(2)

NOUVELLE

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE

RÉDIGÉE PAR

EUGÈNE CATALAN,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DOCTEUR ÈS SCIENCES,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE, ETC.;

avec la collaboration de

MM. MANSION, LAISANT, BROCARD, NEUBERG ET ÉDOUARD LUCAS.

TOME DEUXIÈME,

1876.

C'
BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

1876

Digitized by Google

DE LA TRISECTION DE L'ANGLE, AU MOYEN DU COMPAS;

par M. Édouard Lucas, professeur au Lycée de Moulins.

Dans une lettre de Descartes au P. Mersenne, en date du 8 octobre 1629, on trouve le passage suivant : « De diviser les » cercles en 27 et 29, cela se peut mécaniquement, mais non » point géométriquement; il est vrai qu'il se peut en 27, par le » moyen d'un cylindre, encore que peu de gens en puissent » trouver le moyen, mais non pas en 29, et si l'on m'en veut » envoyer la démonstration, j'ose vous promettre de faire voir » que cela n'est pas exact. » (*Œuvres de Descartes*, par Cousin, t. VI, p. 56.)

La construction des polygones réguliers de 9, 27, 81, ... côtés se déduit du principe suivant, qui résout le problème de la trisection de l'arc, par des figures décrites au moyen d'un compas à branches courbes, sur la surface d'un cylindre de révolution. Soient, en effet, ABC la base d'un cylindre dont le rayon est égal à l'unité, A l'origine des arcs, B et C les extrémités de l'arc donné a et de l'arc supplémentaire. Du point B comme centre, on décrit, sur la surface du cylindre, une courbe sphérique passant par le point diamétralement opposé au point B; sur la génératrice passant par le point C, on prend un point D, dont l'ordonnée est égale au cosinus de l'arc donné; et, de ce point D comme centre, on décrit, sur la surface du cylindre, une seconde courbe sphérique passant par le point diamétralement opposé au point C.

Ces deux courbes se coupent en quatre points dont les ordonnées sont égales à $2\cos a$ et aux trois valeurs de l'expression $2\cos\frac{a+2k\pi}{3}$, et dont les projections, sur la circonférence de base, sont les extrémités de quatre arcs respectivement égaux à $2\pi - a$ et aux trois valeurs cherchées de l'expression $\frac{a+2k\pi}{3}$.

Digitized by Google

Telle est, je pense, l'interprétation que l'on doit donner du passage de Descartes, rapporté plus haut. La méthode employée permet aussi de construire les racines des équations du troisième et du quatrième degré.

Vérification. — Si l'on prend, pour axe des z, l'axe du cylindre, et pour axe des x le rayon passant par le point A, les sphères décrites des points B et D sont représentées par

$$(x - r\cos a)^2 + (y - r\sin a)^2 + z^2 = 4r^2,$$
$$(x + r\cos a)^2 + (y - r\sin a)^2 + (z - r\cos a)^2 = 4r^2 + r^2\cos^2 a;$$

et ces équations sont simultanément vérifiées :

1° par

$$x = r\cos a, \qquad y = -r\sin a, \qquad z = 2r\cos a;$$

2° par

$$x = r\cos\frac{a + 2k\pi}{3}, \quad y = r\sin\frac{a + 2k\pi}{3}, \quad z = 2r\cos\frac{a + 2k\pi}{3}.$$

D'ailleurs, ces quatre points sont dans le plan qui a pour équation $z = 2x$.

SUR LA THÉORIE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES (*);

par M. P. MANSION, professeur à l'Université de Gand.

I

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE.

1. *Équations qui déterminent la transformation* (S. 324). Les équations qui expriment la correspondance entre un point

(*) Les transformations linéaires sont souvent appelées *homographiques* en France, *collinéaires* en Allemagne. CHASLES a étudié avec soin les transformations linéaires, dans la seconde partie de son célèbre Mémoire sur *la*

Digitized by Google

75. Par le centre de similitude externe de deux circonférences C, C′, on mène une sécante quelconque, qui rencontre ces lignes en A, B, A′, B′, Soient D, D′ les circonférences qui touchent C, C′, respectivement, aux points *anti-homologues* A et B′, A′ et B. Lorsque la sécante tourne autour de S :

1° La différence des rayons D, D′ reste constante ;

2° Le centre de similitude interne des D, D′ décrit l'axe radical de C, C′ ; et le centre de similitude externe décrit une hyperbole ;

3° Le *pied* de l'axe radical de D, D′ parcourt une circonférence. (J. Neuberg.)

76. Théorème. La somme des carrés des n premiers nombres entiers n'est jamais un carré, excepté si $n = 24$. (É. Lucas.)

77. Théorème. La somme des carrés des n premiers nombres entiers n'est ni un cube, ni une cinquième puissance. (É. L.)

78. Théorème. La somme des carrés des n premiers nombres impairs n'est ni un carré, ni un cube, ni une cinquième puissance. (É. L.)

79. Théorème. La somme des cubes des n premiers nombres impairs n'est ni un cube, ni un bicarré, ni une cinquième puissance. (É. L.)

80. Théorème. La somme de deux cubes consécutifs n'est jamais un carré, excepté si ces cubes sont 1 et 8. (É. L.)

81. Théorème. La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais un bicarré (*). (É. L.)

(*) Ces curieux théorèmes, dont M. Lucas n'a pas fait connaître les démonstrations, sont extraits d'un Mémoire intitulé : *Recherches sur l'Analyse indéterminée.* La propriété dont jouissent les nombres 8 et 9 a donné lieu au théorème *empirique* suivant : *deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances exactes. Voir* nos *Mélanges mathématiques*, les *Nouvelles Annales*, etc. (E. C.)

Digitized by Google

que les constantes m, m' soient assujéties à vérifier la relation

$$mm' = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Pour obtenir le lieu des points où se coupent mutuellement les côtés des deux polygones, il suffit d'éliminer m et m' entre les équations (18), (19) et

$$f(\rho_1) + m'\varphi(\rho_1) = 0.$$

On trouve

$$f(\rho) f(\rho_1) - \varphi(\rho)\varphi(\rho_1) = 0.$$

Par conséquent, *par les* n^2 *points où se coupent mutuellement les côtés de deux polygones de* n *côtés, circonscrits à une même conique, on peut faire passer une infinité de courbes du* $n^{ième}$ *degré, dont chacune passe encore par les intersections mutuelles des côtés d'une infinité d'autres couples de polygones, circonscrits à la même conique. Tous ces polygones appartiennent à une même involution.*

NOTE SUR LE TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL ET SUR LA SÉRIE DE LAMÉ;

par M. Édouard Lucas, professeur au Lycée de Moulins.

1. La formule fondamentale de la théorie des combinaisons :

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$$

s'obtient, comme on sait, en partageant les combinaisons de m lettres, n à n, en deux groupes distincts; le premier groupe renfermant les combinaisons qui ne contiennent pas une certaine lettre; et le second, les combinaisons qui la contiennent. Cette formule peut s'écrire symboliquement

(1) . . . . . $C_m^n = C_{m-1}^{n-1}(C + 1)$,

en considérant les indices supérieurs comme des exposants.

Digitized by Google

De même, si l'on partage les combinaisons C_m^n en divers groupes, par la considération de deux lettres, on obtient encore la formule

$$C_m^n = C_{m-2}^n + 2C_{m-1}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2};$$

ou, symboliquement,

$$C_m^n = C_{m-1}^{n-1}(C+1)^2.$$

On trouve de même la formule générale :

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad C_m^n = C_{m-p}^{n-p}(C+1)^p.$$

On peut déduire immédiatement la formule (2) de la formule (1), de la manière suivante.

Supposons la formule (2) vérifiée pour une certaine valeur de p et pour les valeurs générales de m et de n. On obtient, en changeant m en $m-1$, dans cette formule, et n en $n-1$, dans le résultat nouveau, les relations

$$C_{m-1}^n = C_{m-p-1}^{n-p}(C+1)^p,$$
$$C_{m-1}^{n-1} = C_{m-p-1}^{n-p-1}(C+1)^p;$$

d'où en ajoutant, et tenant compte de la formule (1),

$$C_m^n = C_{m-p-1}^{n-p-1}(C+1)^p(C+1);$$

ou enfin

$$C_m^n = C_{m-p-1}^{n-p-1}(C+1)^{p+1}.$$

La relation (2) est donc vérifiée pour la valeur de p augmentée d'une unité; et ainsi de suite. Cette formule ne diffère, que par la forme, de la formule de Vandermonde connue sous le nom de binôme des factorielles; mais la démonstration précédente nous paraît plus simple que celle qu'on en donne habituellement.

Cette formule, qui peut s'écrire

$$C_{p+q}^{p+n} = C_p^0 C_q^n + C_p^1 C_q^{n+1} + \cdots + C_p^p C_q^{n+p},$$

donne la somme des produits obtenus en multipliant respec-

Digitized by Google

tivement tous les termes d'une ligne horizontale du triangle arithmétique par ceux de la même ligne ou d'une autre commencée à un terme de rang quelconque; et, en particulier, la somme des carrés des coefficients d'une puissance quelconque du binôme.

La formule précédente ne diffère pas, au fond, de la formule

$$C_{m+m',p} = \sum_{i=0}^{i=p} C_{m,i} \times C_{m',p-i},$$

donnée par M. Catalan dans son *Cours d'analyse* (p. 50). On l'obtient en multipliant $(1+x)^m$ par $(1+x)^{m'}$. Mais le procédé que nous avons employé nous semble préférable; il permet, en effet, d'établir la formule ci-dessous, qui paraît nouvelle.

2. La formule fondamentale de la théorie des combinaisons peut s'écrire symboliquement

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad C_{m-1}^{n-1} = C_{m-1}^{n}(C-1),$$

en traitant les *indices inférieurs*, et non pas les indices supérieurs, *comme des exposants*. Changeons m en $m-1$, nous obtenons

$$C_{m-2}^{n-1} = C_{m-2}^{n}(C-1);$$

si nous retranchons, membre à membre,

$$C_{m-1}^{n-1}(C-1) = C_{m-2}^{n}(C-1)(C-1),$$

et si nous tenons compte de la formule (3) :

$$C_{m-2}^{n-2} = C_{m-2}^{n}(C-1)_2.$$

On a, de même, la formule générale

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad C_{m-p}^{n-p} = C_{m-p}^{n}(C-1)_p,$$

que l'on doit considérer symboliquement, en traitant les indices inférieurs comme des exposants, et que l'on vérifie par induction.

Cette formule, qui peut s'écrire

$$C_{m-p}^{n-p} = C_p^0 C_m^n - C_p^1 C_{m-1}^n + C_p^2 C_{m-2}^n - \cdots + (-1)^p C_p^p C_{m-p}^n,$$

donne la somme des résultats obtenus en multipliant $p+1$

Digitized by Google

termes consécutifs d'une colonne du triangle arithmétique, respectivement par les $p+1$ coefficients du développement de la puissance $(x-a)^p$. Si, en particulier, $n=p$, on a la proposition suivante :

THÉORÈME. Si l'on multiple $p+1$ termes consécutifs, de la $p^{ième}$ colonne du triangle arithmétique de Pascal, respectivement par les termes de la $p^{ième}$ ligne, pris alternativement avec les signes + et —, la somme des résultats est nulle.

3. La formule de M. Janni (*N. C. M.*, t. I, p. 122) permet de trouver la somme des n premiers coefficients du binôme, pris alternativement avec des signes opposés. Elle se déduit immédiatement du triangle arithmétique de Pascal, et donne lieu à une propriété générale, applicable au calcul des différences. Soit, en effet, la ligne

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ldots,$$

et la suivante

$$a,\ a+b,\ b+c,\ c+d,\ d+e,\ldots;$$

il est clair que si l'on affecte du signe — les termes de rang pair de cette dernière ligne, les sommes des 1, 2, 3,... premiers termes sont respectivement

$$a,\ -b,\ c,\ -d,\ e,\ldots,$$

et que l'on reproduit ainsi les termes de la ligne précédente, avec des signes alternés.

4. M. Catalan fait remarquer, à propos de cette formule, qu'il ne saurait exister de formule analogue pour la somme des p premiers coefficients du binôme. Nous allons faire voir que cette anomalie subsiste dans un autre endroit du triangle arithmétique. Si l'on cherche, en effet, la somme des termes contenus dans une rangée oblique, partant de la première colonne verticale des unités, et ascendante :

$$1,\ C_n^1,\ C_{n-1}^2,\ C_{n-2}^3,\ C_{n-3}^4,\ldots,$$

Digitized by Google

on obtient pour résultat le terme u_{n+1} de la série de Lamé, donné, comme on sait, par la *loi de récurrence :*

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1},$$

ou par l'expression (*)

$$u_n = \frac{n+1}{2^n}\left[1 + 5\frac{n(n-1)}{2.3} + 5^2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4.5} + \cdots\right].$$

5. On obtient un résultat beaucoup plus simple en prenant la somme des termes de la rangée oblique, considérée avec des signes alternés. Il est facile de voir, en effet, que l'expression

$$1 - C_n^1 + C_{n-1}^2 - C_{n-2}^3 + \cdots$$

est égale à

+ 1,	si le reste de la division de n par 6 est				0 ou 5;
0,	»	»	»	»	1 ou 4;
— 1,	»	»	»	»	2 ou 3.

Nous ajouterons, sur la série de Lamé, les propositions suivantes, qui nous semblent nouvelles :

I. La somme des n premiers termes de la série, pris avec le même signe, est égale à

$$u_{n+2} - 2.$$

II. La somme des n premiers termes de la série, pris avec des signes alternés, est égale à

$$(-1)^n u_{n-1}.$$

III. La somme des carrés de deux termes consécutifs forme un terme de la série :

$$u_{n-1}^2 + u_n^2 = u_{2n}.$$

IV. Le produit de deux termes consécutifs, diminué du produit des deux précédents, est un terme de la série :

$$u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_{n-2} = u_{2n}.$$

(*) E. Catalan, *Manuel des Candidats à l'École polytechnique*, I, p. 86.

Digitized by Google

V. La somme des cubes de deux termes consécutifs, diminuée du cube du terme qui précède, est encore un terme de la série, et l'on a

$$u_n^3 + u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3 = u_{3n+1}.$$

VI. On a les formules symboliques

$$u_{n+p} = u_{n-p}(u+1)^p,$$
$$u_{n-p} = u_n(u-1)^p,$$

qui se déduisent, de la loi de formation de la série, d'une façon entièrement analogue à celle qui nous a permis d'établir les formules correspondantes des combinaisons (*).

On pourrait trouver, par la même voie, un grand nombre de relations nouvelles.

NOTE SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE.

1. *Une conique, donnée de forme et de grandeur, se déplace de manière que chacun de ses foyers reste sur une droite donnée. Dans chaque position, on mène, à la conique, des tangentes parallèles à la droite que décrit l'un des foyers. Déterminer le lieu des points de contact* (**).

(*) Toutes ces propriétés sont fort remarquables. Nous croyons savoir que notre jeune collaborateur en a déduit des conséquences importantes, relatives surtout à la théorie des nombres premiers.

(**) Une lettre d'Alger nous apprend que cette question vient d'être proposée, comme sujet de *composition écrite*, pour l'admission à l'École polytechnique (1875). Sans doute à cause de sa difficulté, elle a été *retirée* partout, excepté en Algérie. Comment les élèves du Lycée d'Alger ont-ils pu être comparés à ceux des autres Lycées de France? C'est ce que notre honorable correspondant s'est demandé.

Digitized by Google

EXTRAITS ANALYTIQUES.

CONSTRUCTION D'UNE PARABOLE.

Construire une parabole, connaissant le sommet A, *un point* M *et une tangente* RS.

Désignons par N le point d'intersection des tangentes en A et en M; par L le milieu de la corde AM; par AA', NN', MM' les perpendiculaires abaissées de A, N, M sur RS. Un théorème connu donne

$$NN' = \sqrt{AA'.MM'}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (1)$$

Donc le point N est déterminé par l'intersection de la circonférence décrite sur AI comme diamètre, avec une parallèle à RS, menée à une distance connue (MOREAU, *Nouvelles Annales*, 1875, p. 132) (*). J. N.

THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUES.

I. *Le produit de deux nombres entiers, de la forme*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$

peut se mettre sous la même forme.

On a

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

(*) L'égalité (1) est une conséquence du théorème suivant : Une parabole étant rapportée à un diamètre quelconque et à la tangente conjuguée (ici RS), les coordonnées du pôle de la corde qui joint deux points quelconques (x', y'), x'', y'') de la courbe, sont

$$x = \sqrt{x'x''}, \quad y = \frac{y' + y''}{2}.$$

Digitized by Google

Ensuite

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ z_1 & x_1 & y_1 \\ y_1 & z_1 & x_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix},$$

où

$$X = xx_1 + yy_1 + zz_1,$$
$$Y = xy_1 + yz_1 + zx_1,$$
$$Z = xz_1 + yx_1 + zx_1;$$

ce qui démontre le théorème (J. Petersen, *Zeuthens Tidsskrift*, 1872, p. 57).

II. On a identiquement

$$0 = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 - (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$
$$= \begin{vmatrix} a(b-c) & b(c-a) & c(a-b) \\ a-b & b-c & c-a \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix};$$

car la somme des éléments de chaque ligne est nulle.

Posons :

$$a = Ax^3, \quad b = By^3, \quad c = Cz^3, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$X = x(b-c), \quad Y = y(c-a), \quad Z = (a-b); \quad \ldots \quad (2)$$

l'identité deviendra, après quelques transformations :

$$\frac{AX^3 + BY^3 + CZ^3}{XYZ} = \frac{Ax^3 + By^3 + Cz^3}{xyz}.$$

Par conséquent, si l'on connait un système x, y, z, de valeurs entières satisfaisant à l'équation

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = Dxyz,$$

d'autres solutions entières seront données par les formules (1), (2), ou par les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} X &= x(By^3 - Cz^3), \\ Y &= y(Cz^3 - Ax^3), \\ Z &= z(Ax^3 - By^3). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Digitized by Google

Ainsi, l'équation

$$x^3 + 2y^3 + 3z^3 = 6xyz,$$

qui a pour solution immédiate $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, est aussi vérifiée pour

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 1,$$
$$x = 13, \quad y = 4, \quad z = 17.$$

Les formules (3) sont empruntées à l'ouvrage intitulé : *Recherches sur l'Analyse indéterminée et l'Arithmétique de Diaphante*, par Éd. Lucas (Moulins, Derosiers, 1873); 92 p. in-8°. L'auteur étudie, dans cet écrit, beaucoup d'équations biquadratiques, et traite diverses questions intéressantes, relatives à l'Analyse indéterminée. P. M.

CORRESPONDANCE.

Extraits d'une lettre de M. Édouard Lucas : ..... Je prends la liberté de vous envoyer quelques réflexions sur votre publication, un peu à la hâte :

1° Les questions 46, 47 sont dans Painvin (*) (*Géométrie analytique*).

2° Le théorème 53 (Laisant) est dans Salmon, et il y est plus généralisé.....

3° La question 58 est mal posée (**); elle revient à

$$1 + x + x^3 + x^5 = y^3,$$

(*) J'ai appris, par M. Saltel, la fin prématurée et bien regrettable de M. Painvin, mon ancien élève au Lycée St-Louis. (E. C.)

(**) *Résoudre, en nombres entiers, l'équation*

$$x^3 + x^5 + x^7 + x^9 = y^3. \qquad \text{(Brocard.)}$$

Cette relation exige que $y = zx$; d'où résulte celle de M. Lucas. Notre honorable correspondant a commis une légère inadvertance, bientôt réparée par le calcul; la vraie question est celle-ci : *Trouver un nombre premier* x, *tel que la somme des diviseurs de* x^3 *soit un carré.* (E. C.)

Digitized by Google

et se trouve dans une lettre de Fermat à Digby (*) : *Trouver un cube égal à la somme de ses parties aliquotes.* On a

$$(1 + x)(1 + x^2) = y^2;$$

ainsi

$$1 + x = 2u^2, \quad 1 + x^2 = 2v^2, \quad y = 2uv.$$

La solution complète est donnée par

$$2v^2 - x^2 = 1 \ (**).$$

5° La question Fermat (***) est dans Brassinne (††)..., résolue en grande partie; il y a 12 colonnes du carré magique.

6° (P. 117) (†). Problème. *Trouver le lieu décrit par le point de contact mutuel de deux circonférences variables, tangentes à deux circonférences fixes.* Évident géométriquement. Si l'on prend, comme centre d'inversion, le centre de similitude correspondant, de telle sorte que l'un des cercles se transforme dans l'autre, le point de contact reste sur le cercle d'inversion (††).

(*) Du 20 juin 1657 (*Varia opera mathematica.....*; 1861; p. 191). (E. C.)

(**) Plus exactement, les valeurs de x, répondant au problème, sont comprises parmi celles qui satisfont à cette dernière équation. (E. C.)

(***) Voir ci-dessus, p. 55. (E. C.)

(††) *Précis des Œuvres Mathématiques de P. Fermat...* — Mallet-Bachelier; 1853. — Dans sa Préface, notre respectable confrère à l'Académie de Toulouse a commis une singulière erreur historique : la belle, savante et infortunée *Hypathia* est, suivant lui, une reine d'Alexandrie! (E. C.)

(†) Dans la Note citée, nous avons seulement voulu donner, à nos jeunes lecteurs, une application de la théorie des coordonnées cartésiennes. (E. C.)

(††) Un problème dont la solution (très-élégante, du reste) repose sur la théorie des *centres et des cercles d'inversion*, peut-il être regardé comme *évident?* (E. C.)

Digitized by Google

d'où, par division :

$$\frac{A_2A_3}{A_1A_3} = \frac{2b + a}{2a + b}$$

On trouve, d'une manière analogue,

$$\frac{C_2C_3}{C_1C_3} = \frac{2b + a}{2a + b};$$

donc

$$\frac{C_2C_3}{C_1C_3} = \frac{A_2A_3}{A_1A_3};$$

et, en rapprochant cette proposition de (1) et (2)

$$Rx + QC_3 = PC_3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. Il est facile de voir que : 1° les côtés du triangle PQR sont parallèles aux droites AA′, BB′, CC′; 2° les droites AA′, BB′, CC′ sont égales; 3° elles passent par un même point; 4° ce point se confond avec le point d'intersection commun aux cercles circonscrits aux triangles AB′C, A′BC, ABC′.

Van Aubel, prof. à l'Athénée d'Anvers.

Autre solution, par M. P. S. Celle-ci est fondée sur les propriétés de l'hyperboloïde de révolution. L'auteur signale quelques propriétés intéressantes, qu'il lui sera facile de généraliser.

QUESTIONS PROPOSÉES.

