APPLICATION

DE L'ARITHMÉTIQUE

A LA CONSTRUCTION DE L'ARMURE

DES SATINS REGULIERS

PAR

EDOUARD LUCAS

Ancien Élève de l'École normale supérieure
Agrégé de l'Université,
Astronome - Adjoint à l'Observatoire de Paris.

PARIS

GUSTAVE RETAUX, Libraire-Éditeur

RUE CUJAS, 15

NOVEMBRE 1867

A MON AMI

M. ALPHONSE FIQUET

APPLICATION DE L'ARITHMETIQUE

A LA CONSTRUCTION DE L'ARMURE

DES SATINS RÉGULIERS

Le Bulletin de la *Société industrielle d'Amiens* (janvier 1867), contient sur le pointé de l'armure des satins réguliers, un travail remarquable et entièrement original de M. Edouard GAND, professeur de tissage. Je me propose de traiter la même question au point de vue le plus abstrait et de donner des démonstrations simples et toujours rigoureuses des règles à suivre pour la construction de tous les satins réguliers possibles. Je renvoie du reste le lecteur au mémoire cité pour y voir l'utilité et l'application de ces recherches.

Le point de départ de M. Gand est celui-ci :

« Dans toute armure fondamentale : – Toile, Batavia, Sergé, Satin régulier, – le rapport longitudinal contient autant de duites que le rapport transversal exige de fils de chaîne, c'est-à-dire que, dans tout papier quadrillé destiné à une armure fondamentale donnée, il y aura toujours autant de cases sur la hauteur de la mise en carte que de cases sur la largeur de cette mise en carte. »

Dès lors, le problème général de la construction de l'armure du satin régulier revient à placer dans les cases d'un échiquier carré de p^2 cases, p pions tels que deux d'entre eux ne se trouvent pas dans la même rangée horizontale ou verticale, et de telle sorte que, par rapport à un quelconque de ces pions (en supposant l'échiquier indéfiniment répété dans tous les sens), les autres pions, soient toujours placés de la même façon. L'aspect général du dessin est alors le même partout.

J'appelle module du satin le nombre p, et je considère le cas ou le module est un nombre premier absolu et le cas où le module est un nombre composé[1]

---

[1] Cette division est plus naturelle que la division en satins *pairs* et satins *impairs*

Dans ce qui va suivre je m'appuierai sur ce principe bien connu, et dû à *Euclide :* Si un nombre donné divise le produit de deux autres nombres et se trouve premier avec l'un d'eux il divise nécessairement l'autre.

§ I. – SATINS A MODULE PREMIER.

PROPRIETE DE LA PROGRESSION ARITHMETIQUE. – Soit a un nombre plus petit que p; considérons la progression :

$$a, \quad 2a, \quad 3a, \quad \ldots, \quad (p-1)a, \quad pa$$

les restes de la division de chacun de ses termes par p sont tous différents. Si en effet deux termes ma et na divisés par p donnaient le même reste, leur différence $(m\text{-}n)a$ serait divisible par p ; donc p, premier avec a, diviserait le nombre $m\text{-}n$ qui est plus petit que lui ; ce qui est inadmissible.

PROPRIETE DES NOMBRES ASSOCIES. – Un seul des termes de la progression divisé par p donne pour reste l'unité; soit aa' ce terme ; on dit que les nombres a et a' sont associés suivant le module p. On voit, du reste, que pour ce module un nombre n'a qu'un seul associé.

Un nombre a ne peut être égal à son associé que si p divise $a^2 - 1$ qui est le produit des facteurs $a - l$ et $a + l$; donc p doit diviser l'un de ces facteurs et par suite $a = 1$ ou $a = p - 4$.

