JEUX SCIENTIFIQUES

POUR SERVIR

à l'Histoire, à l'Enseignement et à la Pratique

DU CALCUL ET DU DESSIN

PAR

ÉDOUARD LUCAS,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis,
Membre de la Commission supérieure
des Congrès et Conférences de l'Exposition Universelle de 1889

PREMIÈRE SÉRIE — N° 3

LA TOUR D'HANOÏ

JEU TOMBÉ DE SATURNE

et rapporté du Tonkin

PAR LE MANDARIN N. CLAUS (DE SIAM)

Tout exemplaire non revêtu de la signature de l'Auteur, et de la marque des Editeurs, sera réputé contrefait et poursuivi conformément aux lois.

JEUX SCIENTIFIQUES

POUR SERVIR

A L'HISTOIRE, A L'ENSEIGNEMENT ET A LA PRATIQUE

DU CALCUL ET DU DESSIN

PAR

Édouard LUCAS,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint - Louis
Membre de la Commission supérieure
des Congrès et Conférences de l'Exposition Universelle de 1889.

PREMIERE SERIE – N° 3

La Tour d'Hanoi

JEU TOMBÉ DE SATURNE

et rapporté du Tonkin

PAR LE MANDARIN N. CLAUS (DE SIAM)

PARIS

CHAMBON & BAYE
Constructeur d'Appareils à calculer
et de Jeux scientifiques
14, Rue Etienne Marcel, 14
Usines à Bois Colombes (Seine)

EDOUARD LUCAS
Agrégé de l'Université
36. Quai d'Orléans, 38
1, Rue Boutarel, 1
(Ile St – Louis)

1889

La Tour d'Hanoi

LES BRAHMES TOMBENT,

Ecoutez, petits et grands, cette merveilleuse et véridique histoire! C'est une vieille légende indienne, tirée du *Mahabarahta* par le moine AHU, maître de Chapelle à la *Sublime Trompette*. Elle nous a été transcrite du Sanscrit par le Grand Archi-Prêtre des sacrifices TE-CHU-POG, ordonnateur des hécatombes de baleines, au Palais des Mastodontes – et Cétacés – de Patalipûtra, la *Cité des Fleurs*, l'antique Capitale des Monarques historiques de l'Inde.

Dans le grand temple de Bénarès, au-dessous du dôme qui marque le centre du monde, on aperçoit trois aiguilles de diamant, plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille. Sur l'une de ces aiguilles, le dieu PARABAVASTÛ enfila, au commencement des siècles, soixante-quatre disques d'or pur, le plus large reposant sur le bronze et les autres, de plus en plus étroits, superposés jusqu'au sommet. C'est la *Tour Sacrée de* VISHNOU. Nuit et jour, les bonzes se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la Tour Sacrée, de la première aiguille sur la troisième, étage par étage, sans jamais intervertir, sans jamais s'écarter des règles immuables imposées par BRAHMA. Quand tout sera fini, la Tour et les Brahmes tomberont et ce sera la fin des mondes.

QUESTION DE L'ÉTAGE

La *Tour d'Hanoï,* petite sœur de la Tour indienne, est un véritable casse-tête annamite, tombé de Saturne et rapporté du Tonkin, par le professeur N. CLAUS (DE SIAM), mandarin du collège LI-SOU-STIAN.

Ce jeu inédit a été retrouvé dans les écrits de l'illustre Mandarin FER-FER-TAM-TAM. Les lettrés et les mandarins de toutes classes du Royaume du Juste-Milieu – ce que l'on appelle en France le Centre Gauche, – apprendront avec plaisir 'la publication prochaine de ces écrits. Cette nouvelle édition qui sera débarrassée de tous les symboles cunéiformes et hiéroglyphiques, est due à la collaboration du mandarin N. CLAUS (DE SIAM), actuellement directeur des Cerfs-Volants du Céleste-Empire, et de sa fidèle Egérie, la charmante YOLANDE N***, surintendante des régiments d'Amazones torrides, dans la bonne ville d'Alsenor.

La Tour d'Hanoï, nouvellement restaurée, se compose d'étages superposés et décroissants, en nombre variable, qui sont représentés par seize pions en bois, très étroits au sommet, plus larges à la base, percés à leur centre et agrémentés des couleurs tonkinoises. Au Japon, en Chine, en Annam, on les fait en porcelaine.