82. Résoudre complétement, en nombres rationnels, l'équation

$$x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = y^2. \qquad \text{(É. Lucas.)}$$

83. On joint les sommets d'un triangle ABC à un point P; et l'on prend les intersections A′, B′, C′ des droites AP, BP, CP avec les côtés BC, CA, AB. Trouver quel est le lieu du point P

Digitized by Google

si les perpendiculaires aux côtés, en A′, B′, C′, se coupent en un point Q. Trouver aussi le lieu du point Q. (É. L.)

84. On prend les milieux des droites qui joignent les pieds des hauteurs d'un triangle; et, par chacun de ces points, l'on abaisse une perpendiculaire sur le côté correspondant. Démontrer que ces trois perpendiculaires se coupent en un même point. (É. L.)

85. Trouver le lieu du centre du cercle inscrit au triangle inscrit à une ellipse donnée, et dont le centre de gravité coïncide avec le centre de l'ellipse. (É. L.)

86. Pour quelles valeurs de n la somme des cubes des n premiers nombres impairs, est-elle un carré parfait? (É. L.)

87. Pour quelles valeurs de n la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers, est-elle un carré parfait? (É. L.)

88. Pour quelles valeurs de n la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres impairs, est-elle un carré parfait? (É. L.)

89. Pour quelles valeurs de n la somme des septièmes puissances des n premiers nombres entiers, est-elle un carré parfait? (É. L.)

90. Dans quels cas la somme des cubes de *sept* nombres entiers consécutifs est-elle un carré parfait? (É. L.) (*).

91. Décomposer, en facteurs premiers, le nombre $30^{30} - 1$. (É. L.)

(*) A propos de cette question, on peut consulter la *Note sur un Problème d'Analyse indéterminée* (*Atti dell'Academia pontificia de' Nuovi Lincei*, 1866 et 1867). (E. C.)

Digitized by Google

92. Prouver que $2^{61} - 1$ et $2^{127} - 1$ sont des nombres premiers. (É. L.) (*).

93. Le polygone formé par n tangentes à une parabole, est la moitié du polygone qui a pour sommets les points de contact. (É. L.)

94. Trouver l'équation de la sphère qui passe par quatre des huit points d'intersection de quatre sphères quelconques. (É. L.)

95. Théorème. AMB étant un arc de courbe plane, convexe, on projette A sur la tangente BA′ en B, et l'on projette B sur la tangente AB′ en A. Cela posé, si l'on néglige les quantités du *cinquième ordre*, le segment AMB est équivalent au $\frac{1}{6}$ de la somme des triangles rectangles AA′B, BB′A. (Hermite, de l'Institut.)

Rectification.

La formule relative à l'aire du trapèze (question 74) se trouve, presque textuellement, dans un petit Mémoire de M. Dostor (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. VII, p. 71).

De Tilly.

(*) Si l'on admet ces deux propositions, et si l'on observe que $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^7 - 1$ sont aussi des nombres premiers, on a ce *théorème empirique :*

Jusqu'à une certaine limite, si $2^n - 1$ *est un nombre premier* p, $2^p - 1$ *est un nombre premier* p′, $2^{p'} - 1$ *est un nombre premier* p″, etc.

Cette proposition a quelque analogie avec le théorème suivant, énoncé par Fermat, et dont Euler a montré l'inexactitude :

Si n *est une puissance de* 2, $2^n + 1$ *est un nombre premier.* (E. C.)

Digitized by Google

SUR UN PROBLÈME D'EULER, RELATIF AUX CARRÉS MAGIQUES;

par M. Édouard Lucas, professeur au Lycée de Moulins.

1. Euler s'est proposé de disposer seize nombres en carré, de telle sorte que la somme des carrés des nombres soit égale dans chacune des quatre lignes horizontales, égale aussi dans chacune des quatre lignes verticales, et dans les deux diagonales (*).

2. Avant de nous occuper du problème d'Euler, nous traiterons le problème analogue, pour neuf nombres seulement. Si l'on considère le tableau des neuf quantités suivantes:

$$\begin{array}{ccc} p^2+q^2-r^2-s^2, & 2(qr+ps), & 2(qs-pr), \\ 2(qr-ps), & p^2+r^2-q^2-s^2, & 2(rs+pq), \\ 2(qs+pr), & 2(rs+pq), & p^2+s^2-q^2-r^2; \end{array}$$

il est facile de vérifier que la somme des carrés, des nombres contenus dans une même ligne ou dans une même colonne, est égale au nombre constant

$$(p^2+q^2+r^2+s^2)^2.$$

Il en résulte que l'on peut toujours disposer, et d'une infinité de manières, neuf nombres entiers, satisfaisant aux six conditions que la somme des carrés des termes de la même ligne ou de la même colonne soit constante, et égale au carré d'un nombre entier. On peut même se donner, à l'avance, ce nombre entier; car il est toujours décomposable en une somme de quatre carrés entiers.

(*) *N. C. M.*, page 58. — Legendre (*Théorie des nombres*, t. II, p. 144).

Digitized by Google

3. On peut aussi, au moyen d'une formule connue, due à Euler, et qui donne le carré, le cube, ... d'une somme de quatre carrés, construire le tableau des formules de neuf nombres disposés en carré, et tels, que la somme des carrés des termes d'une même ligne ou d'une même colonne, soit constante, et égale à la quatrième, la sixième, ... puissance d'un nombre entier.

Par exemple, soit donné à l'avance le nombre $3^8 = 6561$. On a

$$3^4 = 81 = 6^2 + 5^2 + 4^2 + 2^2.$$

Faisant ensuite, dans le tableau précédent :

$$p = 6, \quad q = 5, \quad r = 4, \quad s = 2;$$

on obtient le carré suivant, *plus ou moins magique* (*) :

$$\begin{vmatrix} 1, & 68, & 44 \\ 76, & 16, & 23 \\ 28, & 41, & 64. \end{vmatrix}$$

Dans ce tableau, la somme des carrés des termes de chaque ligne ou de chaque colonne est égale à la huitième puissance de 3. De plus, la somme des termes de la diagonale principale est égale à la quatrième puissance de 3, et la somme de tous les termes du tableau est égale au carré de 19 : ces deux dernières propriétés sont fortuites, et ne découlent pas des expressions analytiques du tableau. Mais, d'autre part, le tableau des neuf nombres, qui résultent de ces expressions, jouit encore de la propriété suivante : La somme des carrés des produits des termes de chaque ligne est égale à la somme des carrés des produits des termes de chaque colonne.

4. Si l'on s'impose la condition que la somme des carrés des termes de chaque ligne et de chaque colonne soit égale au

(*) Nous avons interverti l'ordre des lignes et des colonnes.

Digitized by Google

carré de la somme de tous les termes de la table, on devra poser

$$p^2+q^2+r^2+s^2=\pm(3p^2-q^2-r^2-s^2+4rs+4sq+4qr).$$

Prenant, par exemple, le signe inférieur, on trouve

$$p^2+rs+sq+qr=0;$$

relation qui détermine linéairement s, en fonction de p, q, r.

5. En résumé, on peut donc obtenir certaines solutions des deux problèmes suivants :

PROBLÈME I. *Disposer en carré neuf nombres entiers, de telle sorte que la somme des carrés des termes de chaque colonne et de chaque ligne soit constante, et égale au carré d'un nombre donné.*

PROBLÈME II. *Disposer en carré neuf nombres entiers, de telle sorte que la somme des carrés des termes de chaque colonne et de chaque ligne soit constante, et égale au carré de la somme de ces neuf nombres.*

6. REMARQUE. — Le procédé employé ci-dessus ne permet pas d'imposer à ces neuf nombres les deux autres conditions d'Euler, à savoir : que la somme des carrés des termes de chacune des diagonales soit encore égale aux précédentes. En exprimant ces deux conditions, on trouve aisément les équations suivantes, qui ne dépendent pas, à cause de la symétrie, de l'ordre dans lequel on prend les lignes ou les colonnes :

$$(p^2-r^2)^2+(q^2-s^2)^2=2(p^2+r^2)(q^2-s^2),$$
$$2(p^2r^2+q^2s^2)=(p^2+r^2)(q^2+s^2).$$

En ajoutant, à la première, le double de la seconde, on a

$$(p^2+r^2)^2+(q^2+s^2)^2=4(p^2+r^2)(q^2+s^2).$$

On tire, de cette équation,

$$\frac{p^2+r^2}{q^2+s^2}=2\pm\sqrt{3};$$

Digitized by Google

égalité impossible à résoudre en nombres rationnels. Par conséquent, les formules proposées ne peuvent conduire à la solution du problème d'Euler, dans le cas de neuf nombres : cela ne prouve pas, il est vrai, que ce problème soit insoluble. Nous ferons, d'ailleurs, observer qu'Euler n'a pas donné d'exemple numérique de son problème, dans ce cas particulier, qui paraît plus simple que celui du carré de seize nombres.

7. Quant à la solution indiquée par Euler, on peut, en ajoutant des signes, l'écrire ainsi :

$$\begin{array}{cccc} +68, & -29, & +41, & -37, \\ -17, & +31, & +79, & +32, \\ +59, & +28, & -23, & +61, \\ -11, & -77, & +8, & +49. \end{array}$$

Sous cette forme, il est facile de vérifier que la somme des produits, terme à terme, des éléments de deux lignes ou de deux colonnes, est égale à zéro. Donc, la solution en question représente, à un facteur constant près, le tableau des coefficients d'une substitution orthogonale quaternaire, qu'Euler a donné, le premier, dans les *Novi Commentarii Petrop.*, t. XV, p. 103, et qu'il a obtenu, dit-il, « *Nulla certa methodo, sed potius quasi divinando.* » Euler ajoute : « *Si quis ergo viam directam ad hanc solutionem manuducentem investigaverit, insignia certe subsidia Analysi attulisse erit censendus.* »

8. En désignant par c_{rs} des nombres proportionnels aux coefficients de la substitution orthogonale quaternaire, on devra poser les deux équations de condition :

$$c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 + c_{41}^2 = c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{14}^2,$$
$$c_{41}^2 + c_{42}^2 + c_{43}^2 + c_{44}^2 = c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 + c_{41}^2,$$

ou deux autres équations analogues, que l'on obtiendra en plaçant la première colonne des c_{rs} à la suite des autres. Ce sont les

Digitized by Google

deux seules conditions imposées aux six paramètres de la substitution. D'ailleurs, comme rien ne prouve que les coefficients d'une substitution orthogonale quaternaire forment seuls les solutions du problème proposé, rien ne prouve, non plus, qu'Euler a connu la solution complète du problème dont il a donné l'énoncé.

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES;

par M. Édouard Lucas.

I

En supposant

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + u^2,$$

on a les deux formules :

$$6n^2 = (x+y)^4 + (x-y)^4 + (x+z)^4 + (x-z)^4 + (x+u)^4 + (x-u)^4 + (y+z)^4 + (y-z)^4 + (y+u)^4 + (y-u)^4 + (z+u)^4 + (z-u)^4,$$

$$10n^3 = (x+y)^6 + (x-y)^6 + (x+z)^6 + (x-z)^6 + (x+u)^6 + (x-u)^6 + (y+z)^6 + (y-z)^6 + (y+u)^6 + (y-u)^6 + (z+u)^6 + (z-u)^6.$$

De la première, on déduit qu'*un entier quelconque est décomposable en une somme de bicarrés, dont le nombre n'est pas supérieur à* 53 (*).

Au moyen du *postulatum* de Waring (**), on déduit, de la seconde relation, qu'*un entier quelconque est décomposable en une somme de sixièmes puissances, dont le nombre n'est pas supérieur à* 26.

(*) Théorème de M. Liouville (Le Besgue, *Exercices d'analyse numérique*, p. 113).

(**) *Un entier quelconque est décomposable en une somme de neuf cubes.*

Digitized by Google

II

On a, identiquement,

$$(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)^2$$
$$= [(b - c)(c - a)]^2 + [(c - a)(a - b)]^2 + [(a - b)(b - c)]^2 \text{ (*)}.$$

III

L'équation

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = z^2$$

admet une infinité de solutions entières (**). Les premières sont :

$$x = 3,\quad y = -1,\quad z = 11;\quad x = 8,\quad 7 = 11,\quad z = 2491;$$
$$x = 123,\quad y = 35,\quad z = 15361;\ldots\ldots$$

IV

PROPOSITIONS :

I. Il est impossible de trouver trois carrés, en progression arithmétique, dont la raison soit un carré, ou le double d'un carré.

II. Il est impossible de trouver quatre carrés en progression arithmétique.

III. Il est impossible de trouver trois carrés en progression arithmétique, dont la raison soit le sextuple d'un carré.

IV. L'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + \tfrac{1}{2}yz = u^2$$

est impossible en nombres entiers.

(*) Au moins sous le rapport de la symétrie, cette identité est plus simple que celle-ci :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)^2$$
$$= [(b + c)(c + a)]^2 + [(b + c)(a + b)]^2 + (a^2 + ac + bc - ab)^2$$

(*N. C. M.*, tome I, p. 132). (E. C.)

(**) M. Lucas nous annonce qu'il a résolu *complétement* cette équation. Nous espérons qu'il nous fera connaître ses recherches sur ce sujet difficile et curieux. (E. C.)

Digitized by Google

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES (*).

Au Rédacteur (**). — « Excusez, je vous prie, la liberté que je prends de vous envoyer les solutions de deux des questions du numéro de mars 1876 de la *Nouvelle Correspondance Mathématique.*

Vous mettrez, je l'espère, sur le compte de mon peu d'habitude des mathématiques, les nombreuses négligences qui s'y rencontrent, et

Vous daignerez croire aux sentiments de profonde estime d'une jeune étudiante,

LUCIE LEBOEUF.

Commentry (Allier), le 21 avril 1876. »

Question 93.

Le polygone formé par n *tangentes à une parabole est la moitié du polygone qui a pour sommets les points de contact.*

(ÉD. LUCAS.) (***)

On voit tout d'abord qu'à chacun des triangles dont se compose le polygone des points de contact, correspond un triangle

(*) La question 27, résolue par M. Philippin (livraison de mars), l'a été aussi par M. le capitaine Brocard. (E. C.)

(**) Tout en nous demandant si la *jeune étudiante* ne serait pas un *jeune professeur,* nous ne pouvons résister au plaisir de publier la jolie lettre et l'élégante solution dues à notre nouveau *collaborateur* (?). (E. C.)

(***) Cette question est donnée dans SALMON (édition française, p. 294), pour le cas où le polygone se réduit à un triangle. La marche à suivre, quand il s'agit d'un polygone quelconque, est identiquement la même. (EVEN.)

Digitized by Google

formé par les tangentes, *sans pénétration* de l'un de ces triangles dans les autres. Par suite, il suffit de démontrer le théorème pour le cas de trois tangentes.

Soient donc y_1, y_2, y_3 les ordonnées de trois points d'une parabole; les coordonnées des trois points d'intersection des tangentes correspondantes sont :

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{y_2y_3}{2p} & \frac{y_3y_1}{2p} & \frac{y_1y_2}{2p} \\ \frac{y_2+y_3}{2} & \frac{y_3+y_1}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} \end{array}\right|$$

La surface du triangle des tangentes est donc :

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc} \frac{y_2y_3}{2p} & \frac{y_2+y_3}{2} & 1 \\ \frac{y_3y_1}{2p} & \frac{y_3+y_1}{2} & 1 \\ \frac{y_1y_2}{2p} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \end{array}\right|,$$

ou

$$S=-\frac{1}{8p}\left|\begin{array}{ccc} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{array}\right|.$$

Mais la surface S_1 du triangle des points de contact est :

$$S_1=\frac{1}{4p}\left|\begin{array}{ccc} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{array}\right|.$$

Par suite :

$$S=-\frac{S_1}{2}.$$

C. Q. F. D.

Lucie Leboeuf.

Digitized by Google

Un calcul algébrique, très-simple, permet de voir que ces diverses valeurs satisfont aux équations données.

Nous sommes persuadé que les solutions précédentes sont comprises parmi celles qui ont été données au XVII^me^ et au XVIII^me^ siècle, par les divers Mathématiciens français cités plus haut. Mais, quand il s'agit de carrés magiques, il est plus facile de retrouver une solution que d'en lire l'exposition dans un ouvrage un peu ancien.

SUR L'EMPLOI DU CALCUL SYMBOLIQUE, DANS LA THÉORIE DES SÉRIES RÉCURRENTES (*);

par M. Édouard Lucas, professeur au Lycée de Moulins.

1. Désignons par a et b les deux racines de l'équation

$$x^2 = x + 1; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

nous aurons

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad a+b=1, \quad ab=-1, \quad a-b=\sqrt{5}.$$

Posons, de plus,

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}, \quad v_n = a^n + b^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Le calcul des valeurs de u_n et de v_n, pour les valeurs correspondantes, entières et positives, de n, à partir de $n = 0$, donne les résultats suivants :

n : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...,
u_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...,
v_n : 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ...

(*) Voir *N. C. M.*, t. II, p. 70.

Digitized by Google

Les valeurs de u_n sont les termes de la suite connue sous le nom de *série de Lamé;* nous y avons ajouté les deux termes 0 et 1. On sait que l'illustre savant a fait servir cette série à la détermination d'une limite supérieure du nombre des opérations à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers. On a, en effet, le théorème remarquable que voici :

THÉORÈME. *Le nombre des divisions à effectuer, pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers, est toujours moindre que cinq fois le nombre des chiffres du plus petit des deux nombres donnés* (*).

Je ferai cependant observer que cette série a été définie, dès le XIII^me^ siècle, par Léonard de Pise (**).

2. Les formules (2) donnent encore, pour les valeurs négatives et entières de n, les relations

$$u_n + (-1)^n u_{-n} = 0, \quad v_n - (-1)^n v_{-n} = 0. \quad . \quad . \quad (3)$$

On déduit, d'ailleurs, de l'équation (1) :

$$a^{n+2} = a^{n+1} + a^n, \quad b^{n+2} = b^{n+1} + b^n.$$

Par suite, en ajoutant et retranchant ces identités :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad v_{n+2} = v_{n+1} + v_n. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ces formules représentent la même loi de formation pour les deux séries récurrentes considérées, lesquelles ne diffèrent que par les conditions initiales.

Mais, de ces deux séries, celle de Lamé, ou plutôt de Léonard

---

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, année 1844.

(**) IL LIBER ABBACI *di Leonardo Pisano, pubblicato secondo la lezione del Codice magliabechiano, da B. Boncompagni*, Rome, 1867; p. 284, à la marge.

Digitized by Google

de Pise, doit être considérée comme *fondamentale;* elle contient la seconde, puisque l'on a

$$\frac{u_{2n}}{u_n} = v_n.$$

On voit ainsi que u_n et v_n sont toujours des nombres entiers. De plus :

$$v_n = u_{n-1} + u_{n+1}, \quad 5u_n^2 - v_n^2 = \pm 4. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

D'après la seconde relation, u_n et v_n ne peuvent avoir d'autre facteur commun que 2; elle donne lieu aussi à d'importantes conséquences sur la forme des diviseurs de v_n, dont nous parlerons plus tard.

3. En développant les valeurs de u_n et de v_n, par la formule du binôme, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} 2^{n-1}u_n &= \frac{n}{1} + 5\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + 5^2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} + \cdots \\ 2^{n-1}v_n &= 1 + 5\frac{n(n-1)}{1.2} + 5^2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + \cdots \end{aligned}\right\} (7)$$

On a, par conséquent, suivant le module p (p désignant un nombre premier impair), les *congruences* (*) :

$$2^{p-1}u_p \equiv 5^{\frac{p-1}{2}}, \quad 2^{p-1}v_p \equiv 1 \pmod{p};$$

et, par l'application du théorème de Fermat, en supposant p différent de 5,

$$u_p \equiv \pm 1, \quad v_p \equiv 1 \pmod{p}.$$

(*) Voir la première note, p. 32 (*N. C. M.*, t. II, janvier 1876). Avant M. Catalan, Legendre avait trouvé cette dénomination fort bizarre. On lit, en effet, à la page 12 du second Supplément à l'*Essai sur la théorie des nombres* : « Ces équations, entre des restes provenant de la division de plusieurs nombres par un même nombre premier, se traitent comme les équations ordinaires, sans qu'il soit besoin des signes nouveaux d'égalité, ni des dénominations nouvelles assez *incongrues*, dont quelques géomètres font usage. »

Digitized by Google

On prendra le signe + ou le signe —, suivant que le nombre 5 sera résidu ou non résidu quadratique de p. Conséquemment, u_p n'est divisible par 5 que si $p = 5$. De plus, v_p n'est jamais un multiple de 5.

4. Quels que soient les entiers k et n, positifs ou négatifs, on a la formule

$$u_{n+2k} = v_k u_{n+k} - (-1)^k u_n,$$

qu'il est facile de vérifier au moyen des expressions de u_n et de v_n, données plus haut; on peut écrire cette relation sous la forme symbolique

$$u_{n+2k} = u^n [v_k u^k - (-1)^k]^1.$$

Dans cette égalité, changeons n en $n + k$; multiplions, par v_k, les deux termes du résultat obtenu; ajoutons les deux termes de la formule précédente, multipliés respectivement par $-(-1)^k$: nous obtenons la formule symbolique

$$u_{n+4k} = u^n [v_k u^k - (-1)^k]^2.$$

En général,

$$u_{n+2kp} = u^n [v_k u^k - (-1)^k]^p, \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

relation dans laquelle on remplacera, après le développement, les puissances de u par des indices.

En résolvant, par rapport à u_{n-k}, l'équation qui nous a servi de point de départ, on obtient

$$(-1)^{kp} u_{n-kp} = u^n [v_k - u^k]^p. \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Les relations (8) et (9) donnent les formules inscrites sous le n° IV (*N. C. M.*, t. II, p. 75), en supposant $k = 1$; elles se transforment encore, l'une dans l'autre, par le changement du signe de k, ou par le changement de u en $\frac{1}{u}$, en tenant compte des égalités (3).

(*) On peut déduire ces formules de celles qui donnent le sinus ou le cosinus de $a \pm b$.

Digitized by Google

5. On a les formules

$$\left.\begin{aligned} u_{n+k} &= u_k u_{n+1} + u_{k-1} u_n, \\ u_{n+k} &= u_{k+1} u_{n+1} - u_{k-1} u_{n-1}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

la seconde se déduit de la première, en y remplaçant u_n en fonction de u_{n+1} et de u_{n-1}. D'ailleurs, en considérant u_k et u_{k-1} comme des constantes, on a, symboliquement,

$$u_{n+k} = u^n [u_k u + u_{k-1}].$$

Par suite, comme précédemment, on a la formule générale :

$$u_{n+kp} = u^n [u_k u + u_{k-1}]^p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

La seconde des formules (10) donne lieu aux mêmes développements.