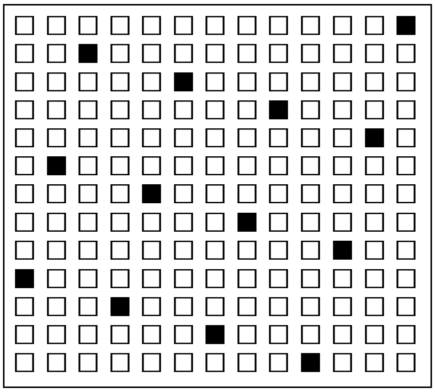
DEFINITION DU SATIN $[1, a]$. – Plaçons un pion dans la case appartenant à la colonne 1 et à la ligne a[1]; puis un autre dans la colonne 2 et la ligne $2a$, et ainsi de suite, en supprimant chaque fois les multiples de p : nous plaçons ainsi p pions jouissant de la propriété énoncée. Nous désignerons le satin obtenu par $[1, a]$, de module p, ou plus simplement satin a, et nous appellerons base le nombre a.

Si, par exemple, on suppose a = 4, $p = 13$, on obtient la figure I.

Lorsque a = 1 ou a = $p - 1$, les pions se trouvent rangés en diagonale, et la figure formée représente l'armure de la *toile.*

[1] Nous désignerons plus spécialement la rangée verticale par le mot *colonne* et la rangée horizontale par le mot *ligne*.

Fig. 1.



Le procédé que nous employons nous donne donc $p - 3$ satins ; nous verrons tout-à-l'heure qu'ils ne sont pas tous distincts et qu'il n'en existe pas d'autres.

DEFINITION DU SATIN [n, m]. – Au lieu de placer les pions à l'aide d'une seule progression arithmétique, on aurait pu considérer les deux progressions :

$$n,\ 2n,\ 3n,\ \ldots\ pn$$
$$m,\ 2m,\ 3m,\ \ldots\ pm$$

On placerait le premier pion dans la case de colonne n et de ligne m, le second dans la case de colonne $2n$ et de ligne $2m$, et ainsi de suite, en supprimant, les multiples de p. Soit n' le nombre associé de n : le terme de la seconde progression correspondant an terme nn' ou 1 de la première est mn' ; le terme de la seconde correspondant au terme $2nn'$ ou 2 de la première est $2mn'$, et ainsi de suite. Donc le système des deux progressions ci-dessus peut se remplacer par le système des deux suivantes :

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ p$$
$$mn',\ 2mn',\ 3mn',\ \ldots\ pmn'$$

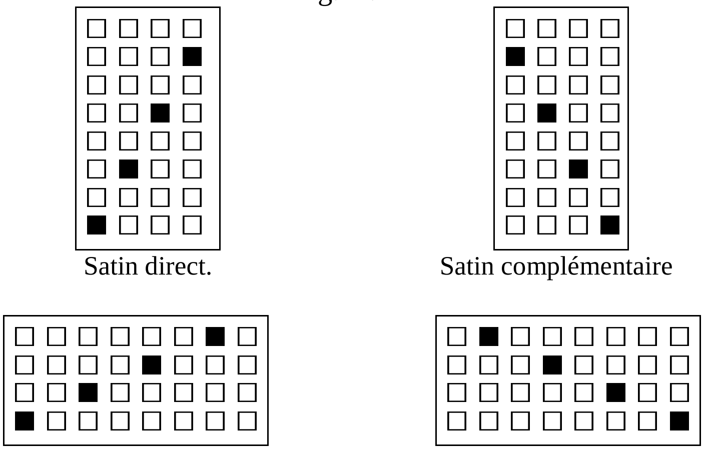
d'où on déduit évidemment réalité :

$$\text{Satin}\ [n, m] = \text{Satin}\ [1, mn'].$$

Il suffit donc de considérer les satins procédant par colonnes consécutives.

DES SATINS COMPLEMENTAIRES. – Deux satins *a* et *b* de module *p* sont dits *complémentaires* lorsqu'il existe entre *a* et *b* la relation $a + b = p$. Il est facile de voir que ces deux satins ne donnent point de dessins différents. En effet, pour obtenir le premier, on place les pions en procédant par colonnes consécutives dans les cases dont le rang s'élève constamment de *a* ; pour obtenir le second, dans les cases dont le rang s'élève de $p – a$, c'est à dire dont le rang s'abaisse constamment de *a* ; les deux satins ne diffèrent donc que par des directions opposées à la verticale.

