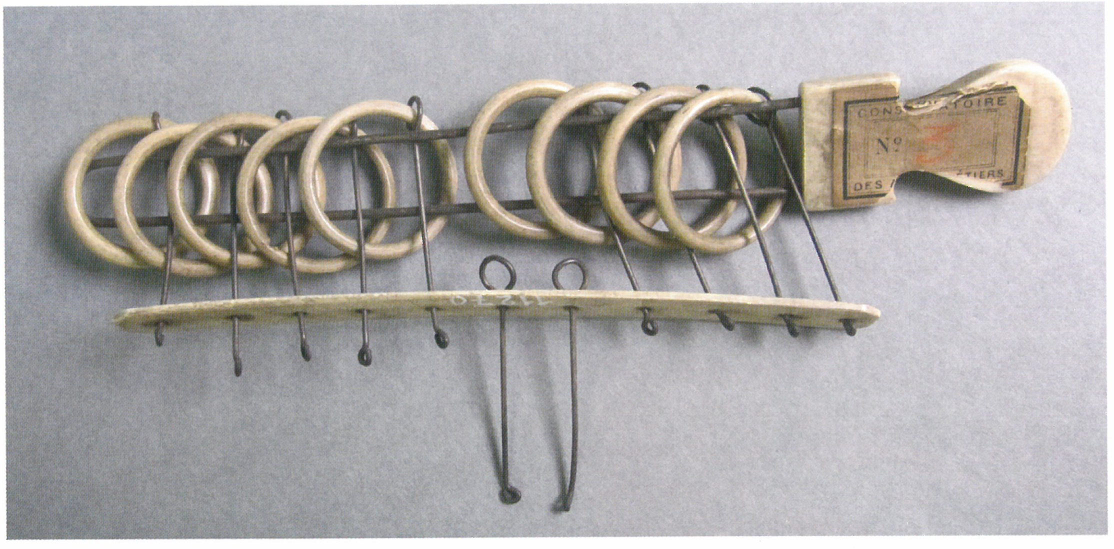
42– Wei Zhang et Peter Rasmussen (éd.), *Chinese puzzles : games for the hands and mind*, San Francisco, Chinese Culture Center of San Francisco, 2008, p. 28-33.

43– Henry Ernest Dudeney, « 1-The Reve's Puzzle », *The Canterbury Puzzles*, New York, Dover, 1958, p. 24-25 (1re édition, 1919).



a) Boîte de la Tour d'Hanoï. – b) La Tour d'Hanoï sortie de la boîte, et installée.
(© Musée des arts et métiers, Cnam, Paris / Photo Michèle Favareille)





a) Baguenaudier bois six anneaux. – b) Baguenaudier ivoire onze anneaux.
(Musée des arts et métiers, Cnam, Paris / Photo MB)