6. Considérons une série récurrente quelconque, donnée par la *loi de récurrence* :

$$U_{n+k} = A_0 U_{n+p} + A_1 U_{n+p-1} + \cdots + A_p U_n,$$

quelle que soit la valeur de n. Posons, pour abréger,

$$\varphi(u) = A_0 u^p + A_1 u^{p-1} + \cdots + A_{p-1} u + A_p :$$

nous dirons que les symboles U^k et $\varphi(U)$ sont *équivalents*. Nous allons démontrer que, dans les calculs, on peut les remplacer l'un par l'autre. En effet, dans la relation donnée, changeons successivement n en $n+1$, $n+2$, ..., $n+p$; ajoutons les résultats obtenus, après les avoir respectivement multipliés par A_p, A_{p-1}, ... A_1, A_0; nous obtenons l'égalité symbolique :

$$U_{n+2k} = U^n [\varphi(U)]^2.$$

De même, nous obtenons la formule générale :

$$U_{n+kp} = U^n [\varphi(U)]^p.$$

Par conséquent, si les symboles U^k et $\varphi(U)$ sont équivalents,

Digitized by Google

il en est de même de leurs puissances entières; on démontrera également que, si les symboles U^{k_1} et $\varphi_1(U)$, U^{k_2} et $\varphi_2(U)$, ... sont respectivement équivalents, il en sera encore de même de leurs sommes, de leurs puissances, de leurs produits respectifs. On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. *Si les fonctions entières* $f_1(U)$, $f_2(U)$, ..., *et* $\varphi_1(U)$, $\varphi_2(U)$, ... *sont symboliquement équivalentes, deux à deux, il en est de même de toute fonction entière, composée d'une manière analogue, avec les deux séries de quantités, et l'on a ainsi l'équation symbolique :*

$$\Psi(f_1, f_2, ..., f_n) = \Psi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n).$$

On peut donner à ces résultats une extension considérable, que nous laisserons de côté pour l'instant, au moyen des théories de l'élimination, des déterminants et du calcul des différences. Nous ferons seulement observer que les résultats qui précèdent s'appliquent principalement aux séries récurrentes, déduites du calcul de certaines fonctions symétriques des racines des équations algébriques.

Nous démontrerons, dans de prochains articles, l'importance des considérations précédentes, par leur application : à la théorie des nombres premiers; à la recherche des nombres premiers très-grands, *sans qu'il soit nécessaire de connaître les nombres premiers inférieurs;* à des démonstrations, relativement simples, de ces principes, que les formes quadratiques ou linéaires données renferment une infinité de nombres premiers; aux divers principes, énoncés par Fermat, sur la théorie des nombres; et, enfin, à l'exposition d'un *criterium* qui permet de décider dans quels cas une équation numérique donnée est ou n'est pas réductible.

Digitized by Google

Extraits d'une lettre de M. Gerono. — « Le bien regrettable Le Besgue a démontré (*Nouvelles Annales*, 1863, p. 68) que : *le produit*

$$p(p+q)(p+2q)(p+3q)$$

ne saurait être un carré. Il en résulte, comme cas particulier, qu'*il est impossible de trouver quatre carrés en progression arithmétique*..... (*). »

« La question de *trouver les points où une droite* CD *coupe une hyperbole* (équilatère ou non), *dont on donne un point* A *et les asymptotes* ODx, OCy (**), revient, tout simplement, à cette question de Géométrie élémentaire, dont la solution est bien connue :

Diviser une droite en deux segments, dont le produit soit égal à un carré donné..... »

Extrait d'une lettre de M. Éd. Lucas. — « Je ne suis pas non plus de votre avis sur le théorème de Lamé (***); j'admets parfaitement qu'on ne soit pas obligé de faire toutes les divisions, pour les plus petits nombres; mais, si vous avez à chercher le plus grand commun diviseur, de deux nombres ayant une *trentaine* de chiffres chacun, ou même un *mille* (comme j'en fais en ce moment), que ferez-vous? »

Réponse. — On peut toujours supposer que les nombres donnés, A, B, sont *impairs* : dans le cas contraire, on supprimerait le facteur 2. Cela fait, le reste, correspondant à *l'un des deux quotients entiers de* A *par* B, a la forme $2^{\lambda}C$, C étant *impair*. On divisera donc B par C; et ainsi de suite.

Ce que je viens de dire du nombre 2 est applicable à 3, 5, 11, ... Après cette modification à la *mauvaise* règle en usage, que devient le théorème de mon illustre et bien regretté Professeur?

(*) *N. C. M.*, t. II, p. 102.

(**) *Ibidem*, p. 105.

(***) Voir ci-dessus, p. 202.

Digitized by Google

Et, en négligeant les quantités du cinquième ordre :

$$\frac{S_1 + S_2}{6} = \frac{A}{6}a^3 + \frac{B}{12}a^4,$$

ou

$$\frac{S_1 + S_2}{6} = S.$$

Ce qui démontre le théorème. ED. GUILLET.

Autre solution par M. De Tilly.

Question 84.

On prend les milieux des droites qui joignent les pieds des hauteurs d'un triangle; et, par chacun de ces points, l'on abaisse une perpendiculaire sur le côté correspondant. Démontrer que ces trois perpendiculaires se coupent en un même point.

(ÉDOUARD LUCAS.)

Soient : AA', BB', CC' les hauteurs du triangle ABC; *aa'*, *bb'*, *cc'* les perpendiculaires abaissées, des milieux *a*, *b*, *c* des droites B'C', C'A', A'B', sur les côtés de ABC.

Comme AA', BB', CC' sont les bissectrices du triangle A'B'C', et que les angles *caa'*, *baa'* sont, respectivement, égaux à *b*A'A, *c*A'A; les perpendiculaires *aa'*, *bb'*, *cc'* sont bissectrices des angles *bac*, *cba*, *acb*; donc ces droites concourent en un même point.

MODARD, élève de l'Athénée d'Arlon.

Autres solutions par M^lle^ Lucie Lebœuf (*) et M. H. Van Aubel.

(*) Comme nous l'avions supposé, cette *jeune étudiante* est un *jeune professeur* (voir p. 153). (E. C.)

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

129. Résoudre, complétement, l'équation qui donne les abscisses des points d'inflexion de la courbe représentée par

$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 = 0\ (*). \qquad \text{(E. C.)}$$

130. A, B, C étant les trois angles d'un triangle rectiligne, on a

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin^2 A\cos B - \sin^2 B\cos A} = \frac{\sin(B-C)}{\sin^2 B\cos C - \sin^2 C\cos B} = \frac{\sin(A-C)}{\sin^2 A\cos C - \sin^2 C\cos A}. \qquad \text{(H. Brocard.)}$$

131. A, B, C étant les trois angles d'un triangle rectiligne, démontrer les formules

$$\sin^2 A + \sin B\sin C\cos A = \sin^2 B + \sin A\sin C\cos B = \sin^2 C + \sin A\sin B\cos C. \qquad \text{(H. B.)}$$

132. Théorème. On donne un point C et deux droites Ox, Oy. On mène les transversales CAB, CA'B', de manière que le quadrilatère ABA'B' soit inscriptible. Le lieu du centre I, de la circonférence ABA'B', est une ligne droite. (Ém. Lemoine.)

133. Pour quelles valeurs de p et de q l'équation

$$x^5 + y^5 = 2^p.3^q.z^5,$$

est-elle résoluble en nombres entiers? Déterminer les plus petites solutions, en supposant l'inconnue z égale à un nombre pair ou à un nombre impair. (Éd. Lucas.)

(*) Cette équation est $x^3 - 12x^2 + 3 = 0$.

Digitized by Google

134. Si x, y, z désignent des nombres entiers satisfaisant à l'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5,$$

on obtient une nouvelle solution par les formules

$$X = x^9 - y^9 + 5x^5y^5(2x^5 + y^5),$$
$$Y = y^9 - x^9 + 5y^5x^5(2y^5 + x^5),$$
$$Z = 5xyz(x^6 + x^5y^5 + y^6).$$

Faire voir qu'elles sont plus générales que les formules attribuées à Euler. (É. L.)

135. Trouver des formules analogues pour la résolution de l'équation

$$Ax^5 + By^5 + Cz^5 = 5Dxyz. \qquad (É. L.)$$

136. Si l'on pose

$$(x^2 + ay^2)^n = X^2 + aY^2,$$

le hessien de la fonction

$$X + \lambda Y,$$

est aussi de la forme $x^2 + ay^2$. — Que peut-on en conclure dans le cas particulier de $n = 3^2$? (É. L.)

137. S_n désignant la somme des x premiers nombres, élevés à la puissance n; démontrer que, pour $x = -\frac{1}{2}$, le quotient de S_{2n} par S_2 est égal à

$$(-1)^{n-1} \cdot 6 \cdot \frac{2^{2n-1} - 1}{2^{2n-2}} B_n,$$

B_n désignant le $n^{ième}$ nombre bernoullien. (É. L.)

138. Déterminer directement, au moyen de la table des nombres premiers, le dénominateur du $n^{ième}$ nombre de Bernoulli. Démontrer, en particulier les propositions suivantes :

1° Si p et q sont premiers entre eux, le dénominateur de B_{pq} est divisible par le produit des dénominateurs de B_p et de B_q.

2° Si $2p + 1$ est un nombre premier, ce nombre divise le dénominateur de B_p. (É. L.)

Digitized by Google

139. Quelle est la forme linéaire des diviseurs premiers des numérateurs de B_p? (É. L.)

140. Développer, suivant les puissances de x, la fonction $\cos(2p \arcsin x)$. Conclure, de ce développement, l'*identité*

$$1 - \frac{2^2n^2}{2} + \frac{2^4n^2(n^2-1^2)}{2.3.4} - \frac{2^6n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{2.3.4.5.6}$$
$$+ \frac{2^8n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{2.3.4.5.6.7.8} - \dots = \pm 1 \ (*).$$

(É. L.)

141. Trouver la somme des inverses des termes de rang pair ou de rang impair, de la série de Lamé. (É. L.)

142. Former le premier membre de l'équation ayant pour racines

$$x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \dots .}}} \qquad \text{(É. L.)}$$

143. Trouver le lieu du centre du triangle équilatéral dont les sommets sont situés sur les trois droites fixes. (É. L.)

144. Si par le pôle de l'une des courbes ayant pour équation

$$r^n = a^n \sin n\theta \ (**),$$

nommées *orthogénides* par M. Allégret, on mène une droite, les tangentes à la courbe, aux points d'intersection avec la droite, forment un triangle équilatéral, lorsque $n = \pm\frac{1}{3}$. — Trouver le lieu du centre de ce triangle, si la droite tourne autour du pôle.

(É. L.)

(*) Proposée par M. Réalis, dans le *Giornale di Matematiche* (1871), puis dans les *Nouvelles Annales* (février 1876).

(**) Voir un article de M. Haton de la Goupillière, dans les *Annales de Mathématiques*, mars 1876.

Digitized by Google

145. Quelles sont les séries dans lesquelles la somme des carrés des $2n + 1$ premiers termes est égale à la somme des $4n + 1$ premiers termes? (É. L.)

146. Trouver trois nombres entiers, ne contenant, chacun, aucun diviseur carré, et tels, que leurs produits, deux à deux, soient des carrés. (E. C.)

147. THÉORÈME I. Si l'équation

$$x^m - \frac{m}{1}A_1x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}A_2 - \cdots \pm mA_{m-1}x \mp A_m = 0 \quad (1)$$

a toutes ses racines positives, A_1, A_2, ... A_{m-1}, A_m vérifient les inégalités

$$A_1^2 > A_2, \quad A_2^3 > A_3^2, \quad A_3^4 > A_4^3, \ldots A_{m-1}^m > A_m^{m-1}. \quad . \quad . \quad (2)$$

COROLLAIRE. Si quelqu'une des inégalités (2) n'est pas vérifiée, l'équation (1) a des racines imaginaires (*).

THÉORÈME II. L'équation (1) a, au moins, autant de racines imaginaires qu'il y a de variations de signes dans la suite des m quantités :

$$A_1^2 - A_2, \quad A_2^3 - A_3^2, \quad A_3^4 - A_4^3, \ldots A_{m-1}^m - A_m^{m-1}, A_m.$$

(S. REALIS, ingénieur à Turin.)

(*) Le théorème I a une grande analogie avec l'un de ceux que nous avons publiés, autrefois, dans les *Comptes rendus*, puis dans le *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*. Cependant, il n'y a pas *identité*. En effet, d'après ce dernier théorème, *si toutes les racines de l'équation* (1) *sont positives, on a*

$$A_1^m > A_m, \quad A_2^m > A_m^2, \quad A_3^m > A_m^3, \ldots, A_{m-1}^m > A_m^{m-1}. \quad . \quad (3)$$

Or, comme il est facile de le prouver, *les inégalités* (3) *résultent des inégalités* (2); mais *la réciproque n'est pas vraie.* (E. C.)

Digitized by Google

PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE TRICIRCULAIRE ET TÉTRASPHÉRIQUE;

par M. Éd. Lucas, professeur au Lycée de Moulins (Allier).

§ I.

DE LA PUISSANCE D'UN POINT, PAR RAPPORT A UN CERCLE.

Nous énoncerons d'abord les propositions suivantes :

Théorème I. *Le lieu des points tels que la somme de leurs puissances, par rapport à* n *cercles, multipliées respectivement par des facteurs constants, soit constante, est un cercle ayant pour centre, le centre des distances proportionnelles des centres des* n *cercles donnés.*

Nous admettons, dans un but de généralisation, la notion du cercle imaginaire, ayant un centre réel : comme nous n'opérerons habituellement que sur le carré du rayon de ce cercle, il n'y aura pas d'ambiguïté possible. Cette notion permet de simplifier l'exposé des propriétés des cercles; on peut la remplacer par une autre équivalente, ne présentant rien d'imaginaire (*).

Théorème II. *Les puissances d'un point, par rapport à quatre cercles quelconques, sont liées entre elles par une équation du premier degré, contenant un terme constant, et dans laquelle la somme des coefficients des puissances est nulle.*

(*) Chasles, *Traité de Géométrie supérieure*, pp. 547 et suiv.

Digitized by Google

En désignant par x_1, x_2, x_3, x_4, les puissances d'un point, par rapport aux quatre cercles ayant pour centres O_1, O_2, O_3, O_4, on a, en effet :

$$x_1 . O_2O_3O_4 - x_2 . O_3O_4O_1 + x_3 . O_4O_1O_2 - x_4 . O_1O_2O_3 = K,$$

$O_1 O_2 O_3$ désignant l'aire du triangle des trois centres, prise avec le signe convenable (*).

Donc, *si par les centres de quatre cercles situés dans un même plan, on élève des perpendiculaires, de longueurs respectivement proportionnelles à la puissance d'un point quelconque du plan, par rapport aux quatre cercles, le volume du tétraèdre formé par les extrémités de ces perpendiculaires est constant.*

En particulier, *si les quatre cercles sont orthogonaux à un cinquième cercle, les extrémités de ces perpendiculaires sont dans un même plan; et réciproquement.*

Théorème III. *Les puissances d'un point, par rapport à cinq cercles quelconques d'un plan, sont liées entre elles par une équation homogène, du premier degré, dans laquelle la somme des coefficients est nulle* (**).

On a, en particulier, la proposition suivante :

Les puissances d'un point quelconque, par rapport à trois cercles ayant le même axe radical, sont liées entre elles par une équation homogène, du premier degré, dans laquelle la somme des coefficients est nulle.

Réciproquement : *si les puissances non proportionnelles de deux points, par rapport à trois cercles, sont liées entre elles par*

(*) Pour la détermination de ce signe, ainsi que pour l'application de la règle des signes aux évaluations des aires, voir mes *Théorèmes de Géométrie supérieure*, Moulins, 1874.

(**) *Nouvelles Annales*, mai 1876, p. 205.

Digitized by Google

une équation de cette nature, les trois cercles ont le même axe radical.

Si l'on a, par exemple,

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0,$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0,$$

on en déduit

$$\frac{O_2O_3}{p_1} = \frac{O_3O_1}{p_2} = \frac{O_1O_2}{p_3};$$

et, lorsque les cercles C_1, C_2, C_3, se coupent :

$$\frac{\sin C_2C_3}{p_1r_1} = \frac{\sin C_3C_1}{p_2r_2} = \frac{\sin C_1C_2}{p_3r_3}.$$

Cette relation, dans laquelle C_i représente le cercle ayant pour centre O_i, et pour rayon r_i, s'obtient en exprimant, de deux manières différentes, l'aire des triangles ayant pour bases les distances des trois centres, et pour sommet l'un des points communs aux trois cercles.

Lorsque l'on a

$$p_1r_1 = \pm p_2r_2,$$

le cercle C_3 divise l'angle des deux premiers en deux parties égales. Steiner a appelé *cercles de commune puissance, directe et inverse,* ces deux cercles bissecteurs, qui ont pour centres les centres de similitude des deux cercles donnés. Cependant, lorsque les cercles ne se coupent pas, Steiner remplace le cercle bissecteur, devenu imaginaire, par un cercle réel, de même centre, en changeant le signe du carré du rayon (*).

(*) Steiner, *Journal de Crelle*, t. I, p. 161.

Digitized by Google

§ II.

DE L'ANGLE DE DEUX CERCLES.

Lorsque deux cercles se coupent en un point A, l'angle intérieur du triangle O_1AO_2, égal à l'angle des tangentes aux deux cercles, menées par le point A, est donné par la formule

$$\cos A = \frac{r_1^2 + r_2^2 - \overline{O_1O_2}^2}{2r_1r_2}.$$

Nous définissons l'angle A des deux cercles, en les supposant parcourus dans le même sens de circulation.

Si les deux cercles ne se coupent pas, la valeur du cosinus, toujours réelle, devient supérieure à l'unité en valeur absolue ; l'arc correspondant prend la forme $A = \alpha\sqrt{-1}$, α étant réel. On sait, par le développement, toujours convergent, du sinus et du cosinus, que les formules ordinaires d'addition et de multiplication des arcs s'appliquent encore, lorsque l'on remplace les arcs réels par des arcs imaginaires. Nous conserverons donc, dans un but de généralisation et d'abréviation, cette mesure de l'angle, même lorsque les cercles ne se coupent pas.

Dans l'étude des propriétés des cercles, M. Casey (*) a introduit, au lieu de cet élément, le carré de la tangente commune aux deux cercles; ce carré devient négatif, si les cercles sont intérieurs l'un à l'autre; mais nous préférons conserver la notion de l'angle, afin de constater, d'une façon plus complète, l'analogie entre les propriétés des systèmes de cercles et celles des systèmes de droites. On a, d'ailleurs, pour les carrés des tangentes communes T_e et T_i, soit extérieure, soit intérieure :

$$T_e^2 = 4r_1r_2 \sin^2\frac{A}{2}, \quad T_i^2 = -4r_1r_2 \cos^2\frac{A}{2}.$$

(*) Salmon, *Sections coniques*, p. 165 de la traduction française.

Digitized by Google

§ III.

SUR LA MÉTHODE D'INVERSION.

Nous énoncerons, sur la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques, les propriétés suivantes, qui servent de fondement à la théorie des coordonnées tricirculaires et des figures anallagmatiques.

I. La figure formée par un système de cercles ayant même axe radical se transforme, par inversion, en une figure formée de cercles concentriques, si l'on prend pour centre d'inversion l'un des *points* ou *cercles-limites* du système (*).

Les trajectoires orthogonales du système sont, en effet, des cercles passant par les points-limites, et dont les transformées deviennent des droites concourantes.

Il résulte immédiatement, de ce principe, que si un cercle mobile coupe deux cercles fixes, sous deux angles constants, il coupe aussi, sous des angles constants, tous les cercles qui ont même axe radical, et enveloppe deux cercles du système.

II. La figure formée par un système de deux cercles se transforme en cercles égaux, lorsque l'on prend, pour pôle d'inversion, un point quelconque de l'un des cercles bissecteurs.

En effet, ce cercle devient une droite, dans la transformation; et, si deux cercles coupent leur axe radical sous le même angle, ces cercles sont égaux.

De là résulte que l'on peut transformer un système de trois cercles en cercles égaux, en prenant pour pôle de transformation l'un des deux points d'intersection des trois cercles bissecteurs intérieurs. Ces deux points sont réciproques par rapport au cercle orthogonal du système des trois cercles, et sont

---

(*) PONCELET, *Traité des propriétés projectives*, I, n° 76.

Digitized by Google

les *points-limites* du système des deux cercles inscrits. On a un théorème analogue pour les cercles ex-inscrits.

III. La figure formée par un système de deux cercles ne change pas, si l'on prend, pour cercle d'inversion, un cercle orthogonal quelconque; mais chacun de ces cercles se transforme dans l'autre, si l'on prend, pour cercle d'inversion, l'un des cercles bissecteurs.

Dans ce dernier cas, tout cercle qui coupe, sous des angles égaux, les deux cercles donnés, ne change pas dans la transformation, et, par conséquent, coupe à angle droit le cercle bissecteur correspondant. Donc, le lieu des centres des cercles qui coupent, sous un même angle, trois cercles donnés, est l'axe radical des cercles bissecteurs (*).

Si l'on prend, pour cercle d'inversion d'un système de trois cercles, l'un des cercles bissecteurs de deux d'entre eux, C_1 et C_2, les quatre cercles tangents, correspondant à ces deux cercles et au troisième C_3, ne changent pas dans la transformation; mais il n'en est pas de même de C_3, qui devient un autre cercle. On démontre donc, d'une façon *intuitive*, le théorème de Feuerbach, complété par le docteur Hart, et que l'on peut énoncer ainsi :

THÉORÈME. *Les huit cercles tangents à trois cercles donnés sont, quatre par quatre, tangents aux six cercles obtenus par l'inversion de l'un des trois cercles donnés, si l'on prend pour cercle d'inversion, l'un des cercles bissecteurs des deux autres cercles donnés.*

Les propriétés précédentes sont soumises à la règle des signes, et s'appliquent, dans l'espace, à un système de deux, trois, quatre sphères.

(*) Voir une autre application du principe III; *N. C. M.*, t. II, p. 88.

Digitized by Google

§ IV.

DE LA DISTANCE CIRCULAIRE D'UN POINT A UN CERCLE.

On doit observer que la puissance d'un point, par rapport à un cercle passant par un point fixe, et dont le rayon croît indéfiniment, augmente elle-même indéfiniment; pour ce motif, nous avons remplacé cette notion de la puissance par une autre, qui est équivalente : *le rapport de cette puissance au diamètre du cercle considéré.* Dans le cas où le cercle se rapproche indéfiniment de la droite, ce rapport, que nous appellerons la *distance circulaire du point,* a pour limite la distance du point à la droite. Cela posé, on a les propositions suivantes :

Théorème I. *Le lieu des points, dont le rapport,* k, *des distances à deux cercles est constant, est un cercle passant par les points d'intersection des cercles donnés, et qui divise leur angle en deux autres dont le rapport des sinus est égal à* k.