Fig. 2.



Satin direct. Satin complémentaire

Satin associé. Satin associé complémentaire.

DES SATINS ASSOCIES. – Deux satins *a* et *a'* de module *p* sont dits *associés*, lorsque les nombres *a* et *a'* sont associés suivant le module *p*. Nous avons vu que l'on a :

Satin [1, *a*]= *Satin* [*a'*, *aa'*].

et par suite. puisque *aa'* divisé par *p*. donne pour reste 1 :

Satin [1, *a*]= *Satin* [*a'*, 1].

Pour construire le satin [*a'*, 1], on procéderait comme pour le satin [1, *a'*], en considérant les lignes comme des colonnes et les colonnes comme des lignes ; le satin [1, *a'*]est donc symétrique du satin [*a'*, 1], c'est-à-dire du satin [1, *a*], par rapport à la diagonale allant de la case [1, 1] à la case [*p*, *p*].

La figure 2 montre comment une case marquée se déduit de la voisine.

THEOREME. – Les satins complémentaires de deux satins associés sont eux-mêmes associés.

En effet. si le produit *aa'* divisé par *p* donne pour reste 1. le produit $(p-a)(p-a')$ divisé par *p* donnera aussi pour reste 1

Nous avons donc ainsi étudié toutes les directions par lesquelles une case marquée se déduit de sa voisine par colonne ou par lignes consécutives ; nous pouvons donc affirmer que *si deux satins de même module ne sont ni associés ni complémentaires, ils sont nécessairement distincts.*

Ainsi pour le module 13 :

les satins 2 et	11	sont	complémentaires, car :	2 + 11 = 13
7 et	6	—	—	7 + 6 = 13
2 et	7	—	associés	2 x 7 = 13 + 1
11 et	6	—	—	6 x 11= 5 x 13 + 1

DU SATIN CARRÉ.

Après avoir ainsi comparé deux satins entre eux, nous pouvons voir si un satin *a* de module *p* peut être à lui-même son associé, ou l'associé de son complémentaire. Mais nous avons vu qu'un nombre ne peut être égal à son associé suivant un module premier; il reste à étudier s'il peut être l'associé de son complémentaire. La condition nécessaire et suffisante est que *a (p - a)* divisé par *p* donne pour reste 1; ou plus simplement, que *a'+ 1* soit un multiple de *p*. Avant de chercher quelles sont les valeurs de a qui pour un nombre premier donné p rendent $a^2 + 1$ divisible par *p*, considérons la forme du dessin produit.

D'une case marquée quelconque, on pourra déduire les voisines à l'aide du procédé complémentaire et du procédé associé.

Fig. 3..

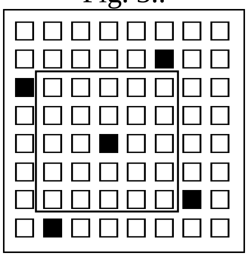
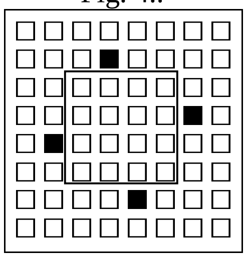


Fig. 4..



Ainsi, dans le cas du satin [2, 3], on construit la figure 3. Une case marquée quelconque est au centre d'un carré et quatre autres sont disposées symétriquement autour de la première. On formera ainsi la figure 4. Entre quatre cases marquées voisines on peut inscrire un carré, et ces quatre cases sont disposées de la même façon par rapport aux sommets du carré ; les centres de ces cases sont elles mêmes les sommets d'un autre carré.

En raison de ces diverses propriétés, le satin obtenu est dit *Satin carré.* Voyons maintenant quelles sont, pour un module donné p, les valeurs de a qui donnent des satins carrés.