Le jeu consiste à démolir la Tour, étage par étage, et à la reconstruire dans un lieu voisin conformément aux règles indiquées. Les règles du jeu sont les suivantes : Quel que soit l'ordre primitif des étages sur les tiges et quel que soit le nombre (3, 4 ou 5) des tiges relevées :

I. – On ne peut déplacer à chaque coup que l'étage supérieur d'une pile.

II. – On peut enlever l'étage supérieur d'une pile pour l'enfiler sur une tige relevée n'ayant encore aucun étage.

III.– On peut enlever l'étage supérieur d'une pile et le placer sur une autre pile; à la condition expresse que l'étage supérieur de celle-ci soit plus grand.

Ce jeu est donc la représentation sensible de la *Question de l'Etage*, si importante dans l'existence. Amusant et instructif, facile à apprendre et à jouer, à la ville, à la campagne, en voyage, il a pour but la vulgarisation des sciences, comme tous les autres jeux curieux et inédits de l'inépuisable mandarin.

LE TOMBEAU DES CENT DALLES

Dans le prospectus de la première édition de 1883, qui parut en même temps à Paris, Pékin, Yédo et Saïgon, chez les libraires et marchands de nouveautés, il était dit ceci « Nous pourrions offrir une prime de dix mille francs, de cent mille francs, d'un million de francs, et plus encore – n'ayant nul besoin de les avoir en poche, – à celui qui réaliserait à la main le transport de la Tour d'Hanoï à soixante quatre étages, conformément aux règles du jeu. Nous dirons tout de suite qu'il faudrait exécuter successivement le nombre de déplacements

18 446 744 073 709 551 615 ;

ce qui, a un coup par seconde, exigerait plus de *cinq milliards de siècles.* Mais il vient d'arriver à propos de ces paris une histoire lamentable.

Un riche bourgeois, retiré du commerce des cuirs, n'ayant aucune confiance dans les résultats que l'on vient d'indiquer ci-dessus, se rendit chez, le directeur d'un grand magasin de Hochets en ivoire et de chiens Japonais en carton, l'*Eden des Bébés,* et se fit confectionner une magnifique Tour d'Hanoï *à cent* étages. Le marchand exécuta la commande mais il oublia le brevet de l'inventeur. On ne saurait penser à tout!

Le bon bourgeois, qui s'appelait ABOUL-HASSAN, espérant toucher le compte de paris, s'enferma dans son cabinet de travail avec la Tour, et chercha vainement la solution introuvable. Il en est mort! Conformément à ses dernières volontés, ses héritiers lui ont fait élever un superbe mausolée, qui rappelle la forme de la Tour et qui a exactement le même nombre d'étages. De loin, par un beau soleil, du sommet des collines de Patalipûtra, l'antique capitale, on l'aperçoit à travers le feuillage des cyprès et des saules. Les promeneurs et les visiteurs du Cimetière s'arrêtent parfois pour compter les assises de pierre de cet étrange monument, à l'abord dur, à l'aspect féodal, que les -gardiens appellent le *Tombeau des Cent Dalles.*

Repose en paix, brave bourgeois, homme simple et doux! Tu es mort pour avoir ignoré les mystères de *la Numération binaire*, expliqués depuis plus de cinquante-trois siècles dans le *Livre des Combinaisons* de FO-CHI, premier empereur et législateur de la Chine[1].

1 Le lecteur trouvera au Conservatoire des Arts-et-Métiers, dans la collection des machines à calculer, le Boulier Chinois de FO-CHI, reconstitué d'après nos indications. C'est sur l'observation qui nous en a été faite par M. le Ministre de Chine lui-même, que nous avons rectifié l'orthographe du nom de l'empereur et que nous avons reculé de cinq siècles la date de son ouvrage si curieux et si important pour l'Histoire des Sciences Mathématiques.

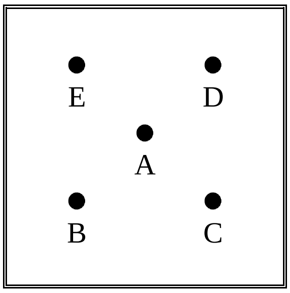
LA TOUR, PRENDS GARDE !

(Ronde enfantine).