Théorème II. *Le rapport des distances d'un point à deux cercles ne change pas, dans la transformation par rayons vecteurs réciproques.*

La position d'un point, dans le plan de deux cercles, étant déterminée par ses distances x et y aux deux cercles; on peut étudier commodément, avec ce système de *coordonnées bicirculaires,* les propriétés des *cubiques circulaires* et des *quartiques bicirculaires,* possédant un axe de symétrie, comme la strophoïde, les ovales de Descartes et de Cassini. On obtient ainsi des formules entièrement analogues à celles que l'on connaît dans le système des coordonnées cartésiennes.

§ V.

DU SYSTÈME DES COORDONNÉES TRICIRCULAIRES.

Considérons un cercle fixe, ayant O pour centre, et R pour rayon, que nous appellerons *cercle radical;* désignons par x, y, z, les distances ou *coordonnées circulaires* d'un point du plan, par

Digitized by Google

rapport à trois cercles X, Y, Z, coupant orthogonalement le cercle radical. L'équation d'un cercle quelconque, coupant orthogonalement le cercle O, peut s'écrire sous la forme linéaire et homogène :

$$lx + my + nz = 0.$$

Nous désignerons, sous le nom de *cycle*, tout cercle coupant orthogonalement le cercle radical, en réservant la dénomination ordinaire pour un cercle quelconque du plan ; et, sous le nom de *tricycle de référence*, l'ensemble des trois cycles X, Y, Z.

L'équation d'un cercle quelconque est

$$lx + my + nz + p = 0,$$

puisque ce cercle est toujours concentrique à un cycle ; cependant, nous ne nous servirons point de cette équation, à cause de son défaut d'homogénéité : nous ne considérerons donc que des équations homogènes.

Ainsi, dans la plupart des cas, nous pourrons remplacer les coordonnées d'un point par des quantités proportionnelles : on construira le point dont les coordonnées sont proportionnelles à x_1, y_1, z_1, par l'intersection des cycles représentés par

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}.$$

Les trois coordonnées d'un point ne sont pas arbitraires : elles sont soumises à une *relation fondamentale*, dont il sera parlé plus loin. Nous devons faire observer que, si l'on connaît seulement les coordonnées proportionnelles d'un point, la position de ce point n'est pas nettement définie : en effet, les coordonnées de *deux points réciproques*, par rapport au cercle radical, sont respectivement proportionnelles. Il est vrai que, le plus souvent, nous limiterons l'étendue du plan, soit à la région intérieure, soit à la région extérieure du cercle radical. Ce cercle joue, dans cette théorie, le rôle de la *droite de l'infini* dans la théorie linéaire du plan. (*La suite prochainement.*)

Digitized by Google

inscrit, sont situés sur une droite, parallèle au côté moyen ; et la distance de ces deux points est égale au tiers de la différence entre ce côté moyen et l'un quelconque des deux autres.

(L.)

153. Traiter, par le système des coordonnées tricirculaires, le problème de Malfatti, généralisé par Steiner. (Éd. Lucas.)

154. Donner les rayons des cercles circonscrits au triangle de référence. (É. L.)

155. Quelles sont les conditions pour que l'équation générale du second degré représente un système de deux cercles réciproques?—Montrer l'analogie avec la théorie des cônes de révolution. (É. L.)

156. Trouver l'angle des tangentes communes, d'un système de deux cercles réciproques, donné par l'équation générale du second degré. (É. L.)

157. Trouver l'équation des cycles joignant les sommets du tricycle aux milieux des côtés opposés. (É. L.)

158. Trouver les rayons du système des deux cercles réciproques, conjugué au tricycle de référence. (É. L.)

170. Théorème. Dans tout tétraèdre tronqué, à bases parallèles, les droites qui joignent le milieu d'une arête latérale au point de concours de la face opposée, se coupent en un même point. (Mister, Répétiteur à l'École du Génie civil.)

161. Intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx} = a - bx\sqrt{y}.$$ (Mister.)

Rectification.

Les questions 113, 127 sont de M. J. Neuberg. (P. M.)

Digitized by Google

PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE TRICIRCULAIRE ET TÉTRASPHÉRIQUE;

par M. Édouard Lucas, professeur au Lycée de Moulins.

(*Suite*, voir t. II, p. 225.

§ VI.

PROPRIÉTÉS ANGULAIRES DU TRICYCLE DE RÉFÉRENCE.

En nous reportant à l'interprétation du coefficient angulaire k, dans l'équation $x = ky$, et à la construction du point P dont les coordonnées tricirculaires sont proportionnelles à des nombres donnés, nous obtenons, en désignant par A, B, C les sommets du tricycle,

$$\frac{\sin PAB}{\sin PAC} = \frac{z_1}{y_1},$$

et deux relations analogues, desquelles on déduit le théorème suivant :

Théorème I. *Si l'on joint le point* P, *pris dans le plan d'un tricycle, aux trois sommets, par des cycles* AP, BP, CP, *on a la relation*

$$\frac{\sin PAB \cdot \sin PBC \cdot \sin PCA}{\sin PBA \cdot \sin PCB \cdot \sin PAC} = -1.$$

La réciproque de ce théorème est vraie. On peut, aussi, généraliser ce théorème et l'appliquer à un polycycle, ainsi que l'a fait Carnot, pour les polygones plans ou gauches (*).

(*) Carnot. *Géométrie de position*, p. 301.

Digitized by Google

THÉORÈME II. *Si, par les sommets d'un tricycle, on mène trois cycles se coupant en un même point; les trois cycles menés par les sommets, et faisant, avec les cycles bissecteurs correspondants, les mêmes angles que les premiers, se rencontrent aussi en un même point.*

THÉORÈME III. *Les cycles, abaissés orthogonalement des sommets sur les côtés opposés d'un tricycle, se rencontrent en un même point.*

Ces cycles ont, en effet, pour équations :

$$y \cos B = z \cos C,$$
$$z \cos C = x \cos A,$$
$$x \cos A = y \cos B.$$

On a, de même, le théorème suivant, dans lequel il n'est pas nécessaire de supposer que les deux tricycles ont le même cercle radical.

THÉORÈME IV. *Si deux triangles circulaires sont tels que les cercles, abaissés perpendiculairement des sommets du premier sur les côtés du second, se rencontrent aux mêmes points; réciproquement les cycles, abaissés perpendiculairement des sommets du second sur les côtés du premier, se coupent aux mêmes points.*

§ VII.

DU CENTRE DES DISTANCES CIRCULAIRES PROPORTIONNELLES.

Nous remarquerons d'abord que les coordonnées du *centre radical* sont inversement proportionnelles aux rayons r_1, r_2, r_3 des cycles de coordonnées, et que, par suite, le cycle ayant pour équation

$$lx + my + nz = 0,$$

devient un diamètre du cercle radical, lorsque l'on a

$$\frac{l}{r_1} + \frac{m}{r_2} + \frac{n}{r_3} = 0.$$

Digitized by Google

Cela posé, l'équation du cycle passant par deux points donnés P_1, P_2, analogue à celle de la droite qui joint deux points, en coordonnées trilinéaires, est vérifiée pour le point dont les coordonnées sont proportionnelles à

$$x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2, \quad z_1 + z_2,$$

que nous appelons le *point milieu* du cycle P_1P_2.

La construction géométrique de ce point se fait de la manière suivante, aussi simple qu'élégante, qui m'a été indiquée par M. Alfred Chervet, élève de l'École normale. Ce point est défini par les équations

$$\frac{x}{x_1 + x_2} = \frac{y}{y_1 + y_2} = \frac{z}{z_1 + z_2};$$

dont on déduit

$$\frac{r_1x - r_2x}{r_1(x_1 + x_2) - r_2(y_1 + y_2)} = \frac{r_2y - r_3z}{r_2(y_1 + y_2) - r_3(z_1 + z_2)}.$$

Si l'on transforme en coordonnées cartésiennes, on trouve l'équation d'une droite qui joint le centre radical au milieu de la droite P_1P_2. De même, le point qui divise le cycle P_1P_2 dans le rapport de p_2 à $-p_1$, et dont les coordonnées sont proportionnelles aux quantités

$$p_1x_1 + p_2x_2, \quad p_1y_1 + p_2y_2, \quad p_1z_1 + p_2z_2,$$

s'obtient par l'intersection du cycle P_1P_2 et de la droite menée, du centre radical, au point qui divise la droite P_1P_2 dans le rapport donné.

On a les propositions suivantes :

Théorème I. *Les cycles, qui joignent les sommets d'un tricycle aux milieux des côtés opposés, se rencontrent en un même point.*

Théorème II. *Les cycles, qui joignent les milieux des côtés opposés d'un tétracycle aux milieux des cycles diagonaux, se rencontrent en un même point.*

Digitized by Google

THÉORÈME III. *Si l'on joint les trois sommets d'un tricycle à trois points situés sur les côtés opposés et divisant ces côtés en rapports dont le produit est égal à* — 1, *les trois cycles de jonction se rencontrent en un même point.*

Ce théorème, analogue à celui de Ceva, peut être généralisé, comme dans la théorie linéaire du plan (*); on a aussi le théorème analogue à celui de Ménélaüs, etc., etc.

§ VIII.

PROPRIÉTÉS DIVERSES DU TRICYCLE.

Les propriétés du système formé par un point et ses projections sur les côtés du triangle de référence; celles du quadrilatère complet; celles des triangles homologiques; et plus généralement, des figures homographiques ou corrélatives, se démontrent encore d'une façon analogue. Nous énoncerons seulement les deux propriétés suivantes du système formé par le tricycle et deux points de son plan.

THÉORÈME I. *On joint les sommets* A, B *du tricycle de référence à deux points* P_1, P_2; *soient* C_1 *l'intersection de* AP_1 *et de* BP_2, C_2 *celle de* AP_2 *et de* BP_1; *on trace* C_1C_2, *et l'on opère de même symétriquement : les trois cycles* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *se rencontrent en un même point.*

En effet, l'équation de C_1C_2 peut être écrite ainsi :

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{x_1x_2}, & \frac{y}{y_1y_2}, & \frac{z}{z_1z_2} \\ z_1y_2, & x_1z_2, & x_1y_2 \\ z_2y_1, & x_2z_1, & x_2y_1 \end{vmatrix} = 0;$$

(*) PONCELET. *Traité des propriétés projectives*, t. Ier, nos 159 et 160.

Digitized by Google

elle est vérifiée pour les valeurs de x, y, z proportionnelles aux quantités

$$x_1x_2(y_1z_2 + y_2z_1), \quad y_1y_2(z_1x_2 + z_2x_1), \quad z_1z_2(x_1y_2 + x_2y_1),$$

dont la forme symétrique démontre le théorème énoncé.

THÉORÈME II. *Si l'on joint, deux à deux, les projections de deux points* P_1, P_2 *sur les côtés d'un tricycle, ces cycles rencontrent les côtés opposés en six points situés sur deux cycles qui se coupent sur le cycle* P_1P_2.

§ IX.

EXPRESSION DE LA DISTANCE CIRCULAIRE D'UN POINT A UN CYCLE.

En désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point donné, et en représentant par

$$lx + my + nz = 0,$$

le cycle donné, on trouve facilement, en passant aux coordonnées cartésiennes, pour le carré du rayon r de ce cycle, l'expression

$$r^2 = \frac{l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos A + 2nl\cos B + 2lm\cos C}{\left(\frac{l}{r_1} + \frac{m}{r_2} + \frac{n}{r_3}\right)^2};$$

A, B, C désignant les angles du tricycle, pris avec les signes convenables. On a aussi, pour la distance circulaire du point P au cycle considéré, l'expression

$$d = \frac{lx + my + nz}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos A + 2nl\cos B + 2lm\cos C}}.$$

Cette expression est entièrement analogue à celle qui est donnée, en coordonnées trilinéaires, pour la distance d'un point à une droite; avec cette différence que, dans le cas présent, les angles A, B, C sont quelconques, tandis que, dans la théorie de la droite, ils sont soumis à une relation linéaire. Nous ferons

Digitized by Google

observer que les théorèmes démontrés ici ne peuvent, pour cette raison, se déduire de la théorie du triangle, par la méthode d'inversion.

THÉORÈME. *Si l'on joint, par des cycles, les pieds des hauteurs d'un tricycle, on forme un nouveau tricycle admettant pour cycles bissecteurs les hauteurs du premier.*

En effet, deux des côtés du nouveau tricycle ont pour équations

$$x \cos A + y \cos B - z \cos C = 0,$$

$$x \cos A - y \cos B + z \cos C = 0;$$

et l'ensemble de leurs cycles bissecteurs est donné par l'équation

$$x \cos A + y \cos B - z \cos C = \pm (x \cos A - y \cos B + z \cos C);$$

ou, simplement,

$$x = 0, \quad y \cos B = z \cos C.$$

Les dénominateurs des distances d'un point quelconque, aux cycles considérés, sont égaux à la racine carrée de l'expression

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - \cos A \cos B \cos C.$$

§ X.

DU SYSTÈME DES COORDONNÉES TANGENTIELLES TRICIRCULAIRES.

Il résulte immédiatement, de la formule donnée dans le paragraphe précédent, que les coefficients l, m, n, de l'équation d'un cycle, sont proportionnels aux distances u, v, w, de ce cycle, aux trois sommets du tricycle de référence, multipliées respectivement par des facteurs constants : les *paramètres de référence.*

On peut donc définir la position d'un cycle par ses distances aux trois sommets d'un tricycle, et placer ici une théorie semblable à la théorie des coordonnées ponctuelles de la droite, en

Digitized by Google

considérant, ainsi que l'a fait M. Moutard, une courbe comme l'enveloppe de ces cycles tangents. Nous nous bornerons, pour l'instant, à faire observer que, si u, v, w désignent les *coordonnées ponctuelles* d'un cycle, et X, Y, X les *coordonnées trilinéaires de son centre*, par rapport au triangle formé par les centres des cycles de référence, on a les relations

$$\frac{u}{r_1 d_1 \mathrm{X}} = \frac{v}{r_2 d_2 \mathrm{Y}} = \frac{w}{r_3 d_3 \mathrm{Z}},$$

dans lesquelles d_1, d_2, d_3 désignent les distances des trois centres.

Ces relations se déduisent, immédiatement, de la formule du Théorème II (§ 1).

Si donc l'on a une courbe donnée par l'équation tangentielle

$$\mathrm{F}(u, v, w) = 0,$$

le lieu du centre du cycle tangent est donné, en coordonnées trilinéaires, par l'équation

$$\mathrm{F}(r_1 d_1 \mathrm{X}, r_2 d_2 \mathrm{Y}, r_3 d_3 \mathrm{Z}) = 0.$$

Cette seconde courbe est appelée la *déférente* de la première.

§ XI.

DE L'ANGLE DE DEUX CYCLES.

On trouve, au moyen des coordonnées cartésiennes orthogonales, pour déterminer l'angle V des deux cycles donnés par les équations

$$l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0,$$

$$l_2 x + m_2 y + n_2 z = 0,$$

la formule suivante :

$$\cos \mathrm{V} = \frac{\sum [l_1 l_2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \cos \mathrm{A}]}{\sqrt{\mathrm{P}_1 \mathrm{P}_2}},$$

Digitized by Google

dans laquelle

$$P_1 = \sum [l_1^2 + 2m_1n_1 \cos A],$$

$$P_2 = \sum [l_2^2 + 2m_2n_2 \cos A].$$

Cette formule est semblable à celle qui donne, en coordonnées trilinéaires, l'angle de deux droites. En égalant à zéro le numérateur de l'expression précédente, on obtient la condition d'orthogonalité des deux cercles; en posant, au contraire, $\cos V = \pm 1$, on trouve la condition du contact des deux cycles, c'est-à-dire la condition équivalente à celle du *parallélisme*, puisque les deux cycles se rencontrent alors sur le cercle radical, qui joue, comme nous l'avons dit, dans notre théorie, le rôle que joue habituellement la droite de l'infini.

§ XII.

DU RAYON DU CERCLE RADICAL ET DE SON ÉQUATION LINÉAIRE.

L'équation du cercle radical peut s'écrire sous la forme

$$lx + my + nz + p = 0.$$

Deux cercles concentriques, dont les carrés des rayons sont égaux et de signes contraires, se coupent à angle droit, puisque le carré de la distance des centres est égal à la somme des carrés des rayons.

Il existe donc un cycle, ayant pour centre le centre radical, et pour rayon $R\sqrt{-1}$, R désignant le rayon du cercle radical; l'équation de ce cycle est d'ailleurs

$$\frac{r_1d_1X_0x + r_2d_2Y_0y + r_3d_3Z_0z}{d_1X_0 + d_2Y_0 + d_3Z_0} = 0,$$

si l'on désigne encore par x_0, y_0, z_0, les coordonnées trilinéaires

Digitized by Google

du centre radical, par rapport au triangle des trois centres. Par suite, on a, pour l'*équation linéaire du cercle radical* :

$$\frac{r_1 d_1 X_0 x + r_2 d_2 Y_0 y + r_3 d_3 Z_0 z}{d_1 X_0 + d_2 Y_0 + d_3 Z_0} + 2R^2 = 0.$$

Pour obtenir le *rayon du cercle radical*, on observe que ce rayon devient nul, si les trois cycles se coupent en un même point, c'est-à-dire, si l'on a

$$A \pm B \pm C = 0.$$

Il devient infini, lorsque l'aire du triangle des trois centres s'annule. En désignant par S cette aire, on a, comme on peut le vérifier,

$$4R^2S^2 = -r_1^2 r_2^2 r_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & 1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix}.$$

Cette formule est immédiatement calculable par logarithmes. Lorsque les cycles ne se coupent pas, on emploie les fonctions hyperboliques. On en déduit la proposition suivante :

THÉORÈME. *Le carré du rayon du cercle radical est égal, en signe contraire, au carré de la hauteur du tétraèdre dont les arêtes au sommet sont égales aux rayons des trois cercles, et font entre elles des angles égaux à ceux du tricycle de référence.*

(*La fin prochainement.*)

Digitized by Google

PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE TRICIRCULAIRE ET TÉTRASPHÉRIQUE;

par M. Éd. Lucas, professeur au Lycée Charlemagne.

(*Fin*, voir t. II, p. 257.)

§ XIII.

DES ÉQUATIONS QUADRATIQUES DU CERCLE RADICAL.

Pour obtenir l'équation homogène du cercle radical, il faut employer une équation du second degré. Ce cercle est le lieu géométrique des centres des cycles de rayon nul, et forme la ligne de séparation des centres des cycles réels et des cycles imaginaires du système. Le cycle de rayon nul a pour équation

$$lx + my + nz = 0,$$

avec la condition

$$l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos A + 2nl\cos B + 2lm\cos C = 0.$$

Cette dernière relation peut être considérée comme l'*équation tangentielle du cercle radical*. Les règles ordinaires du calcul des enveloppes donnent, pour l'*équation du cercle radical, en coordonnées tricirculaires :*

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos C, & \cos B, & x, \\ \cos C, & 1, & \cos A, & y, \\ \cos B, & \cos A, & 1, & z, \\ x, & y, & z, & 0. \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient, par le développement,

$$x^2\sin^2 A + y^2\sin^2 B + z^2\sin^2 C + 2yz(\cos B\cos C - \cos A) + \cdots = 0.$$

Digitized by Google

En égalant à zéro le discriminant de cette équation, on retrouve le carré de $\sin^2(A, B, C)$: cela revient, en effet, à exprimer que le rayon du cercle radical est nul.

§ XIV.

DE LA RELATION FONDAMENTALE.

La formule qui donne le rayon du cercle radical peut être écrite ainsi :

$$32R^2S^2 = -\begin{vmatrix} 2r_1^2, & r_1^2+r_2^2-d_3^2, & r_1^2+r_3^2-d_2^2, \\ r_1^2+r_2^2-d_3^2, & 2r_2^2, & r_2^2+r_3^2-d_1^2, \\ r_1^2+r_3^2-d_2^2, & r_2^2+r_3^2-d_1^2, & 2r_3^2. \end{vmatrix}.$$

Si l'on observe que le rayon du cercle radical s'obtient par l'élimination des variables, entre les équations, en coordonnées cartésiennes, des cycles de référence, il suffit, pour obtenir la relation fondamentale entre les trois coordonnées circulaires d'un point quelconque, de remplacer, dans le second membre de la formule précédente, les quantités r_1^2, r_2^2, r_3^2, respectivement par

$$r_1^2+2r_1x, \quad r_2^2+2r_2y, \quad r_3^2+2r_3z,$$

et d'égaler à zéro le résultat.

Cette relation est ainsi :

$$\begin{vmatrix} r_1^2+2r_1x, & r_1x+r_2y+r_1r_2\cos C, & r_1x+r_3z+r_1r_3\cos B, \\ r_1x+r_2y+r_1r_2\cos C, & r_2^2+2r_2y, & r_2y+r_3z+r_2r_3\cos A, \\ r_1x+r_3z+r_1r_3\cos B, & r_2y+r_3z+r_2r_3\cos A, & r_3^2+2r_3z. \end{vmatrix} = 0.$$

Digitized by Google

§ XV.

DU SYSTÈME DE DEUX CERCLES RÉCIPROQUES.

L'équation homogène du second degré :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

représente, en général, une *anallagmatique* du quatrième ordre, linéaire ou *quartique bicirculaire,* lorsque x, y, z désignent des coordonnées tricirculaires. Cependant, si la courbe donnée par l'équation précédente passe par le centre radical, l'équation s'abaisse au troisième degré, et représente une *cubique circulaire.* Si le discriminant est égal à zéro, le premier membre se décompose en deux facteurs linéaires, et l'équation représente un système de deux cycles.

Nous ferons observer, dès maintenant, que la théorie analytique des tangentes, des droites polaires, des coniques circonscrites, inscrites ou conjuguées au triangle de référence, s'applique à la théorie des cycles tangents, des cycles polaires, des quartiques bicirculaires circonscrites, inscrites ou conjuguées au tricycle de référence.

Pour trouver l'équation qui représente le système de deux cercles réciproques, nous remarquerons que leur ensemble constitue une quartique ayant deux points doubles, situés sur le cercle radical; et réciproquement. Donc, en représentant par

$$lx + my + nz = 0,$$

le cycle bissecteur de ces deux cercles, et par

$$R = 0,$$

le cercle radical, qui forme l'autre cercle bissecteur, on aura, comme équation d'un système quelconque de deux cercles réciproques :

$$R \pm (lx + my + nz)^2 = 0.$$

Digitized by Google

Si l'on considère, de même, un second système de deux cercles, représentés par

$$R \pm (l_1 x + m_1 y + n_1 z)^2 = 0,$$

on obtient, pour l'équation des cycles passant par leurs points d'intersection,

$$lx + my + nz = \pm (l_1 x + m_1 y + n_1 z);$$

et, par suite, cette proposition :

THÉORÈME. *Les cycles qui passent par les points d'intersection de deux cercles quelconques, et les cycles qui passent par les intersections de chacun d'eux avec le cercle radical, forment un faisceau harmonique.*

On trouvera de même, en coordonnées tangentielles, l'équation du système de deux cercles réciproques.