Pour arriver très-simplement au but que nous nous proposons, nous nous appuierons sur un théorème des plus célèbres en arithmétique, et qui porte le nom de *Théorème de Fermat.* En voici l'énoncé : Si p est un nombre premier absolu, et a un nombre premier avec p, $a^{p-1} - 1$ est divisible par p.

En effet, les nombres a, $2\,a$, $3\,a$, …, $(p - 1)\,a$, divisés par p, donnent tous des restes différents b_1, b_2, b_3, ... b_{p-1} :

$$i\,a = \textit{Multiple} \text{ de } p + b_i$$

et en multipliant toutes les égalités obtenues ainsi en faisant varier i de 1 *à* $p - 1$, on a :

$$1.\,2\,.\,3.\,.\,.\,(p-1)\,a^{p-1} = \textit{Multiple de } p + 1.\,2\,.3\,.\,.\,.\,.\,(p-1)$$

Et puisque p est premier, on a simplement :

$$a^{p-1} = \textit{Multiple} \text{ de } p + 1\,.$$

C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

THEOREME. – Les diviseurs impairs de $a^2 + 1$ divisés par 4 donnent nécessairement pour reste 1.

Si on supposait en effet, $p = 4q + 3$, où q est un nombre entier, on aurait par hypothèse :

$$a^2 = -1 + \textit{Multiple} \text{ de } p.$$

Elevons les deux membres de cette égalité à la puissance $\dfrac{p-1}{2} = 2q + 1$

$$a^{p-1} = (-1)^{2q+1} + \textit{Multiple} \text{ de } p.$$

ou bien $$a^{p-1} = -1 + \textit{Multiple} \text{ de } p.$$

Mais, d'après le théorème de Fermat :

$$a^{p-1} = 1 + \textit{Multiple} \text{ de } p.$$

On aurait donc en retranchant

$$2 = \textit{Multiple} \text{ de } p.$$

ce qui est impossible, Donc pour que $a^2 + 1$ puisse être divisible par *p*, le reste de la division de *p* par 4 doit être 1 et non 3.

De plus, il ne peur y avoir qu'une seule valeur de *a* comprise entre 0 et $\frac{p-1}{2}$ qui rende $a^2 + 1$ divisible, par *p* ; car si on avait :

$$a^2 + 1 = \text{Multiple de } p.$$
$$a'^2 - 1 = \textit{Multiple} \text{ de } p.$$

on en conclurait, par différence

$$a \pm a' = \textit{Multiple} \text{ de } p.$$

ce qui est impossible,

D'où on déduit seulement deux valeurs *a* et $p - a$ comprises entre 0 et *p* qui rendent $a^2 + 1$ divisible par *p*.

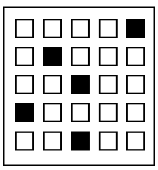
Donc pour qu'un satin de module donné *p* puisse être carré, il faut que $p - 1$ soit divisible par 4 ; et dans ce cas on n'obtient qu'un seul satin carré et son complémentaire. Exemples : $a = 2$, $p = 5$; $a = 8$, $p = 13$.

NOMBRE DE SATINS DISTINCTS DE MODULE DONNÉ.

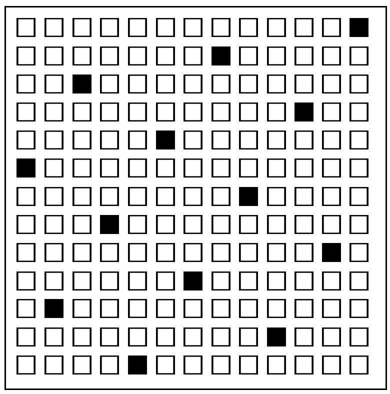
1° Si nous avons, $p = 4q + 3$, nous comptons $p - 3 = 4q$ satins en supprimant les cas $a = 1$ et $a = p - 1$ qui donnent l'armure de la toile mais ces satins se groupent tous 4 par 4 et d'une seule manière; nous avons donc *q* satins distincts.

Fig. 6.

Fig. 5.