Afin d'éviter le retour de pareils malheurs, nous dévoilerons les manœuvres de l'étage, en donnant quelques considérations très élémentaires. Nous supposerons d'abord, pour plus de simplicité, que la Tour se compose successivement de 1, 2, 3, 4, 5, ... étages. Lorsque le lecteur aura bien compris la manœuvre, pour quelques étages seulement, il saura vite monter la Tour.

PREMIER PROBLEME SUR TROIS TIGES. — On enfile sur l'une des tiges un nombre quelconque d'étages dans l'ordre décroissant; on relève deux autres tiges, et l'on demande de transporter la Tour sur l'une d'elles, étage par étage, et sans jamais intervertir.

Nous désignerons par A la tige pleine, qui peut être l'une quelconque des cinq tiges de la planchette; et par B et C les deux autres tiges relevées.



Tour à un seul étage. **—** Un seul pion en A. Il suffit de le porter de A en B ou de A en C, et la Tour se trouve transportée d'un *seul* coup en B ou en C. Nous indiquerons ces déplacements par AB ou AC, et de même dans les exemples suivants. Il ne peut y avoir aucune ambiguïté, puisqu'il s'agit toujours de l'étage supérieur.

Tour à deux étages. — Soit deux étages en A; nous pouvons jouer les *trois coups*

AC, AB, CB, et la Tour est en B,
AB, AC, BC, et la Tour est en C.

Par conséquent, pour transporter en B la Tour de deux étages, il faut d'abord jouer le premier pion en C; en d'autres termes, il faut poser le premier pion sur la tige de transition.

Tour à trois étages. — Supposons toujours la Tour en A; portons en *trois* coups AC, AB, CB, les deux pions supérieurs sur B, puis posons l'étage inférieur de A en C; enfin, rapportons en trois coups la Tour de B en C en commençant par jouer le petit pion en A; nous avons ainsi transporté la Tour à trois étages en *sept* coups sur la tige C.

Il est d'ailleurs visible qu'on ne le peut en un moindre nombre, puisque, pour déplacer l'étage inférieur, il faut nécessairement que les autres étages soient rassemblés sur une seule tige. Nous observerons que, pour transporter de A, une Tour de trois étages sur une tige voisine B ou C, il faut poser le premier pion sur la tige finale; c'est le contraire e ce qu'il faut faire pour deux étages.

Tour à quatre étages. — Si l'on veut transporter la Tour sur B, il faut d'abord transporter trois étages en C, et par conséquent poser le premier pion sur C; on porte l'étage inférieur de A en B, et on rapporte les trois étages de la Tour placée en C. En tout

Sept + un + sept = Quinze coups.

Et l'on voit, par un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire, que le problème est impossible en un moindre nombre de déplacements. On observera que pour transporter de A une Tour à quatre étages sur une tige voisine, il faut poser le plus petit pion sur la tige intermédiaire et non sur la tige définitive; c'est comme pour deux étages, et non pas comme pour trois.

Et ainsi de suite; par conséquent les nombres des déplacements des tours sont :

Pour une tour	d'un étage		1 coup,		au minimum,
»	de deux étages		3 coups,		»
»	trois	»	7	»	»
»	quatre	»	15	»	»
»	cinq	»	31	»	»
»	six	»	63	»	»
»	sept	»	127	»	»
»	huit	»	255	»	»

A un coup par seconde, il faut quatre minutes quinze secondes pour monter la Tour de huit étages.

L'EXPOSANT DES PUISSANCES

Si l'on ajoute un, à chacun de tous ces nombres, on obtient la série

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...

qui est telle que chaque nombre est le double du précédent ; c'est, ainsi qu'on le dit, une *progression géométrique de raison* 2.

Donc, si la Tour avait cent étages il faudrait prendre le centième terme de la série. Ce nombre n'a que *trente-et-un* chiffres ; pour le savoir tout de suite, il faut multiplier l'exposant par le nombre 0,30103 qui s'appelle *le logarithme* de 2, et ajouter 1 à la partie entière ; de même, le millième terme de la série aurait 302 chiffres.

Ainsi, le nombre des déplacements de la Tour d'Aboul - Hassan, à cent étages, a 31 chiffres, et comme tous les déplacements ne peuvent se faire que successivement, si l'on n'enfreint pas les règles, et qu'on ne peut se faire aider par ses voisins, il faudrait des myriades et des myriades de siècles pour en venir à bout. En définitive, la *Question de l'Etage* se résout dans *les Tables* de Logarithmes.