§ XVI.

DES CERCLES CIRCONSCRITS AU TRICYCLE.

Si, dans l'équation générale du système de deux cercles, on fait disparaître les coefficients des carrés, on obtient :

$$R = (x \sin A \pm y \sin B \pm z \sin C)^2;$$

ou, en développant

$$\frac{\cos(B \pm C) - \cos A}{x} + \frac{\cos(C \pm A) - \cos B}{y} + \frac{\cos(A \pm B) - \cos C}{z} = 0.$$

On peut rendre cette équation rationnelle par la disparition des doubles signes et par le remplacement des cosinus en fonction des rayons des cycles de référence et des distances de leurs centres. Elle devient du *seizième* degré en coordonnées cartésiennes, et représente le système des huit cercles passant par trois quelconques des six points d'intersection de trois cercles donnés.

Digitized by Google

L'équation du cercle K, circonscrit à un tricycle déterminé, s'obtient par la règle des signes :

$$yz\sin\frac{B+C-A}{2}+zx\sin\frac{C+A-B}{2}+xy\sin\frac{A+B-C}{2}=0.$$

On obtient les autres cercles K_A, K_B, K_C, par le déplacement du point de comparaison. *Les cycles bissecteurs des quatre couples de cercles circonscrits ont pour équation*

$$x\sin A\pm y\sin B\pm z\sin C=0,$$

et forment un tétracycle conjugué au tricycle de référence.

§ XVII.

DU CERCLE CONJUGUÉ AU TRICYCLE.

Si, dans l'équation générale du système de deux cercles réciproques, on fait disparaître les coefficients des rectangles, on trouve les relations

$$mn=\cos B\cos C-\cos A,$$
$$nl=\cos C\cos A-\cos B,$$
$$lm=\cos A\cos B-\cos C;$$

dont on déduit, pour l'équation du cercle conjugué,

$$x^2\frac{\cos A}{\cos B\cos C-\cos A}+y^2\frac{\cos B}{\cos C\cos A-\cos B}+z^2\frac{\cos C}{\cos A\cos B-\cos C}=0;$$

et, pour l'équation du cycle bissecteur,

$$\frac{x}{\cos B\cos C-\cos A}+\frac{y}{\cos C\cos A-\cos B}+\frac{z}{\cos A\cos B-\cos C}=0.$$

Il n'y a qu'un seul système de cercles, conjugué au tricycle de référence.

Digitized by Google

§ XVIII.

DES CERCLES INSCRITS AU TRICYCLE.

Le couple des deux cercles, à la fois tangents intérieurement ou extérieurement au tricycle de référence, a pour équation

$$\sin\frac{A}{2}\sqrt{x} + \sin\frac{B}{2}\sqrt{y} + \sin\frac{C}{2}\sqrt{z} = 0;$$

ou, par le développement,

$$J = x^2 \sin^4\frac{A}{2} + \cdots - 2yz \sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - \cdots = 0,$$

ainsi qu'on peut le déduire du théorème de M. Casey (*).

On peut aussi vérifier ce résultat ainsi qu'il suit. On a l'identité

$$R \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - J \sin^2(A, B, C) = (lx + my + nz)^2,$$

dans laquelle on a posé

$$l = (1 - \cos A)(1 + \cos A - \cos B - \cos C),$$
$$m = (1 - \cos B)(1 + \cos B - \cos C - \cos A),$$
$$n = (1 - \cos C)(1 + \cos C - \cos A - \cos B).$$

En se reportant à la première forme de l'équation, on obtient encore, pour les équations des cycles qui joignent les sommets du tricycle aux points de contact du cercle inscrit avec les côtés opposés :

$$y \sin^2\frac{B}{2} = z \sin^2\frac{C}{2},$$
$$z \sin^2\frac{C}{2} = x \sin^2\frac{A}{2},$$
$$x \sin^2\frac{A}{2} = y \sin^2\frac{B}{2}.$$

(*) Salmon. *Sections coniques*, pp. 165 et suiv.

Digitized by Google

Ces trois cycles sont concourants. On obtient, par le principe des signes, les équations des cercles ex-inscrits; et ainsi, pour l'équation de J_a :

$$\sin\frac{A}{2}\sqrt{-x}+\cos\frac{B}{2}\sqrt{y}+\cos\frac{C}{2}\sqrt{z}=0.$$

Déterminons maintenant les coefficients l, m, n, de l'équation générale du cycle, de manière qu'il soit tangent à J et J_a. Nous trouvons, comme équation de ce cycle tangent commun :

$$x\sin^2\frac{A}{2}=4(y-z)\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}.$$

On voit que ce cycle passe par l'intersection des cycles x et $y-z$. C'est la démonstration analytique du théorème de Hart.

On obtient l'équation qui donne les rayons ρ_1 et ρ_2 des cercles inscrits, en égalant à zéro l'expression du carré du rayon du cercle radical, dans laquelle on a remplacé r_1, r_2, r_3, respectivement, par $r_1+\rho$, $r_2+\rho$, $r_3+\rho$; on trouve ainsi un déterminant plus simple que celui de M. Bauer (*Journal de Schlömilch*, t. V). En appelant P le produit des rayons des cercles inscrits, on a

$$\frac{1}{P}=\frac{4S^2-d_1^2r_2r_3-d_2^2r_3r_1-d_3^2r_1r_2}{4R^2S^2};$$

et, en désignant par P_A, P_B, P_C, les produits correspondants, pour les groupes des cercles ex-inscrits, on obtient

$$\frac{1}{P}+\frac{1}{P_A}+\frac{1}{P_B}+\frac{1}{P_C}=\frac{4}{R^2};$$

donc :

THÉORÈME. *Le carré du rayon du cercle radical de trois cercles, est la moyenne harmonique des produits des rayons des cercles tangents de même couple.*

Digitized by Google

a un point multiple d'ordre $(p-1)$ à l'origine et p asymptotes, parallèles à la droite qui a pour équation $y - t_1 x = 0$. Elle est la limite de la courbe d'ordre p, dont les équations sont

$$y = tx, \quad x = \frac{A_1}{t - t_1} + \cdots + \frac{A_p}{t - t_2},$$

laquelle a aussi, à l'origine, un point multiple d'ordre $(p-1)$, mais dont les asymptotes ne sont pas parallèles.

IV. S'il y a, au dénominateur de x, des facteurs multiples imaginaires, on devra, comme dans le second cas, réunir deux à deux les fractions rationnelles simples conjuguées. On peut encore, dans un certain sens, regarder ce cas comme la limite de celui où les facteurs sont inégaux.

SUR LE CALCUL SYMBOLIQUE DES NOMBRES DE BERNOULLI ;

par M. Édouard Lucas, professeur au Lycée Charlemagne.

I

Considérons, en général, une fonction

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x),$$

ordonnée suivant les puissances de x, et égale à la différence première d'une fonction $f(x)$, pour une différence de l'argument égale à l'unité. Soit, par exemple,

$$\Delta f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots + Lx^0.$$

Digitized by Google

Remplaçons, successivement, x par $1, 2, 3, \ldots, (x-1)$, et ajoutons; nous obtenons

$$f(x) - f(1) = AS_m + BS_{m-1} + \cdots + LS_0,$$

ou encore la formule symbolique

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \Delta f(S) = f(x) - f(1),$$

dans laquelle nous devons remplacer les exposants de S par des indices: S_m désigne la somme des puissances m des $(x-1)$ premiers nombres entiers. De plus,

$$S_0 = x - 1.$$

Si l'on suppose, en particulier, $f(x)$ successivement égale à

$$x^n, \quad (x \pm 1)^n, \quad (x \pm 2)^n, \ldots,$$

on trouve un grand nombre de formules nouvelles. On a, par exemple, les relations suivantes :

$$(S+1)^n - S^n = x^n - 1,$$
$$S^n - (S-1)^n = (x-1)^n;$$

puis, par addition et soustraction :

$$(S+1)^n + (S-1)^n = x^n + (x-1)^n - 1,$$
$$(S+1)^n + (S-1)^n - 2S^n = x^n - (x-1)^n - 1.$$

En faisant $f(x) = (x - \frac{1}{2})^n$, on a encore la formule

$$(2S+1)^n - (2S-1)^n = (2x-1)^n - 1,$$

donnée par M. Gilbert, au moyen de l'Analyse infinitésimale (*).

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VIII, 1869, p. 437.

Digitized by Google

Des formules précédentes, il résulte que S_{2n} et S_{2n+1} sont divisibles, algébriquement, par S_2, S_3 ou S_1^2, et que S_n est une fonction *paire* ou *impaire* de $(x-\frac{1}{2})$, suivant que n est *impair* ou *pair*.

II

En désignant par T_m la somme des puissances $m^{ièmes}$, des $(x-1)$ premiers nombres impairs, on déduit, du développement de $(2x-1)^m$, en y remplaçant x par 1, 2, 3, ..., $(x-1)$, et faisant la somme des résultats :

$$T_m = (2S-1)^m.$$

Au contraire, du développement de $(2x+1)^m$, en y remplaçant $2x$ par 1, 3, 5, ..., $(2x-3)$, et faisant la somme des résultats, on conclut

$$(2S)^m = (T-1)^m.$$

Les formules précédentes nous prouvent l'équivalence des symboles 2S et T + 1, dans les transformations des équations algébriques. On a ainsi, au moyen de l'équation (1), en changeant $f(x)$ en $\varphi(x-1)$, et S en $\frac{T+1}{2}$, la relation

$$\varphi\left(\frac{T+1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{T-1}{2}\right) = \varphi(x-1) - \varphi(0).$$

III

On peut poser l'égalité symbolique

$$nS_{n-1} = (x+B)^n - B^n,$$

dans laquelle on remplacera les exposants de B par des indices : les coefficients B_r sont déterminés par la condition que le premier membre augmente de nx^{n-1}, quand on change x en $(x+1)$, dans le second. Donc, quelle que soit la valeur de x :

$$nx^{n-1} = (x+B+1)^n - (x+B)^n.$$

Digitized by Google

Il résulte, des formules précédentes, que les coefficients B_r demeurent invariables, lorsque l'on change l'indice de S, sans changer celui de B. On trouve

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_{2n+1} = 0, \ldots$$

Ces coefficients sont les *Nombres de Bernoulli*, du nom de Jacques Bernoulli, qui, le premier, les a introduits dans l'Analyse. A cause de la simplification des résultats, nous avons modifié les deux notations employées habituellement. Pour retrouver la notation de Lacroix, conservée par M. Catalan, dans un grand nombre de Mémoires, il faut diminuer d'une unité les indices, et ne pas tenir compte de $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$.

On retrouve les formules ordinaires, qui servent au calcul des coefficients B_r, en faisant x égal à ± 1, ± 2, $\pm \frac{1}{2}$, etc. On a encore

$$\frac{dS_n}{dx} = nS_{n-1} + B_n;$$

par conséquent, $\frac{S_n}{x}$ est égal à B_n pour $x = 0$. Enfin, on obtient la somme des puissances semblables des x premiers nombres, en changeant B_1 en $-B_1$.

IV

On trouve la somme des puissances semblables des $(x - 1)$ premiers nombres impairs, au moyen de la remarque suivante :

La somme des $m^{\text{ièmes}}$ *puissances des* $2x$ *premiers nombres entiers, est égale à la somme des* $m^{\text{ièmes}}$ *puissances des* x *premiers nombres impairs, augmentée du produit,* par 2^m, *de la somme des mêmes puissances des* x *premiers nombres entiers.*

Donc, en désignant maintenant par T_n la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres impairs, on a

$$nT_{n-1} = (2x + B)^n - B^n - 2^{n-1}\left[(x + B)^n - B^n\right],$$

Digitized by Google

ou bien

$$nT_{n-1} = (2x + C)^n - C^n ;$$

les coefficients C_r étant donnés par la formule

$$C_n = B_n (1 - 2^{n-1}).$$

On peut aussi exprimer les sommes T_n, en fonction du dernier nombre impair.

V

Si l'on désigne par U_x et V_x les sommes des x premiers termes des séries dont les termes généraux sont u_x et v_x, on a (*)

$$U_x V_x - \sum_{p=1}^{p=x} [u_p V_p + v_p U_p] + \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p = 0.$$

Si l'on fait $u_x = x_m$ et $v_x = x_n$, on obtient la formule symbolique

$$(3)\quad S_m S_n + S_{m+n} = S^m \frac{(S + B)^{n+1} - B^{n+1}}{n + 1} + S^n \frac{(S + B)^{m+1} - B^{m+1}}{m + 1},$$

dans laquelle $B_1 = + \frac{1}{2}$. En divisant par x, et faisant ensuite x égal à zéro, on a la relation

$$(4)\quad B_{m+n} = B^m \frac{(B + \beta)^{n+1} - \beta^{n+1}}{n + 1} + B^n \frac{(B + \beta)^{m+1} - \beta^{m+1}}{m + 1},$$

dans laquelle on remplacera, après le développement, les puissances de B et de β par des indices, et ensuite β_r par B_r. Les formules de MM. Worontzoff et Le Paige (**) se déduisent de la précédente, en faisant $m = 0$.

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIV, 1875; p. 487.

(**) *Nouvelles Annales*, janvier 1876, p. 16; *Nouvelle Correspondance*, avril 1876, p. 127.

Digitized by Google

VI

Divisons par x les deux membres de la formule fondamentale

$$f(S+1)-f(S)=f(x)-f(1),$$

et faisons ensuite $x=0$: nous trouvons, en tenant compte des résultats du § III :

(5) . . . . . $f(B+1)-f(B)=f'(0);$

ou, plus généralement, en posant $f(x)=\varphi(x+z)$:

(6) . . . . $\varphi(B+1+z)-\varphi(B+z)=\varphi'(z).$

Nous pouvons obtenir, au moyen de cette formule, toutes celles qui servent au calcul des Nombres de Bernoulli, et en découvrir de nouvelles.

1° Si $f(x)=e^{xz}$, on a

$$e^{(B+1)z}-e^{Bz}=z;$$

et, par suite,

$$\frac{z}{e^z-1}=e^{Bz}.$$

2° Si $f(x)=\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)z$, on a

$$\sin\left(B+\frac{1}{2}\right)z-\sin\left(B-\frac{1}{2}\right)z=z\cos\frac{z}{2};$$

ou, plus simplement,

$$\frac{z}{2}\cot g\frac{z}{2}=\cos Bz.$$

3° Si l'on pose $f(x)=\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)z$, on trouve

$$-\frac{z}{2}=\sin Bz.$$

Digitized by Google

4° Soit

$$f(x) = (x + z)(x + z + 1) \dots (x + z + n).$$

On a, symboliquement,

$$\frac{B + z + 1}{z} \cdot \frac{B + z + 2}{z + 1} \dots \frac{B + z + n}{z + n - n} = \frac{z + n}{n + 1}\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+n}\right];$$

et, pour $z = 1$:

$$\frac{B + 2}{1} \cdot \frac{B + 3}{2} \dots \frac{B + n}{n - 1} = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n},$$

En se servant de l'élégante formule

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n},$$

due à M. Catalan (*), on peut exprimer le second membre de celle-ci, en fonction des Nombres de Bernoulli. On a ainsi,

$$\frac{B + n + 2}{n + 1} \cdot \frac{B + n + 3}{n + 2} \dots \frac{B + 2n}{2n - 1} = 2\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n}\right].$$

VII

L'identité

$$-\operatorname{tg}\frac{z}{2} = 2\operatorname{cotg} z - \operatorname{cotg}\frac{z}{2},$$

nous donne, en remplaçant cot z et cot $\frac{z}{2}$ par leurs valeurs :

$$-z \operatorname{tg}\frac{z}{2} = 2[\cos 2Bz - \cos Bz].$$

(*) *Note sur une formule de M. Botesu* (Bulletins de l'Académie de Belgique, 1872).

Digitized by Google

Posant

$$P_n = 2\left[2^n - 1\right] B_n,$$

nous obtenons

$$-z \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \cos Pz,$$

en ayant soin de remplacer P^o par 0. M. Catalan (*) a fait remarquer l'importance des coefficients P_n, *entiers et impairs*, considérés par Euler, et dont le calcul est préférable à celui des nombres bernoulliens. En retranchant, membre à membre, les identités

$$(2B + 1)^{2n+1} = (2B)^{2n+1},$$
$$(B + 1)^{2n+1} = (B)^{2n+1},$$

on trouve la relation de récurrence

$$(P + 1)^{2n+1} = 0.$$

Mais on a, plus généralement, la formule

$$(7) \quad f(P + z + 1) - f(P + z - 1) = 2\left[f'(z - 1) - f'(z)\right];$$

et, en faisant $f(x) = (x - 1)^n$:

$$(P + 1)^n - (P - 1)^n = 2n(-1)^{n-1}.$$

On déduit immédiatement, de cette relation, que P_{2n} *est entier impair*, et que $P_{2n+1} = 0$. De plus,

$$P_0 = 0,\ P_1 = -1,\ P_2 = 1,\ P_4 = -3,\ P_6 = +17,\ P_{10} = -155,\ldots$$

L'équation (7) donne, pour $z = 1$,

$$f(P + 2) - f(P) = 2\left[f'(0) - f'(1)\right].$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. LIV, p. 1031. *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXVII.

Digitized by Google

Faisons, successivement, $f(x)$ égale à e^{xz}, $\sin(x-1)z$, $\cos(x-1)z$, ...; nous obtenons

$$e^{Pz} = 2z\,\frac{e^z - 1}{1 - e^{2z}}, \quad \cos Pz = -z\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{2}, \quad \sin Pz = -z.$$

Soit enfin

$$f(x) = (x+z+1)(x+z+3)\ldots(x+z+2n-1):$$

il vient

$$n(P+z+3)(P+z+5)\ldots(P+z+2n-1)$$

$$= (z+1)(z+3)\ldots(z+2n-1)\left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+3} + \cdots + \frac{1}{z+2n-1}\right]$$

$$- (z+2)(z+4)\ldots(z+2n)\left[\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+4} + \cdots + \frac{1}{z+2n}\right].$$

Nous espérons donner, dans un prochain travail, l'application du calcul symbolique aux fonctions de plusieurs variables, et aux relations contenant les produits 2 à 2, 3 à 3, ... p à p des nombres B et P.

Note du Rédacteur. — Parmi les nombreuses relations démontrées ou indiquées dans le Mémoire de M. Lucas, l'une des plus remarquables nous paraît être celle qui termine le paragraphe VI :

$$\frac{B+n+2}{n+1}\cdot\frac{B+n+3}{n+2}\cdots\frac{B+2n}{2n-1} = 2\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right]. \quad (A)$$

Au moyen d'une propriété des *intégrales eulériennes* (*), on peut,

---

(*) *Mélanges mathématiques*, p. 151.

Digitized by Google

après avoir remplacé B par x, écrire ainsi le premier membre :

$$1+\frac{n-1}{n+1}\,\frac{x+1}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}\,\frac{(x+1)x}{1.2}$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\,\frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}+\cdots. \quad (B)$$

Tant que le nombre entier n est *fini*, la fonction (B) est un polynôme entier, dont les termes, à partir du deuxième, sont respectivement inférieurs à

$$\frac{x+1}{1},\qquad \frac{(x+1)x}{1.2},\qquad \frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3},\quad ..$$

En même temps, d'après la convention expliquée par notre honorable et ingénieux Collaborateur, les dernières fractions deviennent :

$$\frac{B_1+1}{1},\qquad \frac{B_2+B_1}{1.2},\qquad \frac{B_3-B_1}{1.2.3},\quad \cdots;$$

de manière que les coefficients B_1, B_2, B_3, ... sont déterminés par les équations :

$$1+\frac{1}{3}\,\frac{B_1+1}{1}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right),$$
$$1+\frac{2}{4}\,\frac{B_1+1}{1}+\frac{2.1}{4.5}\,\frac{B_2+B_1}{1.2}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right),$$
. . . . . .

Mais, *si l'on fait croître* n *indéfiniment*, une circonstance singulière se présente : la fonction (B), si l'on y regarde x comme une *constante positive*, tend vers

$$1+\frac{x+1}{1}+\frac{(x+1)x}{1.2}+\frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}+\cdots,$$

Digitized by Google

c'est-à-dire 2^{x+1}. Cette exponentielle a pour développement, si l'on veut,

$$2\left[1+\frac{xl2}{1}+\frac{x^2(l2)^2}{1.2}+\frac{x^3(l.2)^3}{1.2.3}+\cdots\right]$$

Et comme le second membre de l'égalité (A) a pour limite $2l2$, on peut être tenté de conclure ainsi :

$$1+\frac{B_1}{1}l2+\frac{B_2}{1.2}(l2)^2+\frac{B_3}{1.2.3}(l2)^3+\cdots=l2. \quad . \quad . \quad (C)$$

Malheureusement, cette curieuse égalité est *absurde*, attendu la divergence de la série contenue dans le premier membre (*).

CAS REMARQUABLE D'INÉGALITÉ DE DEUX TRIANGLES;

par M. l'abbé GELIN, professeur au collége de St-Quirin, à Huy.

Purgotti, professeur à l'Université de Pérouse, a remarqué le premier, dans ses *Elementi di Geometria,* que *deux triangles peuvent, sans être égaux, avoir deux côtés égaux et les trois angles égaux, chacun à chacun.*

I

Si ces triangles sont possibles, les côtés égaux seront opposés aux angles non égaux. Et puisqu'ils sont semblables, on aura,

(*) Nous reviendrons, dans un autre moment, sur la relation

$$lim\left[\frac{n+2+x}{n+1}\cdot\frac{n+3+x}{n+2}\cdots\frac{2n+x}{2n-1}\right]=2^{1+x}.$$

Digitized by Google

somme des projections de la corde sur les tangentes extrêmes (*).
(SOMOF.)

194. Exprimer S_{2n+1} en fonction linéaire des carrés de S_1, $S_2, \ldots S_n$. (E. LUCAS.)

195. Exprimer le produit $S_m S_n S_p$ en fonction linéaire des sommes S. (E. L.)

196. Trouver la somme des inverses des Nombres de Bernoulli, et la somme des inverses des Nombres P. (E. L.)

197. Dans le tableau du calcul des racines entières d'une équation numérique, comment trouve-t-on immédiatement le quotient de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, a et b désignant deux racines entières ? (E. L.)

198. Décomposer en leurs facteurs premiers les nombres 28^7+1, 28^7-1. (E. L.)

RECTIFICATIONS ET REMARQUES.

I. Page 285. — La ligne 4 doit être rétablie ainsi : « les paramètres m et k, *l'équation* (6) *n'est....* »

II. — 319. — La formule connue :

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

donne

$$n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2.$$

(*) Voir la *Question* 126.