Satin carré 2 de mod. 5



Satin carré 8 de mod. 13

2° Si nous avons $p = 4q + 1$, nous comptons $4q - 2$ satins, parmi lesquels $4q - 4$ se groupent tous 4 par 4 : ce qui nous donne $q - 1$ satins ;

les deux satins qui restent sont complémentaires et nécessairement carrés ; nous avons donc encore q satins distincts.

RÈGLE GENERALE – On prend tous les nombres inférieurs à la moitié du module donné supposé premier, et on les groupe deux à deux de sorte que le le produit des deux nombres d'un groupe augmenté on diminué de 1 soit divisible par p ; dans le l^{er}, cas les nombres sont associés, dans le second cas associés au complément ; et on ne conserve que le plus petit nombre des deux groupes ; si un des nombres employés reste seul, il donnera un satin carré.

Les satins obtenus sont tous distincts, et il n'y a en pas d'autres.

EXEMPLES. – Ainsi le module 5 = 1.4 +1 donne 1 satin et un seul, le satin de 2 et ce satin est carré ; – le module 7 = 1.4 + 3 donne un seul satin, le satin de 2, et il n'est pas carré ; – le module 13 = 3.4 + 1 donne seulement 3 satins distincts dont un carré : ceux de 2, de 3 et de 5. Soit enfin le module 29, nous prenons les treize nombres :

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

et nous les groupons comme il suit :

2	3	4	5	8	9	12
14	10	7	6	11	13	

Nous avons donc pour le module 29 les satins ordinaires 2, 3, 4, 5, 3. 9, et le satin carré 12.

§ II. – **SATINS A MODULE QUELCONQUE.**

Il suffit d'examiner les théorèmes exposés précédemment, et de voir ce qu'ils deviennent dans le cas d'un module quelconque k.

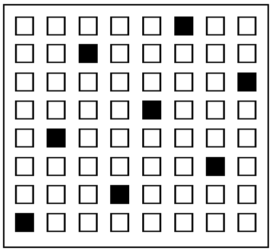
Là propriété de la progression arithmétique subsiste en prenant pour a un nombre inférieur à k et premier avec lui ; on voit aussi que si a est un nombre premier avec k, il en sera de même de son complémentaire $p - a$ et de son associé a'.

Par suite, les définitions et les propriétés du satin a, du satin [m, n], des satins complémentaires ou associés, du satin carré, sont conservées dans le cas d'un module quelconque, pourvu que l'on prenne pour a, m, n des nombres premiers avec k.

Nous avons cependant à signaler une exception importante qui nous conduira à. la connaissance d'un nouveau satin. Lorsque le module est premier, un nombre ne peut être égal à son associe : mais si le module k n’est, plus premier, il –peut se faite qu'un un nombre soit égal à son associé, et *alors* $a^2 - 1$ est divisible par k ; ainsi, par exemple, $5^2 - 1$ est divisible par 8 et par 12.

Dans ce cas, le satin est son propre associé, de sorte que d'une case marquée quelconque, on peu, déduire les voisines a l'aide du procédé direct et du procédé associé. La combinaison de ces deux procédés donne des cases marquées symétriques deux à deux par rapport aux diagonales d'une case marquée quelconque. Nous appellerons *satin symétrique* le satin qui jouit de ces propriétés (Fig. 7).

Fig. 7.



Il nous reste donc à étudier quelles sont les valeurs de a qui rendent $a^2 - 1$ et $a^2 + 1$divisibles par k ; les premières nous donneront les satins symétriques et les dernières les satins carrés. Nous remarquerons d'abord que ces valeurs de a sont distinctes dans les deux cas; car si une même valeur de a rendait $a^2 - 1$ et $a^2 + 1$ divisibles par k, il en serait de même, de leur différence 2, et nous supposons k égal ou supérieur à 5, sans cela nous ne pouvons avoir de satin ; donc un *satin symétrique n'est jamais un satin carré.*

Dans l'étude qui va suivre nous distinguerons trois cas.