En Algèbre, on dit : Si *n* désigne le nombre des étages, le $n^{\text{ième}}$ terme de la progression géométrique de raison 2, commençant à 2, ou la $n^{\text{ième}}$ puissance de 2, s'écrit 2^n et le nombre des déplacements de la Tour à n étages est $2^n - 1$. Le nombre *n* s'appelle *l'exposant,* et 2^n la *puissance.* Cette notation symbolique est importante, puisqu'elle permet aux mathématiciens de distinguer et de comparer des grands nombres qu'il n'est pas nécessaire de calculer ou qu'il serait impossible de représenter en chiffres. L'introduction de cette notation en Algèbre est due à NICOLAS CHUQUET ; c'est donc avec toute justice que le Conseil municipal a donné le nom du savant Parisien à l'une des rues de Paris, dans le quartier de l'Etoile. Son ouvrage, *Triparty en la science des nombres,* écrit en 1484, a été publié pour la première fois à Rome, quatre siècles plus tard, dans le *Bullettino di Bibliografia* du prince BALTHAZAR BONCOMPAGNI.

Mesdames et messieurs, admirez avec moi l'exposant des puissances et la puissance des exposants, surtout en ce temps d'Exposition Universelle. Ayez confiance dans ces calculs, et surtout ne faites pas comme ABOUL - HASSAN, le marchand de cuirs. J'en aurais tant de chagrin et je craindrais la police!

MALICE DU SAC DE RAOUL

Un savant lettré, aimable et spirituel, H. R. DE LAPIN - LIÈVRE, qui demeure, comme son nom l'indique, au Parc – des - Princes, a dévoilé dans ses *étincelantes Causeries Scientifiques*, le mystère qui recouvrait la naissance de celui qui rapporta du Tonkin la première Tour d'Hanoï. Il prétend que N. DE SIAM veut dire D'AMIENS, et que le mandarin de l'Annam ne serait qu'un enfant de la Picardie, tout juste aux Antipodes! Je ne saurais y contredire pour ma part, ne me rappelant rien de cette époque. Je me contenterai de faire observer qu'on peut trouver tout ce qu'on veut dans une permutation de douze lettres, puisqu'en supposant toutes ces lettres distinctes, le nombre des permutations est

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$$

c'est-à-dire

$$479\ 001\ 600$$

Mais il est vrai que toutes ces permutations ne forment pas des mots ou des phrases. En cherchant bien dans le titre de ce paragraphe, *malice* à part, le brillant écrivain retrouvera le nom et le prénom de l'auteur. Eh bien! l'auteur déclare qu'il ne l'a pas fait exprès; il ne s'en est aperçu qu'un peu plus tard. En permutant l'ordre des lettres d'une phrase ou de quelques mots, on peut trouver d'autres phrases ou d'autres mots formant un sens et composer ainsi des anagrammes. La chose est d'autant plus facile que les phrases sont plus longues. Ainsi, avec les deux mots :

REVOLUTION FRANÇAISE

on forme, en permutant l'ordre des lettres, la phrase suivante :

UN VETO CORSE LA FINIRA

et avec les quatre mots :

NAPOLEON, EMPEREUR DES FRANÇAIS,

on forme l'anagramme :

UN PAPE SERF A SACRE LE NOIR DEMON

Mais revenons à notre Tour. Une remarque fort intéressante sur la pratique du jeu a été faite, pour la première fois, par le neveu de l'inventeur, M. RAOUL OLIVE, alors élève au lycée Charlemagne. Pour monter la tour sur trois tiges, quel que soit le nombre des étages, il faut faire continuellement tourner le disque le plus petit, toujours dans le même sens de rotation circulaire ABC ou ACB, *tous les deux coups.*

Mais quel est le sens qu'il faut choisir au départ ? Il suffit de se rappeler les remarques faites dans le paragraphe précédent. Si la tour est en A, et si l'on veut la transporter en B ou en C, il faut poser d'abord le plus petit disque sur la tige finale que l'on a choisie, lorsque le nombre des étages est un nombre impair 1, 3, 5, 7, ... **;** mais il faut poser le plus petit disque sur l'autre tige intermédiaire, lorsque le nombre des étages est un nombre pair 2, 4, 6, 8, ... Au moyen de ces deux remarques, il est facile de résoudre le problème sur trois tiges, quel que soit le nombre des étages.