Digitized by Google

remplacer la courbe, est en équilibre stable sous l'influence de la pesanteur, perpendiculaire à la droite donnée; si ce fil, disons-nous, vient à être déplacé, il revient de lui-même à sa première position lorsqu'on cesse de le toucher : le centre de gravité s'était donc élevé, et par suite, occupait primitivement le point le plus bas.

3° La chaînette est, des courbes planes passant par deux points fixes, celle qui engendre l'aire minima (ou maxima) en tournant autour d'un axe situé dans son plan (J. A. Serret, *Calcul intégral*, n° 851).

4° C'est aussi, de toutes les courbes isopérimètres passant par deux points donnés, celle qui engendre la surface de révolution maxima (*Ibidem*, n° 856)..

Le principe de ces diverses propriétés a été découvert par J. Bernoulli, qui les a exposées dans son *Traité du Calcul intégral*, composé, à Paris, pour le marquis de l'Hospital.

(*La suite prochainement.*)

SUR L'EMPLOI, DANS LA GÉOMÉTRIE, D'UN NOUVEAU PRINCIPE DES SIGNES;

par M. Édouard Lucas.

Malgré le nombre considérable de Mémoires relatifs à la théorie des quantités négatives, les règles sur l'emploi des signes, en Géométrie, n'ont pas été nettement définies jusqu'à présent. Il est généralement admis que, si l'usage de la règle des signes est avantageux lorsqu'il s'agit de segments comptés sur une même droite, ou d'angles ayant même sommet, il n'en est plus de même lorsque l'on considère des segments comptés

Digitized by Google

sur des droites différentes, ou des angles ayant des sommets différents (*).

M. Chasles, dans son *Traité de Géométrie supérieure* (p. IX), exprime formellement cette idée : « Si l'on ne démontre, ordinairement, une formule ou une relation que pour une certaine » figure, et non dans l'état d'abstraction et de généralité qui » permettrait, au moyen des signes + et — affectés aux » segments et aux angles pour marquer leur direction, de » l'adapter indifféremment à tous les cas possibles de la figure, » il est facile d'en reconnaître la raison. C'est que les propositions qui forment, le plus ordinairement, les éléments de » démonstration, dans la Géométrie ancienne, *ne comportent* » *pas l'application du principe des signes.* Telles sont, la proposition du carré de l'hypoténuse, celle de la proportionnalité » des côtés homologues dans les triangles semblables; celle » encore de la proportionnalité, dans tout triangle, des côtés aux » sinus des angles opposés. *La règle des signes ne s'applique* » *point à ces propositions*, puisque les segments que l'on y » considère sont formés sur des lignes différentes, et les angles » autour de sommets différents. » La difficulté signalée ici disparaît lorsque l'on tient compte du principe que nous allons exposer (**), et que nous empruntons aux théories de la Statique.

1. — Du principe de direction. — Dans l'étendue géométrique, la notion première est celle du point. Le système le plus simple est celui dans lequel on ne considère que deux points,

(*) Voir Salmon. *Traité des Sections coniques* (Théorie de la ligne droite). C'est à l'omission de ce second principe des signes que l'on doit attribuer la double valeur donnée, habituellement, pour la distance d'un point à une droite.

(**) Voir la *Note sur la règle des signes en Géométrie*, par M. Laguerre, qui me paraît résumer l'état actuel de la question. — Nouvelles Annales de Mathématiques, année 1870, p. 176.

Digitized by Google

et, immédiatement apparaît la notion de la ligne droite; nous regardons en effet la ligne droite comme la trace d'un point qui se meut suivant la loi la plus simple, sans tenir compte de l'idée de temps ou de vitesse. Cette manière de voir s'accorde avec l'opération matérielle qui consiste à tracer effectivement une ligne droite sur le papier, au moyen d'un crayon. Ainsi l'idée de mouvement est aussi simple que celle de la distance de deux points; elle en est inséparable. Nous ne pouvons même concevoir la distance de deux points A, B, que par la comparaison de cette distance avec une autre distance, prise arbitrairement sur la droite qui les joint; d'ailleurs l'égalité géométrique, définie par la superposition, ne peut se constater que par le déplacement.

Nous concevons ensuite, sur cette droite AB, deux sens, l'un dirigé de A vers B, l'autre de B vers A; l'un augmentant la distance qui sépare un point mobile du point A, l'autre la diminuant; de là l'emploi, imposé par Descartes, des signes + et —, pour comparer les segments comptés sur une même droite. Il est vrai que l'on peut choisir arbitrairement, sur la droite, le sens positif; car, si l'on change ce sens, il suffit de changer en même temps tous les signes des segments considérés; ce qui donne le même résultat.

Mais, pour apprécier la situation relative des droites tracées dans un plan, il est indispensable de fixer d'abord le sens des directions positives sur chacune d'elles; et l'on peut alors définir leur angle comme on le fait habituellement, depuis Carnot, par l'angle obtenu en menant, par un point quelconque de l'espace, des parallèles aux droites données, mais seulement dans le sens des directions positives. D'ailleurs, l'on considère deux sens autour de ce point; et l'on est convenu d'affecter, de signes contraires, les angles de la première droite avec la seconde, et de la seconde avec la première.

2. — DU PRINCIPE DE CIRCULATION DANS LE PLAN. — Une droite quelconque D divise le plan en deux régions; on considère ordinairement les distances de deux points A, B du plan, à cette droite, comme ayant même signe si les points A, B sont dans la

Digitized by Google

même région, et comme ayant des signes contraires si ces deux points sont dans des régions différentes : la région correspondant au signe + est d'ailleurs arbitraire.

Considérons maintenant des droites disséminées dans le plan, et plaçons, en dehors d'elles, un point O que nous appellerons *point de comparaison*. Menons par ce point une droite arbitraire, qui les rencontre toutes en des points A, B, C, D, ..., et supposons un mobile partant du point O et se dirigeant vers A ; nous prendrons par convention, comme direction positive, la direction de la droite commençant en A, à la gauche du mobile. Il est vrai que ces directions positives restent, au fond, absolument arbitraires, puisqu'elles dépendent de la position du point de comparaison. Ainsi deux droites parallèles auront le même sens ou les sens opposés, suivant que le point de comparaison sera placé à l'extérieur ou à l'intérieur de l'intervalle compris entre les deux parallèles; cependant nous verrons que c'est la possibilité du déplacement du point de comparaison, qui permet de généraliser la plupart des énoncés des théorèmes de la Géométrie.

Si, au contraire, on a fixé à l'avance, sur une droite, la direction positive; la distance du point O à cette droite sera considérée elle-même comme positive ou comme négative, suivant que la direction choisie, et la direction déterminée par la convention précédente, seront de même sens ou de sens contraires; cette règle s'accorde entièrement avec celle qui donne le signe du produit des termes de deux polynômes algébriques.

Cette idée n'est pas nouvelle : elle correspond exactement à la détermination du signe du moment d'une force, par rapport à un point; mais il est curieux de constater que, constamment employée en Statique, en Électro-dynamique, etc., elle n'a pas encore été appliquée en Géométrie pure. C'est pour cette raison que certains théorèmes du *Traité de Géométrie supérieure* sont énoncés pour différents cas, correspondant à des différences de situation, bien qu'ils comportent l'emploi des principes exposés ci-dessus. Cette seconde règle des signes est donc indispensable : elle complète l'exposé des lois de la *dualité* dans la science de l'étendue.

Digitized by Google

3. — DU PRINCIPE DE CIRCULATION DANS L'ESPACE. — Nous avons vu que le sens de la direction positive d'une droite peut être, à volonté, choisi ou imposé par la seconde règle, et que cette double convention ne change en rien les résultats obtenus. De même, le sens de circulation dans le plan, que nous avons pris positivement de la droite vers la gauche, pour nous conformer à l'usage, est entièrement arbitraire lorsque les figures que l'on considère sont tracées dans le plan; et les résultats obtenus ne changent pas si l'on renverse le sens de circulation, ce qui revient à retourner le plan. Dans l'espace, la distance d'un point quelconque à un plan, dont le sens de circulation est préalablement fixé, sera considérée comme positive ou comme négative, suivant que le mouvement d'un mobile dans le plan, suivant le sens de circulation, sera vu, de ce point, de droite à gauche ou de gauche à droite. Si, au contraire, on choisit arbitrairement, dans l'espace, un point pris pour terme de comparaison, on s'imposera la condition que les distances de ce point à tous les plans soient positives; et les sens de circulation de chacun de ces plans se trouveront nettement déterminés.

Cette convention permet de déterminer, d'une façon précise, la direction de l'axe d'un plan et l'angle de deux plans, qu'on suppose égal à l'angle des axes.

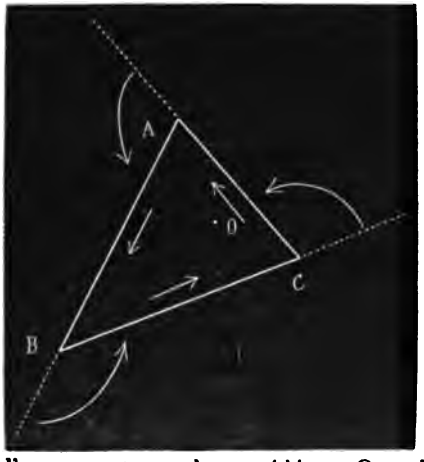
4. — DU SYSTÈME DE DEUX ET DE TROIS DROITES QUI SE COUPENT, ET DE LEURS BISSECTRICES. — Deux droites qui se coupent divisent le plan en quatre régions : la présence du point de comparaison O fixe leurs directions positives et la valeur de leur angle, en grandeur et en signe. Mais définissons la *bissectrice intérieure* comme le lieu des points dont les distances aux deux droites sont égales et de même signe, et la *bissectrice extérieure*, comme celui des points dont les distances aux deux droites sont égales et de signes contraires. La bissectrice intérieure est donc située dans la région où se trouve le point de comparaison et dans la région opposée par le sommet. Il est vrai, comme pour le sens des droites, que la position de la bissectrice intérieure ou de la bissectrice extérieure dépend du choix que l'on fait sur la position du point de comparaison.

Digitized by Google

Si l'on prolonge indéfiniment, et dans les deux sens, les trois côtés d'un triangle quelconque, on divise le plan en sept régions, qui correspondent précisément aux combinaisons de signes que peuvent prendre les distances d'un point quelconque aux trois côtés du triangle.

Supposons le point de comparaison (fig. 1) situé dans l'intérieur du triangle : les trois côtés AB, BC, CA sont dirigés suivant le sens du mouvement d'un mobile parcourant le périmètre du triangle ABC; les trois côtés seront pris positivement; le périmètre $2p$ est égal à la somme des trois côtés a, b, c. Les angles du triangle, c'est-à-dire ceux de CA avec AB, de AB avec BC, de BC avec CA, sont les suppléments de ceux que l'on a coutume de considérer. On a les relations fondamentales :

Fig. 1. Triangle fermé.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A,$$

$$a + b \cos C + c \cos B = 0,$$

et les autres, analogues à celles-ci (*). On a aussi

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc},$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(c+a-b)(a+b-c)}{4bc}.$$

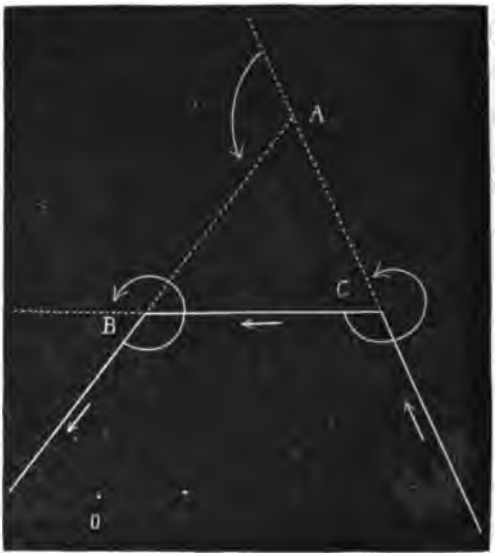
(*) Nous reconnaissons parfaitement l'inconvénient d'introduire ces conventions; mais on verra plus loin l'avantage considérable obtenu par cette détermination de l'angle d'un triangle, qui ne diffère pas de celle de

Digitized by Google

Telles sont les formules qui conviennent au cas du *triangle fermé.*

Plaçons maintenant le point de comparaison, de l'autre côté de BC; les sens positifs de AB, AC, et la valeur de l'angle

Fig. 2. Triangle ouvert.



de ces deux droites ne varient pas; le côté BC change de sens: il devient $-a$; le périmètre devient $b + c - a$; les angles B, C augmentent de 180°. On vérifie que les formules précédentes subsistent et conviennent au cas du *triangle ouvert.*

On a encore

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos C, & \cos B, \\ \cos C, & 1, & \cos A, \\ \cos B, & \cos A, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Carnot. Lorsque l'un des sommets du triangle vient s'appliquer sur le côté opposé, on doit, dans les anciennes formules, supposer l'angle au sommet égal à deux droits; ainsi l'angle d'une direction avec son prolongement serait 180° et non zéro; ce qui est absurde.

Digitized by Google

En désignant ce déterminant par $\sin^2(A, B, C)$, on a, comme l'on sait,

$$\sin^2(A, B, C) =$$
$$4 \sin \frac{A+B+C}{2} \sin \frac{B+C-A}{2} \sin \frac{C+A-B}{2} \sin \frac{A+B-C}{2}.$$

En égalant à zéro le premier membre, on trouve

$$A \pm B \pm C = 2k\pi :$$

les quatre combinaisons de signes correspondent aux quatre triangles que l'on peut former avec les trois droites données, par le déplacement du point de comparaison. Un de ces triangles est fermé, les trois autres sont ouverts.

(*La fin prochainement.*)

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Neuberg. — « Voici une démonstration très-simple des formules de M. Boset (*N. C. M.*, t. II, p. 273).

Soient I, E, E′, E″, O les centres des cercles, dont les rayons sont r, α, β, γ, R. Le centre O est celui des neuf points du triangle EE′E″; donc il passe par les milieux M, N des droites IE, E′E″. De plus, MN est perpendiculaire au milieu D du côté a. Par conséquent

$$\frac{a^2}{4} = \mathrm{DM} \cdot \mathrm{DN}, \quad \mathrm{DM} = \frac{\alpha - r}{2}, \quad \mathrm{DN} = \frac{\beta + \gamma}{2}, \text{ etc.}$$

La relation $\mathrm{DM} = \frac{\alpha - r}{2}$ conduit facilement à une seconde solution de la *Question* 109 (voir *N. C. M.*, t. II, p. 315).

Digitized by Google

210. x étant un infiniment petit du premier ordre,

$$76\cos x - \left(21\,\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} + 186\log\frac{\sin x}{x} + 55\right)$$

est du *sixième ordre.* (LAISANT.)

211. *Pentagone d'Albert Durer* (*). — AB étant le côté donné, on décrit, des points A, B, comme centres, avec AB pour rayon, deux circonférences. De l'un des points α, β, où elles se coupent, on décrit une circonférence passant en A, B, et coupant, en γ, δ, ε, les deux premières circonférences et la droite $\alpha\beta$. On trace les cordes $\gamma\varepsilon$, $\delta\varepsilon$, qui, prolongées, rencontrent en E la circonférence B, et en C la circonférence A. Enfin, des points C, E comme centres, avec AB pour rayon, on trace deux arcs, dont l'intersection D est le cinquième sommet du *pentagone équilatéral* ABCDE. On propose de calculer les angles de cette figure.

(E. C.)

212. Trouver

$$\tfrac{1}{2}\,T_n = -1^n + 3^n - 5^n + 7^n - \dots + (4x-1)^n,$$

et faire voir que les coefficients de T_n sont entiers.

(E. LUCAS.)

213. La somme

$$-1^4 + 3^4 - 5^4 + \dots + (4x-1)^n$$

n'est, ni un carré, ni le double d'un carré, ni le triple d'un carré. (E. L.)

(*) *Alberti Dureri Institutionum*, etc. (1606), p. 55.

Digitized by Google

NOUVELLE

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE

RÉDIGÉE PAR

EUGÈNE CATALAN,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DOCTEUR ÈS SCIENCES,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE, ETC.;

avec la collaboration de

MM. MANSION, LAISANT, BROCARD, NEUBERG, ÉDOUARD LUCAS ET RIBAUCOUR.

TOME CINQUIÈME.

1879

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

MDCCCLXXIX.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

par M. Édouard Lucas.

I. *L'enveloppe d'une droite qui détache, dans deux circonférences, des cordes* AB, CD, *dont le rapport des longueurs est donné, est une conique ayant pour foyers les points* F, F′ *qui divisent, dans le rapport donné, la distance des centres des deux circonférences.*

Il suffit de démontrer que le lieu de la projection M du point F, sur la droite mobile, est une circonférence. En effet, le point M divise, dans le rapport donné k, la distance des milieux des cordes AB, CD; par suite, le quotient de ses puissances, par rapport aux deux cercles, est k^2; donc le point M décrit une circonférence, qui passe par les points d'intersection des circonférences données.

Si $k = 1$, l'un des foyers s'éloigne à l'infini; le point M décrit l'axe radical des deux circonférences, et la droite mobile enveloppe une parabole. (Voir *N. C. M.*, t. III, p. 357.)

Cette démonstration m'a été indiquée par M. Tourette, élève du lycée Charlemagne.

II. *L'enveloppe d'une droite qui détache, dans deux circonférences données, des cordes* AB, CD *telles que les extrémités* C, D *de l'une divisent l'autre* AB, *harmoniquement, est une conique ayant pour foyers les centres* F, F′ *des deux circonférences.*

La projection M du point F, sur la droite mobile, est le milieu de AB; on a donc, par une propriété bien connue,

$$MA \cdot MB = -MC \cdot MD.$$

Le point M ayant des puissances égales, et de signes contraires, par rapport aux deux circonférences données, il décrit une cir-

conférence passant par leurs points communs, et dont le centre est le milieu de FF'.

Les tangentes à cette circonférence et aux deux circonférences données, en l'un des points communs, forment, avec l'axe radical, un faisceau harmonique.

Par projection centrale, on étendra cette propriété à deux coniques données : en particulier, l'enveloppe des cordes d'une ellipse, dont les milieux sont sur une droite donnée, est une parabole.

Cette démonstration m'a été signalée par M. AUBERT, élève du lycée Charlemagne.

III. *Si les diagonales d'un octaèdre forment un trièdre trirectangle, les projections du point de concours des diagonales, sur les faces de l'octaèdre, sont situées sur une sphère* (STEINER); *les perpendiculaires, abaissées du point de concours des diagonales, sur chacune des faces, rencontrent les faces opposées en huit points situés sur la même sphère.*

Soient AOA', BOB', COC' les diagonales de l'octaèdre ; P_1, P_2,... P_8, les projections du point O sur les faces de l'octaèdre : les points P sont les intersections, trois à trois, de six sphères ayant pour diamètres les droites qui joignent le point O aux six sommets de l'octaèdre. Dans l'inversion, par rapport au point O, ces six sphères deviennent les faces d'un parallélipipède rectangle dont les huit sommets, réciproques des points P, sont situés sur une même sphère; il en est donc, de même, pour les points P.

La seconde partie du théorème, qui nous paraît nouvelle, résulte aussi de la considération de la figure inverse. (Voir *N. C. M.*, t. III, p. 210.)

En particulier, *si les diagonales d'un quadrilatère se coupent à angle droit, les perpendiculaires, abaissées du point de concours des diagonales, sur les côtés, rencontrent chacun des côtés, et le côté opposé, en huit points situés sur une circonférence* (*).

(*) *Théorèmes et Problèmes*, p. 136.

que celui-ci avait obtenus, ce semble, *par induction.* » (Gauss, *Œuvres*, t. II, 2e édition, pp. 159-160.)

Antérieurement, dans le même recueil (12 mai 1808, *Œuvres*, t. II, pp. 151-152), Gauss avait déjà énoncé la même pensée : « Les plus belles propriétés des nombres, dit-il, et, en particulier la loi de réciprocité des résidus quadratiques, sont faciles à trouver par induction, mais très-difficiles à démontrer. Fermat connaissait le caractère quadratique des nombres -1, ± 2, ± 3, et il affirme même avoir la démonstration des théorèmes qui y sont relatifs. Comme il n'a rien publié sur la question, nous ne pouvons savoir s'il ne s'est pas trompé; mais cela est très-possible, car on peut citer de grands Géomètres qui se sont fait illusion sur la valeur de leurs démonstrations en Arithmétique supérieure, par exemple, Euler, Legendre et Fermat *lui-même.* »

Ici, comme on le voit, l'accusation est plus précise. En résumé, Gauss dit : I. Il est probable que Fermat a trouvé ses théorèmes par induction. II. Il est possible qu'il n'en ait pas possédé de vraies démonstrations; car : 1° elles sont très-difficiles à trouver; 2° il s'est trompé lui-même sur la valeur de certaines de ses démonstrations.

Nous allons essayer d'établir précisément le contraire de la seconde assertion de Gauss; ce qui affaiblira, du même coup, la première, quoique, à la rigueur, on puisse admettre celle-ci.

(*La fin prochainement.*)

QUELQUES IDENTITÉS.

I. $$[x^3 - y^3 + 3xy(2x + y)]^3 + [y^3 - x^3 + 3xy(2y + x)]^3 = 27xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^3.$$

(Édouard Lucas.)

Remarque. D'après le Théorème de Fermat, le second membre ne saurait être un cube; donc :

L'équation

$$xy(x+y)=z^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

est impossible.

La réciproque est vraie. Par conséquent, si l'on pouvait démontrer, simplement, ce dernier théorème, celui de Fermat s'ensuivrait. Mais l'équation (1) conduit, tout de suite, à celle-ci,

$$x'^3+y'^3=z'^3; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en sorte que l'on tourne dans un cercle.

II. Si $2p=a+b+c$, on a, *identiquement,*

$$p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2=a^2+b^2+c^2.$$

(E. C.)

A-t-on imprimé, quelque part, cette relation évidente? Quoi qu'il en soit, elle donne lieu aux propositions suivantes :

1° *Soient, sur le côté* AB *d'un triangle* ABC, D, P, P', P'' *les points de contact du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits : la somme des carrés des distances du sommet* A, *à ces quatre points, est égale à la somme des carrés des côtés;*

2° *Si l'on prend, sur une droite* AB, *deux points quelconques* M, N (*), *on a, entre les six distances* AM, AN, AB, MN, MB, NB, *la relation*

$$\overline{AM}^2+\overline{MN}^2+\overline{BN}^2+\overline{AB}^2=\overline{AN}^2+\overline{BM}^2+(AM+BN)^2.$$

(*) Moyennant certaines restrictions, ces points peuvent être situés sur les prolongements de la droite.

467. Intégrer l'équation différentielle

$$(x^2 - a^2)^2 y'' + 2x(x^2 - a^2)y' - \left[n(n+1)(x^2 - a^2) + n^2\right]y = 0;$$

et démontrer que l'intégrale complète est une fonction uniforme, lorsque x reste compris dans l'intérieur d'un cercle dont le rayon est a. (Escary.)