PREMIER CAS. – Le module est une puissance d'un nombre premier impair : $k = p^\pi$

Alors il n’y a pas de satin symétrique puisque p^π divisant $a^2 - 1$, doit diviser l'un de ses deux facteurs $a - 1$ ou $a + 1$, qui ne peuvent avoir d'autre diviseur commun que leur différence 2 ; donc $a = 1$ ou $a = p^\pi - 1$; ce qui nous donne seulement l'armure de la toile.

D'autre part, il n'y a de satin carré que si p est un multiple de 4 augmenté de l’unité, ainsi que nous l’avons déjà prouvé, et si cette conditions est remplie, il n'y a qu'un satin carré et son complémentaire.

En effet, si $a^2 - 1$ et $b^2 + 1$ sont divisibles par p^π, il en sera de même de leur différence $a^2 - b^2$; donc p^π doit diviser l'un des facteurs $a - b$ ou $a + b$, qui n'ont d'autre diviseur commun que leur somme $2a$, nombre premier à p : donc on a nécessairement $a + b = p^\pi$ ou $a - b = 0$.

De la valeur de la base du satin carré de module p^π, on déduira aisément la valeur x de la base du satin carré de module $p^{\pi+1}$ à l'aide des considérations suivantes. On a :

Par hypothèse : $a^2 + 1 = l.\, p^\pi$ ou l est connu

Posons : $x = a + y.\, p^\pi$

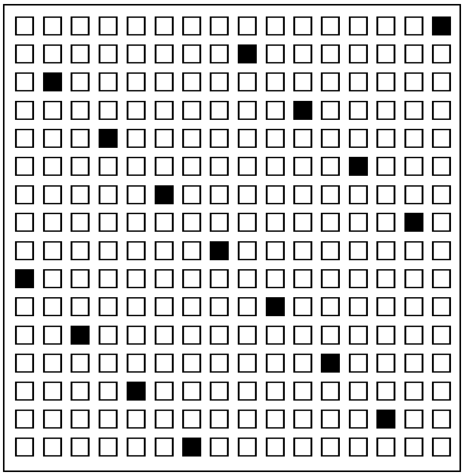
Nous aurons : $x^2 + 1 = (2\, a\, y + 1)\, p^\pi + y^2\, p^{2\pi}$

Donc pour que $x^2 + 1$ soit divisible par p^π **+** 1**,** il faut et il suffit que $2ay + 1$ soit divisible par p ; il sera alors facile de déterminer y au moyen de la propriété fondamentale de la progression arithmétique. Et alors x est déterminé.

DEUXIEME CAS. – Le module est une puissance de 2 : $k = 2^\pi$

Nous supposerons π égal ou supérieur à 3, car il n'existe pas de satin de module 2 ni de module 4.

Fig. 8.



Satin symétrique 7 de module 16

Alors il n'y a pas de satin carré, puisque a nombre impair étant égal à $4n \pm 1$, son carré $16\, n^2 \pm 8\, n + 1$ est un multiple de 8 + 1 ; donc $a^2 + 1$ ne saurait être un multiple de 8.

D'autre part, il n'y a que deux satins symétriques correspondant aux valeurs complémentaires $2^{\pi-1} - 1$ et $2^{\pi-1} + 1$. En effet 2^{π} doit diviser $a^2 - 1$, c'est à dire le produit des deux facteurs $a + 1$ et $a - 1$ dont le plus grand commun diviseur est leur différence 2 ; donc l'un de ces facteurs est divisible par $2^{\pi-1}$; on a donc nécessairement, puisque a est plus petit que $2^{\pi-1}$, $a + 1$ ou $a - 1$ égal à $2^{\pi-1}$ c'est ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, soit le module 16 ; nous aurons les satins symétriques complémentaires 7 et 9 et nous n'en aurons pas d'autres. (voir Fig. 8.)

TROISIEME CAS. – Le module est quelconque. Soit $P = A\,B\,C\;.\;\;.\;\;.$ ce module, A, B, C, ... étant des nombres premiers entre eux.