TOUR A CINQ CLOUS

Nous avons modifié, dans cette nouvelle édition, les dispositions de la Tour. Elle se compose de seize pions à quatre couleurs alternées, et de cinq clous. On peut alors résoudre divers problèmes, mais en supposant toujours qu'on né peut placer un étage sur un autre plus petit.

Premier problème. – Le clou central étant vide, on enfile les pions de même couleur, dans l'ordre de grandeur décroissante, sur les quatre autres tiges. Cela posé, réunir conformément aux règles données, les pions de deux couleurs sur la tige centrale.

Deuxième problème. – Le clou central étant vide, et les pions de même couleur enfilés sur les quatre autres tiges dans l'ordre de grandeur décroissante, on désigne deux couleurs. Il s'agit alors d'échanger les tours de ces deux couleurs en se servant du clou central, mais sans enfreindre les règles posées.

Troisième problème. – Réunir les tours de trois couleurs désignées sur le clou central.

Quatrième problème. – Réunir les tours des quatre couleurs en une seule sur le, clou central.

A ces quatre problèmes on peut en faire correspondre quatre autres en enfilant d'abord les quatre étages les plus grands sur l'une des tiges, puis les quatre suivants sur la tige voisine et ainsi de suite.

Enfin, on peut se proposer le problème inverse. Une tour de seize étages étant construite sur la tige centrale, la décomposer en deux, trois ou quatre autres 7 de grandeurs et de couleurs données.

DETOURS TOUT AUTOUR DES TOURS

Il nous reste à faire quelques aveux au lecteur. La Tour d'Hanoï n'a pas été rapportée du Tonkin, puisque l'inventeur n'y est jamais allé. Elle a été imaginée en 1876, au no 56 de la rue Monge, à Paris, dans la maison bâtie sur l'emplacement de celle où mourut PASCAL, le 19 août 1663. L'auteur réunissait alors les matériaux nécessaires pour écrire l'histoire, du calcul, de ses méthodes, de *ses* appareils et de ses machines.

La Tour d'Hanoï n'est, en réalité, que la représentation sensible de *l'Arithmétique binaire;* c'est une transformation du *Boulier* chinois de FO-CHI et du *Baguenaudier*. Nous avons déjà indiqué ces résultats dans une Conférence faite au théâtre de Blois, en 1884, pendant le Congrès de *l'Association française pour l'Avancement des Sciences.* Nous ne pouvons mieux terminer cette étude sur la Tour qu'en reproduisant ce passage composé alors en l'honneur de PASCAL. Il inventait, à dix-neuf ans, la première machine arithmétique destinée à simplifier et à perfectionner le travail de la pensée humaine :

« Les appareils que j'ai l'honneur de vous montrer appartiennent au Conservatoire des arts et métiers, et nous devons remercier son directeur. M. le Colonel LAUSSEDAT, de la bienveillance avec laquelle il a bien voulu encourager mes premiers efforts. En allant au Conservatoire, pour la préparation de cette conférence, j'ai souvent traversé le square de la tour Saint-Jacques et, plus d'une fois, je me suis surpris arrêté devant la statue de PASCAL. Sous cette voûte splendide, pleine d'ombre et de mystère, qui fut le témoin de ses immortelles expériences sur le baromètre et sur la pesanteur de l'air, l'artiste l'a représenté dans une attitude austère et méditative. Rien ne saurait troubler le calme de sa pensée profonde ni les cris des enfants qui jouent dans le jardin, ni le bruit de l'activité humaine qui passe dans la rue. Rien, pas même tous ces enfants de son esprit, ces brouettes, ces haquets, ces omnibus, qui courent, se pressent et se dispersent par centaines, dansant une ronde folle autour de son piédestal. Mesdames, Messieurs, quand vous irez à Paris, lors de votre retour, tout autour de la tour Saint-Jacques, arrêtez-vous un instant pour contempler cette radieuse image ; c'est l'une des gloires les plus pures, l'un des plus grands génies de la France ! »

TABLE DES MATIERES

Imp. Girard et Fils, 101, rue Claude – Decaen, Paris.