468. Théorème. Le quotient

$$\frac{1^5 - 3^5 + 5^5 - 7^5 \cdots - (4x-1)^5}{1 - 3 + 5 - 7 \cdots - (4x-1)},$$

est toujours un carré parfait, mais n'est jamais un bicarré. (É. Lucas.)

469. Dans quels cas la somme

$$-1^5 + 3^5 - 5^5 + \cdots + (4x-1)^5,$$

est-elle un carré, un cube ou un bicarré? (É. L.)

470. Si p est un nombre premier, on a les congruences :

$$E_{p+1} + E_0 \equiv 0, \pmod{p},$$
$$E_{p-1} + E_{p-2} + \cdots + E_0 \equiv 0, \pmod{p}\ (*).$$

(É. L.)

471. Théorème. Si, dans la formule

$$(B+1)(B+2)\ldots(B+n) = \frac{1.2\ldots n}{n+1},$$

on remplace les exposants de B par des indices, et B_n par le $n^{ième}$ nombre de Bernoulli, on obtient une identité. (É. L.)

(*) Voir un Mémoire de M. Catalan : *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler*; Académie royale de Belgique, t. XXXVII des Mémoires.

Donc : 1° G, H, K sont en ligne droite ($A=0$, $B=0$); 2° G est toujours situé entre H et K, ($C<0$); 3° le rapport $\frac{GH}{GK}$ est égal à $\frac{\Sigma m^2}{(\Sigma m)^2-\Sigma m^2}$: en particulier, si toutes les masses sont égales, ce rapport est $\frac{1}{p-1}$. (Ernest Cesaro.)

Question 453. (*)

Le nombre 2^k+1 *est premier ou composé, suivant qu'il divise ou qu'il ne divise pas* $3^{2^{k-1}}+1$ ($k=2^n$).

(F. Proth.)

Ce théorème est un cas particulier du suivant, énoncé par le P. Pépin, dans les *Comptes-rendus* (6 août 1877), que j'ai complété et commenté au *Congrès de l'Association française* (Le Havre, 1877), et aussi dans un Mémoire imprimé dans le *Journal de Sylvester* (vol. I, page 313, Baltimore 1878) :

Pour que $p=2^{2^n}+1$ *soit premier, il faut et il suffit que* $a^{\frac{p-1}{2}}+1$ *soit divisible par* p, a *étant un nombre pris arbitrairement parmi la multitude des non-résidus quadratiques de* p, *supposé premier.*

On détermine ces nombres a par l'emploi du symbole de Legendre, généralisé par Jacobi. On peut supposer $a=5$, comme l'a fait le P. Pépin; ou $a=3$, comme l'indique M. Proth; on peut même supposer a racine incommensurable d'une équation du second degré, à coefficients commensurables, que l'on détermine convenablement. Mais il est préférable, ainsi que je l'ai fait observer, de ne pas se servir, dans l'application numérique, de ces *théorèmes wilsoniens*, qui ne font qu'augmenter la longueur des calculs. (É. Lucas.)

(*) Nous ne publions pas la solution de la *Question* 452, que nous transmet M. Lucas, parce qu'elle est semblable à la solution donnée par M. Jamet (voir ci-dessus, p. 107). (E. C.)

Question 454.

Le nombre $2^{4P} - 2^{2P} + 1$ *est toujours composé* (P *est premier, et supérieur à* 3). (F. Proth.)

Il n'est pas nécessaire de supposer P premier, plus grand que 3. Il suffit de prendre $P = 2n + 1$: l'expression proposée

$$2^{8n+4} - 2^{4n+2} + 1$$

est le produit des deux facteurs

$$2^{4n+2} + 2^{3n+2} + 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1,$$

$$2^{4n+2} - 2^{3n+2} + 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1.$$

On obtient facilement cette identité, pour $P = 3$, et un grand nombre d'autres, pour P impair, en appliquant la formule de décomposition de $2^{4m+2} + 1$, de M. Le Lasseur, au quotient de $2^{2q(2n+1)} + 1$ par $2^{2(2n+1)} + 1$ (*).

Remarque. — Le prochain cahier du *Bullettino di Bibliografia* (décembre 1878) contiendra les principaux résultats numériques obtenus par Aurifeuille et Le Lasseur, dans la décomposition des grands nombres, de la forme $2^m \pm 1$; ils surpassent, de beaucoup, ceux qui ont été publiés, il y a une vingtaine d'années, en Allemagne, par Reuschle (**), suivant le désir de Jacobi.

Voici quelques autres résultats curieux et inédits, qui viennent de m'être adressés, il y a quelques jours, par M. le Con-

---

(*) On voit que la restriction faite par M. Jamet (p. 108) peut être écartée. A la page 109, on doit lire $n^{p'}$, au lieu de $u^{p'}$. (E. C.)

(**) Le professeur Reuschle, mort dernièrement, a publié, d'après les théories de Kummer, les tables des nombres premiers complexes ; ces tables ont été imprimées aux frais du gouvernement prussien.

seiller d'État Wilhelm Looff, sur les nombres de la forme $10^n \pm 1$.

$$10^{15} - 1 = 3^2.53.79.265371653,$$
$$10^{15} + 1 = 11.859.1058313049,$$
$$10^{17} - 1 = 3^2.2071723.5363222357,$$
$$10^{17} + 1 = 11.103.4013.21993833369,$$
$$10^{21} - 1 = 3^2.37.43.239.1933.4649.10838689,$$
$$10^{21} + 1 = 7^2.11.13.127.2689.459691.909091,$$
$$10^{25} + 1 = 353.449.641.1409.69857,$$
$$10^{45} + 1 = 101.9901.999999\,000001.$$

Les divers facteurs des seconds membres, des égalités précédentes, sont premiers; mais on ne connaît pas encore la nature des nombres $10^{19} \pm 1$ et $10^{20} + 1$. Cependant, M. Looff m'écrit encore qu'il a vérifié, après 6091 divisions, que le nombre

$$1111\ 11111\ 11111\ 11111,$$

égal au quotient de $10^{19} - 1$ par 9, n'a pas de facteur premier inférieur à 3035479.

Quant aux formules de Le Lasseur et Aurifeuille, que j'ai développées et généralisées dans les *Comptes-rendus de l'Académie de Turin*, et dans ceux de l'*Association française*, au Congrès de Paris, elles donnent

$$10^{30} + 1 = 61.101.3541.9901.27961.4188901.39526741.$$

(É. Lucas.)

Question 458.

Un triangle étant donné, on propose de construire, sur ses côtés, six autres triangles tels, que l'aire du triangle proposé soit une moyenne harmonique entre les aires des six triangles inconnus. (Escary.)

PROBLÈMES SUR LES NORMALES A L'ELLIPSE;

par M. Édouard Lucas.

1. *Trouver le lieu des sommets des triangles circonscrits à l'ellipse, et dont les hauteurs sont normales à l'ellipse.*

Nous rappellerons d'abord ce théorème, dû à Joachimsthal : *Si les normales à l'ellipse, aux points d'intersection des polaires de deux points* $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, *concourent en un même point* $M(\alpha, \beta)$, *on a les relations*

$$x_0x_1 = -a^2, \quad y_0y_1 = -b^2;$$

et réciproquement. On démontre immédiatement ce théorème par l'identification du système des deux polaires, qui a pour équation

$$\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right) = 0,$$

avec l'équation

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \lambda[c^2xy - a^2\beta x + b^2\alpha y] = 0,$$

d'une conique passant par les pieds des quatre normales abaissées du point M.

Cela posé, nous considérerons deux cas, suivant que les hauteurs du triangle sont normales à l'ellipse, aux points de contact des côtés opposés, ou en des points autres que les points de contact.

Premier cas. — Désignons par A l'un des sommets du triangle, par A' le pied de la hauteur, situé sur l'ellipse; par x, y les

coordonnées du point A ; et par φ le paramètre angulaire du point A'. D'après le théorème précédent, il suffit d'exprimer que le point A se trouve sur la normale en A', et que le point dont les coordonnées sont $-\frac{a^2}{x}$, $-\frac{b^2}{y}$, est situé sur la tangente en A'. On a donc les relations

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - a^2 = \frac{by}{\sin\varphi} - b^2 = \lambda, \quad \frac{a}{x}\cos\varphi + \frac{b}{y}\sin\varphi + 1 = 0.$$

On en déduit, pour les coordonnées du point A :

$$x = \frac{a^2+\lambda}{a}\cos\varphi, \quad y = \frac{b^2+\lambda}{b}\sin\varphi;$$

avec la condition

$$\frac{a^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2}{b^2+\lambda} + 1 = 0.$$

Cette équation donne deux valeurs réelles pour λ; donc le lieu se compose de deux ellipses ayant pour demi-axes :

$$\frac{a^2+\lambda}{a}, \quad \frac{b^2+\lambda}{b}.$$

On trouve facilement

$$\overline{AA'}^2 = \lambda^2\left[\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right].$$

Par conséquent : le *rapport de la hauteur* AA' *au diamètre conjugué de celui qui passe par* A', *dans l'ellipse donnée, est constant.* (Poujade, *Nouvelles Annales* 1877, p. 353, Question 1243).

D'après un théorème de M. Burnside (Salmon, *Traité des Sections coniques*, page 482), le centre des hauteurs du triangle proposé décrit l'une des ellipses ayant pour équation

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)\left[b^2(a^2+\lambda)^2 + a^2(b^2+\lambda)^2\right] = a^2(b^2+\lambda)^2x^2 + b^2(a^2+\lambda)^2y^2 - (a^2+\lambda)^2(b^2+\lambda)^2;$$

ou, plus simplement,

$$b^2(a^2+\lambda)^2x^2 + a^2(b^2+\lambda)^2y^2 = c^4.$$

De plus, pour que les normales à l'ellipse, en trois points A', B', C', dont les paramètres angulaires sont φ, φ_1, φ_2, concourent en un même point, il faut et il suffit que l'on ait

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_2 + \varphi) + \sin(\varphi + \varphi_1) = 0;$$

donc les *normales en* A, B, C, *au lieu obtenu, concourent en un même point, qui décrit deux ellipses.*

On démontrera, de même, que le lieu des sommets des tétraèdres circonscrits à l'ellipsoïde, et dont les hauteurs, *supposées concourantes*, sont normales à l'ellipsoïde, aux points de contact des faces, est l'intersection d'une surface du quatrième ordre, avec trois ellipsoïdes ayant pour demi-axes $\frac{a^2+\lambda}{a}$, $\frac{b^2+\lambda}{b}$, $\frac{c^2+\lambda}{c}$, λ étant l'une des trois racines réelles de l'équation

$$\frac{a^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2}{c^2+\lambda} + 1 = 0.$$

Cependant, il reste à traiter le lieu des sommets du tétraèdre, dans le cas où les hauteurs ne concourent plus, mais sont normales à l'ellipsoïde, aux points de contact des faces opposées.

Second cas. — Désignons encore par A l'un des sommets du triangle, par A' le pied de la normale issue du point A et perpendiculaire sur le côté opposé BC. Les tangentes à l'ellipse, symétriques, par rapport au centre, des côtés du triangle ABC, forment un triangle A''B''C'' : les coordonnées de A'' sont $-x$, $-y$. Il suffit d'exprimer que la normale en A' passe par le point A, et que la tangente en A' passe par le point ayant pour coordonnées $\frac{a^2}{x}$, $\frac{b^2}{y}$. Donc, en désignant par φ le paramètre angulaire de A', on a, comme ci-dessus :

$$x = \frac{a^2+\lambda}{a}\cos\varphi, \quad y = \frac{b^2+\lambda}{b}\sin\varphi;$$

avec la relation

$$\frac{a^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2}{b^2+\lambda} - 1 = 0;$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \pm ab.$$

Par suite, le lieu des sommets se compose de deux cercles, ayant pour rayons $a \pm b$.

De plus, AA' est égal au demi-diamètre conjugué de celui qui passe par A'; et le centre des hauteurs du triangle ABC décrit l'un des cercles ayant pour équations

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \pm ab.$$

Remarques. — I. On retrouve un certain nombre des lieux géométriques que nous venons de considérer, dans la résolution des questions suivantes :

1° *Si l'on porte sur la normale en un point de l'ellipse, une longueur égale au demi-diamètre conjugué de celui qui passe en ce point, le lieu de l'extrémité décrit l'un des cercles ayant pour rayons* $a \pm b$.

Ces deux cercles sont les lieux des centres instantanés de rotation, sur le plan fixe, lorsque l'on engendre l'ellipse par le mouvement d'une droite de longueur $a \pm b$, dont les extrémités glissent sur les deux axes.

2° *Si l'on mène deux tangentes parallèles à l'ellipse, dans une direction quelconque, le lieu des centres des cercles tangents à l'ellipse et aux deux parallèles se compose des deux cercles de rayons* $a \pm b$.

3° *Si l'on porte sur la normale en un point de l'ellipse, une longueur égale à* n *fois le demi-diamètre conjugué de celui qui passe en ce point, le lieu de l'extrémité se compose de deux ellipses ayant pour demi-axes* $a \pm nb$, $b \pm na$.

II. *Trouver le lieu des sommets des triangles formés par deux tangentes à l'ellipse, et la corde des contacts, de telle sorte que le point de concours* H, *des hauteurs du triangle, soit situé sur l'ellipse.*

Deux sommets B, C décrivent l'ellipse; il suffit de trouver le lieu du troisième sommet A. En traitant directement le problème, on obtient une équation du *douzième* degré, qui représente : 1° l'ellipse; 2° le quadrilatère des foyers; 3° le lieu du pôle des normales; 4° le lieu cherché, lequel est une ellipse. On obtient directement l'équation de celle-ci de la façon suivante.

Soient φ_1, φ_2, ψ les paramètres angulaires de B, C, H. Si l'on exprime que la droite CH est perpendiculaire sur la tangente BA à l'ellipse, on a

$$b^2 \cos\varphi_1 \cos\frac{\varphi_2+\psi}{2} + a^2 \sin\varphi_1 \sin\frac{\varphi_2+\psi}{2} = 0;$$

ou, en développant,

$$\cos\frac{\psi}{2}\left[a^2 \sin\varphi_1 \sin\frac{\varphi_2}{2} + b^2 \cos\varphi_1 \cos\frac{\varphi_2}{2}\right]$$
$$= \sin\frac{\psi}{2}\left[b^2 \cos\varphi_1 \sin\frac{\varphi_2}{2} - a^2 \sin\varphi_1 \cos\frac{\varphi_2}{2}\right].$$

Si l'on échange φ_1 et φ_2, et que l'on élimine l'angle ψ entre ces deux équations de condition, on trouve, après avoir divisé par $\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$, la relation

$$\frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{a^2} + \frac{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{b^2} + \frac{1}{a^2+b^2} = 0.$$

On obtient $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2$ et $\sin\varphi_1 \sin\varphi_2$ au moyen des équations aux abscisses et aux ordonnées des points de contact des tangentes menées à l'ellipse par le point A. Désignant par x, y les coordonnées de celui-ci, on a enfin, pour le lieu cherché,

$$\left(\frac{ax}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{by}{a^2+b^2}\right)^2 = 1.$$

SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE BIQUADRATIQUE (*);

par M. Édouard Lucas.

1. Soit à résoudre, en nombres rationnels, l'équation indéterminée

$$y^2 = f(x), \quad \ldots \quad (1)$$

dans laquelle on suppose, avec des coefficients rationnels,

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Désignons par $\varphi_p(x)$ et $\varphi_{p+2}(x)$ des polynômes en x, de degrés p et $(p+2)$, dont les coefficients sont indéterminés, mais rationnels, et supposons le coefficient de x^p, dans $\varphi_p(x)$, égal à 1. Si l'on fait

$$y = \frac{\varphi_{p+2}(x)}{\varphi_p(x)}, \quad \ldots \quad (2)$$

on voit immédiatement, par l'élimination de y entre les équations (1) et (2), qui conduit à

$$[\varphi_{p+2}(x)]^2 = f(x)\,[\varphi_p(x)]^2, \quad \ldots \quad (3)$$

que le système des équations (1) et (2) admet, en général, $(2p+4)$ valeurs de x, à chacune desquelles correspond, d'après (2), une seule valeur de y.

Supposons que l'on connaisse $(2p+3)$ solutions rationnelles de l'équation (1), et déterminons les coefficients de l'équation (2), de telle sorte que celle-ci soit vérifiée par les $(2p+3)$ systèmes

(*) Voir les *Atti dell'Accademia pontificia de' Nuovi lincei* (février 1877).

de valeurs de x et de y; les coefficients obtenus seront tous rationnels; par suite, l'équation (3) donnera une valeur rationnelle de x, et l'équation (2), une valeur rationnelle pour y. Donc on obtiendra ainsi une nouvelle solution, en nombres rationnels, de l'équation (1). On doit observer que le signe de y reste indéterminé; mais on ne peut déterminer les coefficients de l'équation (2) en prenant, en même temps, parmi les $(2p+3)$ solutions primitives, deux solutions qui diffèrent, seulement, par le signe de y.

De plus, on pourra supposer que plusieurs des solutions primitives : x_1, x_2, x_3, ... x_{2p+3}, deviennent égales entre elles. Mais alors, on remplacera le système des équations

$$\pm\sqrt{f(x_i)} = \frac{\varphi_{p+2}(x_i)}{\varphi_p(x_i)},$$

pour $i=1, 2, 3, \ldots, (2p+3)$, par un système formé de la première de ces équations et de ses $(2p+2)$ dérivées, prises par rapport à x.

2. En supposant $p=0$, et x_1, x_2, x_3 inégaux, on déterminera les coefficients l, m, n, de $\varphi_2(x)$, par les équations :

$$\left.\begin{aligned} l + mx_1 + nx_1^2 &= \pm y_1, \\ l + mx_2 + nx_2^2 &= \pm y_2, \\ l + mx_3 + nx_3^2 &= \pm y_3; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

et l'on obtiendra la nouvelle valeur

$$x = \frac{2mn - b}{a - n^2} - (x_1 + x_2 + x_3).$$

Si l'on suppose, plus particulièrement $x_1 = x_3$, la troisième équation du système (4) est remplacée par

$$m + 2nx_1 = \frac{f'(x_1)}{\pm\sqrt{f(x_1)}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Enfin, si $x_1 = x_2 = x_3$, la seconde équation du système (4) devient

$$n = \frac{2f(x_1)f''(x_1) - [f'(x_1)]^2}{8f(x_1)\sqrt{f(x_1)}} \quad \ldots\ldots (6)$$

Par conséquent, d'une première solution de l'équation (1), on déduira, par ce procédé, une série indéfinie de solutions nouvelles. On a d'ailleurs une première solution de l'équation (1), lorsque le dernier coefficient e est un carré parfait, (alors $x_1 = 0$, $y_1 = \pm\sqrt{e}$), ou lorsque le premier coefficient a est un carré parfait: dans ce dernier cas, on change x en $\frac{1}{z}$ dans l'équation (1), et l'on se trouve ramené au cas précédent.

On obtient encore une solution immédiate de l'équation proposée, lorsque le polynôme $f(x)$ est le produit de deux facteurs rationnels, de degrés inégaux, c'est-à-dire, lorsque l'équation $f(x)=0$ admet une racine commensurable $x=\alpha$; on remplace alors l'équation (2) par celle-ci :

$$y = \frac{(x-\alpha)\varphi_{p+1}(x)}{\varphi_p(x)} \quad \ldots\ldots (7)$$

Enfin, lorsque le polynôme $f(x)$ est le produit de deux facteurs $f_1(x)$, $f_2(x)$ du second degré, à coefficients commensurables, on remplace l'équation (2) par

$$y = \frac{f_1(x)\varphi_p(x)}{\psi_p(x)}; \quad \ldots\ldots (8)$$

et l'on applique la méthode à $(2p+1)$ solutions de la proposée.

3. On trouve, en particulier, l'application de la formule (7), dans la recherche de nouvelles solutions de ces problèmes de l'*Arithmétique* de Diophante :

Problème I. — *Trouver trois carrés tels, que leur produit,*

diminué d'un quelconque des trois, donne pour reste un carré (Arithmétique de DIOPHANTE, Liv. V, n° XXV).

FERMAT a ramené ce problème au suivant :

PROBLÈME II. — *Trouver deux triangles rectangles, en nombres, tels que le produit de l'hypoténuse et de la hauteur de l'un, soit au produit de l'hypoténuse par la hauteur de l'autre, dans un rapport donné* a. (PRÉCIS DES OEUVRES DE FERMAT, par BRASSINNE, pp. 106, 107 et 108.)

On est en effet conduit, comme l'a montré FERMAT, à la résolution de l'équation

$$y^2 = (x - a)(a - x^2).$$

PROBLÈME III. — *Trouver un triangle rectangle tel, que si l'on ajoute un nombre donné au nombre qui représente son aire, la somme fasse un carré* (DIOPHANTE, Livre LXV, n° III, BRASSINNE, p. 114).

FERMAT est conduit à la résolution de l'équation

$$y^2 = x^4 + 5x^2 + 10x + 4,$$

ou bien

$$y^2 = (x + 1)(x^3 - x^2 + 6x + 4).$$

PROBLÈME IV. — *Trouver un triangle rectangle tel, que son aire, augmentée de l'hypoténuse et d'un côté de l'angle droit, fasse un nombre donné.* (DIOPHANTE, Livre VI, n° X, BRASSINNE, page 117.)

FERMAT considère alors l'équation

$$y^2 = (x + 1)(x^3 + 11x^2 + 7x + 1).$$

cartes d'un jeu, sont délivrés au hasard : se figure-t-on cent joueurs rassemblés, et réclamant, chacun, les numéros 9, 18,...? Dans la réalité, les choses se passent ainsi : à mesure que les billets sont imprimés, on les répartit chez les dépositaires, d'où ils parviennent aux acheteurs. Comment s'y serait pris M. le sous-intendant L. pour acquérir, même en les payant *fort cher*, les numéros

70 000, 140 000, 210 000, ... 11 970 000?

2° La spéculation tentée par le joueur A pourrait être peu lucrative. Car si le *fonds* de la loterie est de 100 francs, et que chaque lot ait une valeur de 11 francs en moyenne (*), A aurait dépensé 12 francs pour n'en gagner, peut-être, que 11.

3° En poussant, à ses dernières limites, le système indiqué par M. L., on arrive à cette conclusion, bien évidente : *pour être sûr de gagner, prenez tous les billets.* Dans la loterie de l'Exposition, l'accapareur aurait dépensé *douze* millions pour en gagner *huit.* »

Extrait d'une lettre de M. Radicke, professeur à Bromberg. — « Quant à la *Question* 471, proposée par M. Lucas, j'oserais croire qu'il y a une erreur; car le premier membre de l'équation

$$(B+1)(B+2)\dots(B+n)=\frac{1.2\dots n}{n+1}$$

ne contient, après le développement, que des termes positifs, dont le dernier est supérieur au second membre... »

Note du Rédacteur. Jusqu'à présent, il y a au moins trois définitions des *coefficients* appelés *Nombres de Bernoulli;* et,

(*) Il resterait seulement 1 franc pour les frais d'administration!

par conséquent, au moins trois manières, parfois contradictoires, d'écrire ces coefficients.