Nous résoudrons d'abord la question suivante. Trouver une valeur de x telle qu'elle satisfasse aux équations :

$$\left.\begin{array}{lll} x = & \textit{Multiple de} & A + A_0 \\ x = & \text{—} & B + B_0 \\ x = & \text{—} & C + C_0 \\ . & . \;\; . \;\; . \;\; . & . \;\; . \;\; . \end{array}\right\} \quad (1)$$

Pour cela, nous déterminerons facilement. à l'aide de la proposition fondamentale de la progression arithmétique, des nombres r, s, t, …satisfaisant aux condition :

$$\frac{P}{A} r = \textit{Mult. de} \quad A + 1$$

$$\frac{P}{B} s = \textit{Mult. de} \quad B + 1$$

$$. \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; .$$

On aura alors simplement :

$$x = r\frac{P}{A}A_0 + s\frac{P}{B}B_0 + \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; + Mult. de P.$$

Il n'existe, du reste, qu'une seule valeur de x comprise entre o et P qui satisfasse aux équations données; car la différence de deux valeurs de x doit être divisible par P, puisqu'elle l'est par A, B, C, . . . d'après la forme des équations données.

Désignons par X l'une des expressions $x^2 - 1$ ou $x^2 + 1$. Pour que le satin x de module P soit symétrique ou carré, il faut que X soit divisible par P et par suite séparément par A, B, C, ... Cela nous fournira les conditions d'existence de pareils satins. Nous voyons alors qu'il n'y aura pas de satin carré de module P si un des nombres A, B, C, ...

divisé par 4 donne pour reste 0 ou 3. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et désignons par A_0, B_0, C_0, ... des nombres qui rendent X respectivement divisibles par A, B, C, ... Ces nombres sont les bases de satins carrés ou symétriques de module A, B, C, ... en y ajoutant les valeurs 1 et $A - 1$, 1 et $B - 1$, ... dans le cas où X désigne $x^2 - 1$. Si nous déterminons x à l'aide des équations (1), nous obtiendrons pour x une des valeurs cherchées. Il est du reste facile de voir que nous les obtenons toutes par ce procédé. Le nombre de ces valeurs sera d'ailleurs égal au nombre des systèmes de valeurs de A_0, B_0, C_0, ...

NOMBRE DES SATINS CARRES DE MODULE P. – Si P est impair et contient μ facteurs premiers différents, tous multiples de 4 + 1, le nombre des valeurs de A_0 est 2, ainsi que celui des valeurs de B_0, ... ; donc nous obtenons 2^μ valeurs de x complémentaires deux à deux et par suite $2^{\mu-1}$ satins carrés distincts.

Ainsi pour le module $5^\alpha.13^\beta.17^\gamma$, ou α, β, γ, sont quelconques, il y a 4 satins carrés.

Si le module est 2 P, P étant le mène que précédemment, il n'y a que la valeur $A_0 = 1$ correspondant au module $A = 2$; il y a donc encore $A_0 = 1$ satins carrés distances.

Si le module est 4 P, il n'y a plus de satins carrés.

NOMBRE DES SATINS SYMETRIQUES DE MODULE P. – Si P est impair et contient μ facteurs premiers différents, nous avons deux valeurs de A_0 : 1et $A - 1$ et ainsi des autres ; donc 2^μ valeurs de x complémentaires en comptant les valeurs 1 et $P - 1$; il n'y a donc que $2^{\mu-1} - 1$ satins symétriques différents.

Il en est de même si le module est le double d'un impair. Si le module est le quadruple d'un impair, nous obtenons $2^\mu - 1$ satins *symétriques* différents.

Si enfin le module est divisible par S. il y a 4 valeurs de A_0 correspondant à $A = 8$ et par suite $2^{\mu\pm1} - 1$ satins symétriques différents.

