# COMPTES RENDUS

DES SÉANCES.

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

SÉANCE DU LUNDI 4 SEPTEMBRE 1876.

PRÉSIDENCE DE M. LE VICE-AMIRAL PÂRIS.


## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

### ANALYSE. — *Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli* et *d'Euler ;*


par M. **E. LUCAS**.


« **1.** Si l'on fait

$$f(x+1) - f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n ,$$

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (x-1)^n ,$$

on obtient, en remplaçant successivement $x$ par 1, 2, 3, ... $(x-1)$ dans la première équation, et en ajoutant la formule symbolique

$$f(x) - f(1) = f(S+1) - f(S), \tag{1}$$

dans laquelle on remplacera, après le développement du second membre, les exposants de S par des indices, et S, par $x-1$.

« **2.** On peut poser, symboliquement, la formule

$$nS_{n-1} = (x+B)^n - B^n , \tag{2}$$

dans laquelle on remplacera, après le développement du second membre, les exposants de B par des indices, et $B_0$ par 1. Les coefficients B représentent, avec une légère modification de l'indice, les nombres de Bernoulli. On voit d'ailleurs immédiatement, au moyen de la formule (1), qu'ils ne varient pas lorsque l'on augmente l'indice de S d'une unité.

« **3.** Si, dans la formule (2), on remplace $x$ par $x+1$, on obtient l'identité

$$nx^{n-1} = (x+B+1)^n - (x+B)^n , \tag{3}$$

et, par suite, plus généralement, l'identité

$$f'(x) = f(x + B + 1) - f(x + B) , \tag{4}$$

dans laquelle *f* désigne une fonction quelconque. En faisant successivement *x égal à* 0, ±1, ±2, ±½, dans la formule (3), on retrouve sans exception, toutes les relations connues servant au calcul des nombres de Bernoulli. En remplaçant dans l'équation (4)la fonction *f* par chacune des fonctions dont la différence est simple, comme la factorielle, l'exponentielle, le sinus, etc., on trouve toutes les formules dont le développement contient les nombres de Bernoulli, et beaucoup d'autres formules nouvelles.

**4.** En désignant par $\Delta x$ la différence d'une fonction pour l'accroissement de *x* égal à l'unité, la relation (4) peut s'écrire, par l'introduction d'une autre variables sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}f(x, y)}{\mathrm{d}x} = \Delta_x f(x + B, y) ,$$

et, en appliquant -cette formule à la fonction $\Delta x f(x,y)$, on a de même

$$\frac{\mathrm{d}^2(x, y)}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \Delta^2_{x,y} f(x + B, y + B') ,$$

et encore

$$\frac{\mathrm{d}^3 f(x, y, z)}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} \Delta^3_{x,y,z} f(x + B, y + B', z + B'') . \tag{5}$$

« Dans le développement symbolique du second membre, on ne doit pas réduire les B avec les B' et avec les B'' ; mais ces formules donnent des relations entre les produits deux à deux, trois à trois, etc., des nombres de Bernoulli. La formule de M. Le Paige, donnée dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique,* mai 1876, s'obtient en supposant simplement

$$f(x,y) = x^m y^m .$$

**5.** La formule (1), peut aussi être généralisée, et l'on a ainsi, pour la fonction $f(x, y, z)$, la formule

$$\Delta^3_{x=x,y=y,z=z} f(0,0,0) = \Delta^3_{s=1,s'=1,s''=1} f(\mathrm{S},\mathrm{S}',\mathrm{S}'') \tag{6}$$

« On peut aussi exprimer les produits $\mathrm{B}_m\mathrm{B}_n\mathrm{B}_p$ et $\mathrm{S}_m\mathrm{S}_n\mathrm{S}_p$ en fonction linéaire des B et des S ; en retrouvera ainsi comme cas particulier la formule

$$2\mathrm{S}_3^2 = \mathrm{S}_7 + \mathrm{S}_5$$

indiquée par Jacobi (*Lettre de Schumacher à Gauss,* en date du 12 avril 1847), et l'on pourra en trouver une série indéfinie d'autres semblables.

« **6.** Les nombres analogues à ceux de Bernoulli, considérés par Euler, et par MM. Sylvester et Catalan (*Comptes rendus,* t. LII, p. 161; t. LIV, p. 1033) donnent lieu aux mêmes développements. Si l'on pose

$$\mathrm{P}_n = 2(2^n - 1)\mathrm{B}_n$$

et

$$\sigma_n = 1^n - 2^n + 3^n - 4^n + \ldots + (2x - 1)^n ,$$

on déduit, en changeant x en $\frac{x}{2}$ dans la formule (2), et en retranchant,

$$2n\sigma_{n-1} = P^n - (2x + P)^n,$$

en ayant soin de remplacer $P_0$ par 0. Les fonctions $\sigma_n$ jouissent de propriétés curieuses, analogues à celles des fonctions $S_n$ (BERTRAND, *Calcul différentiel,* t. I, p. 352). On trouve aisément, pour les P et les $\sigma$, des formules semblables aux formules (5) et (6), et, par suite, une démonstration immédiate de cette propriété connue, que les nombres P sont entiers. On a encore, pour le nombre premier $p$, la congruence

$$nP_{n+p-1} \equiv (n-1)P_n \pmod{p},$$

et un grand nombre d'autres qui permettent d'appliquer le calcul de ces nombres à la recherche des grands nombres premiers. »

C.R., 1876, 2e *Semestre*, (T. 83, N° 10), — pages 539 et 541 —