REGLE GENERALE. – On prend tous les nombres inférieurs à la moitié du module et premiers avec lui; on les groupe deux à deux de telle sorte que leur produit divisé par le module donne pour reste 1 ou – 1 ; on conserve le plus petit nombre de chaque groupe qui devient la base d'un satin du module donné ; les nombres qui ne peuvent se grouper ainsi donnent nécessairement des satins symétriques ou des satins carrés.

Pour éviter les recherches, nous donnons ici les résultats, obtenus par notre méthode pour les satins dont le module est inférieur à 50.

Tableau de la construction des Satins.

MODULES.	BASE DE		
	SATIN ORDINAIRE	SATIN CARRE	SATIN SYMETRIQUE
2	—	—	—
3	—	—	—
4	—	—	—
5	—	2	—
6	—	—	—
7	2	—	—
8	—	—	3
9	2	—	—
10	—	3	—
11	2. 3	—	—
12	—	—	5
13	2. 3	5	—
14	3	—	—
15	2	—	4
16	3	—	7
17	2. 3. 5	4	—
18	5	—	—
19	2. 3. 4. 7	—	—
20	3	—	9
21	2. 4	—	8
22	3. 5	—	—
23	2. 3. 4. 5. 7	—	—
24	—	—	5. 7. 11
25	2. 3. 4. 9	7	—
26	3. 7	5	—
27	2. 4. 5. 8	—	—
28	3. 5	—	13
29	2. 3. 4. 5. 8. 9	12	—
30	7	—	11
31	2. 3. 4. 5. 7. 11. 12	—	—
32	3. 5. 7	—	15
33	2. 4. 5. 7	—	10
34	3. 5. 9	13	—
35	2. 3. 4. 8. 11	—	6
36	5. 11	—	17
37	2. 3. 4. 5. 7. 8. 10. 13	6	—
38	3. 5. 7. 9	—	—
39	2. 4. 5. 7. 16	—	14
40	3. 7	—	9. 11. 19
41	2. 3. 4. 5. 6. 11. 12. 13. 16	9	—
42	5. 11	—	13
43	2. 3. 4. 5. 6. 8. 9. 10. 12. 15	—	—
44	3. 5. 7. 13	—	21
45	3. 5. 7. 8. 14	—	19
46	3. 5. 7. 11. 17	—	—
47	2. 3. 4. 5. 6. 7. 9. 10. 11. 13. 15	—	—
48	5. 11	—	7. 17. 23
49	2. 3. 4. 5. 6. 9. 13. 17. 18. 20	—	—
50	3. 9. 13. 19	7	—

Remarque. – Il serait facile de voir que le principe de la méthode des satins carrés de M. GAND se déduit des principes exposés ci-dessus. Cela résulte d'un théorème d'arithmétique ainsi conçu : Tout diviseur d'une somme de deux carrés est une somme de deux carrés.

Si p est le module, et si on a $p = a^2 + b^2$, a et b étant premiers avec p le satin [a, b] est un satin carré. Cette loi, qui n'est pas démontrée dans le mémoire cité, donne la conséquence suivante :

On a, les formules :

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (ab' - ba')^2 + (aa' + bb')^2$$
$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (ab' + ba')^2 + (aa' - bb')^2$$

On déduira des deux satins carrés [a,b] de module $p = a^2 + b^2$ et [a',b'] de module $p' = a'^2 + b'^2$, les satins carrés $[ab' - ba', aa' + bb']$ et $[ab' + ba', aa' - bb']$ de module pp'.

Soit, par exemple,	$P = 37 = 1^2 + 6^2$
	$p' = 41 = 4^2 + 5^2$
On déduit	$pp' = 1517 = 19^2 + 34^2$
Ou bien	$1517 = 16^2 + 29^2$

Nous avons donc les deux satins carrés [19, 34] et [26, 29] de module 1517.

Si $p = p'$ on a simplement :

$$p^2 = (2\,\mathrm{ab})^2 + (a^2 - b^2)^2$$

et du satin carré de module p, on déduit le satin carré $[2ab, a^2 - b^2]$ de module p^2

Amiens. – Imprimerie T Jeunet.