1° D'après Lacroix (*), *le* $(p-1)^e$ *nombre de Bernoulli est le coefficient de* n, *dans le développement de* S_p, *ordonné suivant les puissances de* n. Dès lors, $B_{2q}=0$, puis

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_3=-\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{1}{42},\quad B_7=-\frac{1}{30},\ \ldots$$

2° Divers Géomètres (**) supposent

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{B_1}{1.2}x^2-\frac{B_2}{1.2.3.4}x^4+\ldots\pm\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}x^{2n}\pm\ldots,$$

et appellent *Nombres de Bernoulli* les coefficients, *essentiellement positifs*, $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ Dans ce système, qui paraît être adopté par notre honorable Correspondant :

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66},\ \ldots$$

3° Enfin M. Édouard Lucas, partant de l'*égalité symbolique*

$$px^{p-1}=(B+x+1)^p-(B+x)^p\ (***),$$

dans laquelle les exposants de B doivent être remplacés par des *indices;* M. Lucas disons-nous, appelle *Nombres de Bernoulli* les quantités $B_0, B_1, B_2, \ldots$ qui entrent dans l'équation précédente. Supposant $B_0=1$, il trouve

$$B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},\ \ldots\ B_{2n+1}=0.$$

(*) *Calcul intégral*, t. III, p. 84.

(**) Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 306; Serret, *Notes sur Lacroix*, p. 354; etc.

(***) *N. C. M.*, t. II, p. 330.

On voit que, sous le rapport des notations, l'anarchie est complète (*). Quoi qu'il en soit, l'équation citée par M. Radicke donne, successivement

$$-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{6}-3\cdot\frac{1}{2}+2=\frac{2}{3},$$

$$6\cdot\frac{1}{6}-11\cdot\frac{1}{2}+6=\frac{1.2.3}{4},$$

. . . . . .

ce qui est exact.

Remarque. Cette équation étant écrite ainsi :

$$B_n+P_{n,1}\cdot B_{n-1}+P_{n,2}\cdot B_{n-2}+\cdots+P_{n,n}=\frac{1.2.3\ldots n}{n+1},$$

peut servir à *trouver la somme des produits*, p *à* p, *des* n *premiers nombres entiers* (**). »

Extrait d'une lettre du prince B. Boncompagni. — « ... Je prends la liberté de vous faire remarquer : 1° que les deux solutions mentionnées dans ce passage (***) ne se trouvent pas dans le cahier de novembre 1878 du *Bullettino*, mais dans le cahier d'août 1878 de ce recueil; qu'une de ces deux solutions est due à M. Siacci, ... »

(*) Quand notre savant Collaborateur publia son remarquable travail, nous lui conseillâmes de remplacer B par L, ou par toute autre lettre.

(**) Question traitée par M. H. Laurent (*Nouvelles Annales*, 1875, p. 335) et par M. Le Paige (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. I, p. 43).

(***) *N. C. M.*, *avril* 1879, p. 144,

Pour obtenir la probabilité, il faut diviser ces deux nombres par n^2. Par exemple, on trouve pour

$$n = 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\ 100,\quad 1000$$

les probabilités

$$\frac{1}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{7}{16};\ \frac{12}{25};\ \frac{19}{36};\ 0{,}8715;\ 0{,}958328.$$

Quant à la première question, où p et q sont compris entre $-n$ et $+n$, il faut doubler les nombres R du cas précédent, ajouter $(n+1)(2n+1)$ et diviser enfin par $(2n+1)^2$.

(Radicke.)

Autre solution par M. E. Cesaro.

Question 468.

Théorème. *Le quotient*

$$\frac{1^3 - 3^3 + 5^3 - 7^3 + \cdots - (4x-1)^3}{1 - 3 + 5 - 7 + \cdots - (4x-1)}$$

est toujours un carré parfait, mais n'est jamais un bicarré.

(É. Lucas.)

Première solution. Le numérateur du quotient proposé,

$$\sum\{(4x-3)^3 - (4x-1)^3\},$$

ou

$$\sum\{-5.2^6x^4 + 5.2^{10}x^3 - 5.13.2^6x^2 + 5^3.2^6x - 2.11^2\}$$

se détermine par la formule connue :

$$\sum x^p = \frac{(x+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2}(x+1)^p + (p)_1 B_1 (x+1)^{p-1} - \frac{1}{4}(p)_3 B_3 (x+1)^{p-3} + \cdots;$$

peut inscrire et ex-inscrire à un triangle quelconque, est égale au double de l'inverse du rayon du cercle inscrit.

(Escary.)

494. Trouver la somme des termes de la série

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2+1^2} + \frac{1}{1^2+1^2+2^2} - \frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2} + \frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2} - \frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2} + \ldots$$

(É. Lucas.)

495. Si M, M′ sont les points où deux bissectrices d'un triangle rencontrent les côtés opposés; la distance de tout point de la droite MM′, au troisième côté, est égale à la somme des distances du même point aux deux autres côtés. (E. Cesaro.)

496. Si M, M′, M″ sont les points où les trois arêtes du sommet d'un tétraèdre sont rencontrées par les plans bissecteurs des dièdres opposés; la distance de tout point du plan MM′M″, à la face opposée, est égale à la somme des distances du même point aux trois autres faces. (E. Cesaro.)

ERRATA.

Question 461 (p. 110). Au lieu de : 294, 245, 240, lisez : 72, 45, 40.

(E. Cesaro.)

Question 467 (p. 112). Au lieu de : $n(n+1)(x^2-a^2)+n^2$, lisez : $n(n+1)(x^2-a^2)+a^2n^2$.

Question 135.

Dans l'ellipse, le demi-diamètre OA', *perpendiculaire à la normale en* M, *est moyen proportionnel entre les rayons vecteurs* FM, F'M.

On a, par des formules connues :

$$uv = \left(a + \frac{c}{a}x\right)\left(a - \frac{c}{a}x\right) = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{a^2}.$$

Mais

$$a^2x^2 = \frac{a^4}{b^2}(b^2 - y^2);$$

donc

$$uv = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{d^2},$$

d étant la distance du centre à la tangente en M. Et comme, d'après le premier théorème d'Apollonius, $ab = da'$, la dernière égalité se réduit à

$$uv = a'^2\ (^*).$$

(E. C.)

Question 138.

Déterminer directement, au moyen de la table des nombres premiers, le dénominateur du n^ième^ *nombre de Bernoulli. Démontrer, en particulier, les propositions suivantes :*

1° *Si* p *et* q *sont premiers entre eux, le dénominateur de* B_{pq} *est divisible par le produit des dénominateurs de* B_p *et de* B_q.

2° *Si* $2p + 1$ *est un nombre premier, ce nombre divise le dénominateur de* B_p. (É. Lucas.)

Je désire seulement appeler l'attention sur une indication bibliographique, de nature à faciliter la solution de la question.

(*) *Cours d'Analyse de l'Université de Liége*, seconde édition, p. 482.

La plus complète série de nombres de Bernoulli a été donnée par M. J. C. Adams, dans le tome LXXXV (1878) du *Journal de Crelle-Borchardt.*

Ohm avait donné déjà, dans le tome XX du même *Journal,* les valeurs des 31 premiers. M. Adams a donné les valeurs des 31 nombres suivants. Il s'est servi, pour cela, du Théorème de Staudt. (*N. C. M.*, t. III, p. 70.)

Les dénominateurs ont des valeurs assez petites, qui se reproduisent avec une certaine régularité (*).

1	6	21	1 806	41	498
2	30	22	690	42	3 404 310
3	42	23	282	43	6
4	30	24	46 410	44	61 410
5	66	25	66	45	272 118
6	2 730	26	1 590	46	1 410
7	6	27	798	47	6
8	510	28	870	48	4 501 770
9	798	29	354	49	6
10	330	30	56 786 730	50	33 330
11	138	31	6	51	4 326
12	2 730	32	510	52	1 590
13	6	33	64 722	53	642
14	870	34	30	54	209 191 710
15	14 322	35	4 686	55	1 518
16	510	36	140 100 870	56	1 671 270
17	6	37	6	57	42
18	1 919 190	38	30	58	1 770
19	6	39	3 318	59	6
20	13 530	40	230 010	60	2 328 255 930

(*) Il serait plus exact de dire : « les petits dénominateurs se reproduisent. » (E. C.)

Enfin, les dénominateurs de B_{61}, B_{62} sont 6 et 30.

La série de ces nombres est assez étendue pour permettre de faire quelques remarques sur les relations entre les diviseurs de B_n et de n. On peut donc, sinon démontrer, au moins vérifier, et étendre, par induction, au delà des limites de cette table, l'exactitude des propositions énoncées, sans parler d'autres propriétés que l'on pourrait reconnaître.

Ainsi, l'on voit que :

1°	6	divise tous les dénominateurs.	
2°	10	»	d'ordre pair.
3°	7	»	d'ordre $3n$.
4°	11	»	d'ordre $5(2n+1)$.
5°	91	»	d'ordre $6n$.
6°	29	»	d'ordre $14n$.

Ces diverses remarques sont renfermées dans les deux propositions énoncées par M. Lucas.

(H. Brocard.)

Question 139.

Quelle est la forme linéaire des diviseurs premiers des numérateurs de B_p ? (É. Lucas.)

La table des nombres de Bernoulli, déterminés par M. Adams, donnerait la solution de cette question, à condition de décomposer les numérateurs en leurs facteurs premiers.

Les seules remarques résultant de l'inspection même de cette table, sont les suivantes :

Aucun numérateur ne renferme les facteurs 2 et 3, parce que les fractions qui représentent les nombres de Bernoulli sont irréductibles, et que les dénominateurs sont tous multiples de 6.

Les seuls numérateurs divisibles par 5 se terminent par 5 : ils occupent les rangs indiqués par les nombres de la forme $5(2n+1)$.

Voici les numérateurs des seize premiers nombres de Bernoulli :

1	1	7	7	12	236 364 091
2	1	8	3 617	13	8 553 103
3	1	9	43 867	14	23 749 461 029
4	1	10	174 611	15	8 615 841 276 005
5	5	11	854 513	16	7 709 321 041 217
6	691				

(H. Brocard.)

Question 233.

Trouver la loi de formation des nombres à la fois triangulaires et carrés. (Philippe Breton.)

I. L'équation du problème :

$$x^2 = \frac{1}{2}y(y+1),$$

se transforme, immédiatement, en

$$(2y+1)^2 - 2(2x)^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si l'on développe $\sqrt{2}$ en fraction continue, on trouve les réduites :

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \ldots$$

Par conséquent :

$$2x = 2,\ 12,\ 70,\ 408,\ \ldots,$$
$$2y+1 = 3,\ 17,\ 99,\ 577,\ \ldots;$$

ou

$$x = 1,\ 6,\ 35,\ 204,\ \ldots$$
$$y = 1,\ 8,\ 49,\ 288,\ \ldots$$

Question 471.

THÉORÈME. *Si, dans la formule*

$$(B+1)(B+2)\dots(B+n)=\frac{1.2\dots n}{n+1},$$

on remplace les exposants de B *par des indices, et* B_n *par le* $n^{\text{ième}}$ *nombre de Bernoulli, on obtient une identité* (*).

(É. LUCAS.)

En désignant par $P_{n,p}$ la somme des produits, p à p, des n premiers nombres entiers, on a

$$B(B+1)\dots(B+n)=B^{n+1}+P_{n,1}B^n+P_{n,2}B^{n-1}+\dots+P_{n,n}B,$$

$$(B+1)(B+2)\dots(B+n+1)$$
$$=(B+1)^{n+1}+P_{n,1}(B+1)^n+P_{n,2}(B+1)^{n-1}+\dots+P_{n,n}(B+1);$$

et, par conséquent,

$$(n+1)(B+1)(B+2)\dots(B+n)$$
$$=(B+1)^{n+1}-B^{n+1}+P_{n,1}\left[(B+1)^n-B^n\right]+\dots+P_{n,n-1}\left[(B+1)^2-B^2\right]+P_{n,n}.$$

Remplaçons maintenant les exposants de B par des indices, et observons que, d'après M. Lucas, on a l'égalité symbolique :

$$(B+1)^p-B^p=0,\quad p=2,3,4,\dots).$$

Comme on le voit, tous les termes du second membre de l'équation obtenue s'évanouissent, sauf le dernier, qui a la valeur $1.2.3\dots n$; on obtient donc

$$(B+1)(B+2)\dots(B+n)=\frac{1.2\dots n}{n+1}.$$

(RADICKE.)

(*) Voir le numéro de *juin*, p. 196. (E. C.)

(2)

NOUVELLE

CORRESPONDANCE

MATHÉMATIQUE

RÉDIGÉE PAR

EUGÈNE CATALAN,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DOCTEUR ÈS SCIENCES,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE, ETC.;

avec la collaboration de

MM. MANSION, LAISANT, BROCARD, NEUBERG, ÉD. LUCAS, RIBAUCOUR, LE PAIGE.

TOME SIXIÈME

1880

BRUXELLES

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

—

1880

Par conséquent, *les points de contact de* V, *avec deux des circonférences* (*) *circonscrites aux triangles* $A_1A_2A_3$, *sont sur une même circonférence.* (J. Neuberg.)

Question 138.

Déterminer directement, au moyen de la table des nombres premiers, le dénominateur du $n^{ième}$ *nombre de Bernoulli. Démontrer, en particulier, les propositions suivantes :*

1° *Si* p *et* q *sont premiers entre eux, le dénominateur de* B_{pq} *est divisible par le produit des dénominateurs de* B_p *et de* B_q.

2° *Si* $2p+1$ *est un nombre premier, ce nombre divise le dénominateur de* B_p (**). (É. Lucas.)

D'après le théorème de Staudt, on a pour B_n cette expression

$$(-1)^n B_n = A_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\beta+1} + \cdots + \frac{1}{2\lambda+1},$$

dans laquelle A_n étant entier, les nombres $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ sont les diviseurs de n tels, que $2\alpha+1, 2\beta+1, \ldots, 2\lambda+1$ soient premiers. Or, on sait qu'en posant

$$A_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha+1} + \cdots + \frac{1}{2\lambda+1} = \frac{C_n}{2(2\alpha+1)(2\beta+1)\cdots(2\lambda+1)},$$

(*) Les circonférences U, N.

(**) Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que, dans cette *Question*, bien que proposée par M. Lucas, les nombres de Bernoulli ne sont pas définis par l'égalité symbolique

$$(B+1)^p - B^p = 0,$$

mais par l'équation

$$(2n+1)_2 B_1 - (2n+1)_4 B_2 + \cdots + (-1)^{n+1}(2n+1)_{2n} B_n = n - \tfrac{1}{2},$$

où $(2n+1)_2, (2n+1)_4, \ldots$ désignent les coefficients de $x^2, x^4, \ldots$ dans le développement de $(1+x)^{2n+1}$. (R.)

Voir, tome V, page 282, la Note de M. Brocard. (E. C.)

les nombres C_n et $2(2\alpha+1)(2\beta+1)\dots(2\lambda+1)$ sont premiers entre eux. Il en résulte, pour la détermination indépendante du diviseur de B_n, le procédé suivant.

Soient $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ les diviseurs de n. Parmi les nombres

$$2\alpha+1, \quad 2\beta+1, \quad \dots, \quad 2\lambda+1,$$

prenons ceux qui sont premiers. Le double produit des nombres obtenus sera le dénominateur cherché.

Par exemple, pour B_{20}, on a les diviseurs

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 5, \quad 10, \quad 20;$$

les nombres $2\alpha+1, 2\beta+1, \dots$ deviennent, respectivement :

$$3, \quad 5, \quad (9), \quad 11, \quad (21), \quad 41;$$

et, par conséquent, le dénominateur de B_{20} est

$$2.3.5.11.41 = 13530.$$

La proposition 2°, de M. Lucas, est une conséquence immédiate du théorème de Staudt; et la proposition 1°, un peu modifiée, en résulte de même, par la considération suivante.

Soient :

$$B_p = \frac{C_p}{2(2\alpha+1)(2\beta+1)\cdots(2\lambda+1)},$$

$$B_q = \frac{C_q}{2(2\alpha'+1)(2\beta'+1)\cdots(2\lambda'+1)},$$

$$B_{pq} = \frac{C_{pq}}{2(2\alpha''+1)(2\beta''+1)\cdots(2\lambda''+1)};$$

$\alpha, \beta, \dots \lambda$; $\alpha', \beta', \dots \lambda'$; $\alpha'', \beta'', \dots \lambda''$ étant déterminés au moyen de la règle donnée dans ce qui précède. Cela posé, on a

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = 1;$$

puis, les diviseurs de p et de q étant aussi diviseurs de pq, les nombres $\beta, \dots \lambda, \beta', \dots \lambda'$ figurent tous parmi les nombres $\beta'' \dots \lambda''$.

De plus, comme les nombres $\beta, \ldots, \lambda, \beta', \ldots, \lambda'$ sont inégaux, le produit

$$2.3\,(2\beta''+1)\ldots(2\lambda''+1)$$

est divisible par le produit

$$2.3\,(2\beta+1)\ldots(2\lambda+1)\,(2\beta'+1)\,(2\lambda'+1).$$

On a donc le théorème suivant :

Si p *et* q *sont premiers entre eux, le dénominateur de* B_{pq} *est divisible par la sixième partie du produit des dénominateurs de* B_p *et de* B_q.

Voici les valeurs des seize premiers nombres de Bernoulli, représentées conformément à la formule de Staudt :

$$-B_1 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$+B_2 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5},$$

$$-B_3 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7},$$

$$+B_4 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5},$$

$$-B_5 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11},$$

$$+B_6 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13},$$

$$-B_7 = -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$+B_8 = +6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17},$$

$$-B_9 = -56 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{19},$$

$$+B_{10} = +528 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11},$$

$$-B_{11}= -6\,193+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{23},$$

$$+B_{12}= +86\,579+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13},$$

$$-B_{13}= -1\,425\,518+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},$$

$$+B_{14}= +27\,298\,230+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{29},$$

$$-B_{15}= -601\,580\,873+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{31},$$

$$+B_{16}= +15\,116\,315\,766+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17}.$$

Remarque. En appliquant le théorème de Staudt au cas particulier où n est un nombre premier, on obtient cette proposition:

Si, n *étant premier,* $2n+1$ *est un nombre composé,* B_n *a le dénominateur* 6. (Radicke.)

Question 143.

Trouver le lieu du centre du triangle équilatéral dont les sommets sont situés sur trois droites fixes. (É. Lucas.)

Nous généralisons la question, et nous allons démontrer que: *si un triangle* ABC, *inscrit à un triangle fixe* MNP, *se meut en restant semblable à lui-même, un point quelconque de son plan décrit une droite.*

Démonstration analytique. Soient

$$\delta_r = x\cos\alpha_r + y\sin\alpha_r - p_r = 0 \qquad (r=1,2,3)$$

les équations des côtés du triangle fixe MNP; (x, y) les coordonnées du point O du lieu.

Les angles des droites OA, OB, OC, avec l'axe des abscisses,

peuvent être désignés par $\beta_1 + \varphi$, $\beta_2 + \varphi$, $\beta_3 + \varphi$, et les longueurs de ces droites par $\lambda\rho_1$, $\lambda\rho_2$, $\lambda\rho_3$: φ et λ sont deux paramètres variables; $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, (ρ_1, ρ_2, ρ_3) sont des quantités constantes. Par conséquent, les coordonnées de A, B, C sont de la forme

$$x + \lambda\rho_r \cos(\beta_r + \varphi), \quad y + \lambda\rho_r \sin(\beta_r + \varphi).$$

En exprimant qu'elles vérifient les équations des directrices, on obtient trois équations

$$\delta_r \lambda\rho_r \cos(\beta_r + \varphi - \alpha_r) = 0, \qquad (r = 1, 2, 3)$$

entre lesquelles il est facile d'éliminer les variables $\lambda\cos\varphi$, $\lambda\sin\varphi$. On trouve

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta_1}{\rho_1}, & \cos(\beta_1 - \alpha_1), & \sin(\beta_1 - \alpha_1) \\ \frac{\delta_2}{\rho_2}, & \cos(\beta_2 - \alpha_2), & \sin(\beta_2 - \alpha_2) \\ \frac{\delta_3}{\rho_3}, & \cos(\beta_3 - \alpha_3), & \sin(\beta_3 - \alpha_3) \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\sum \frac{\delta_1}{\rho_1} \sin\left[(\alpha_2 - \alpha_3) - (\beta_2 - \beta_3)\right] = 0;$$

donc le lieu du point O est une droite.

Démonstration géométrique. Les circonférences, circonscrites aux triangles MBC, NCA, PAB, se coupent au même point ω. Les angles COB, AOC, BOA étant les suppléments de M, N, P, le point ω reste toujours son propre homologue, par rapport à ABC: il est même fixe, relativement à MNP; car les angles ONA, OPA sont égaux à OCA, OBA; et ceux-ci sont invariables.

Par conséquent, *si un triangle inscrit à un triangle fixe se meut en restant semblable à lui-même, il existe, dans le plan mobile, un point qui reste fixe.*

Considérons, maintenant, le triangle ωNO, toujours semblable à lui-même : un des sommets est fixe, un autre décrit une

droite NP; donc le troisième sommet O décrit, également, une droite qui fait, avec NP, un angle égal à NωO.

Soit I un autre point du plan mobile ABC. O et I décrivent deux droites faisant, avec NP, des angles égaux à NωO, Oωl; donc l'angle de ces droites est égal à π — OωI. De là, on conclut que :

Si un triangle, inscrit à un triangle fixe, se meut en restant semblable à lui-même, toute droite (*) *de ce plan enveloppe une parabole ayant, pour foyer, le point fixe du plan mobile; et les points de cette droite décrivent les tangentes à la parabole.*

(J. Neuberg.)

Questions 370, 371.

370. *On donne une droite* AB, *de longueur* l; *on prend, au hasard, un point* C *entre* A *et* B; *puis, au hasard, un point* D *entre* C *et* B.

Quelle est la probabilité P *que deux des longueurs* AC, CD, DB *soient plus petites qu'une longueur donnée* a?

371. *On casse, au hasard, en trois morceaux, une barre de longueur* l. *Quelle est la probabilité* P *que deux de ces trois morceaux soient plus petits qu'une longueur donnée* a?

(E. Lemoine.)

Supposons que l'on prenne, sur les droites l et a, des points équidistants, qui les partagent, respectivement, en m et n segments égaux à ε; supposons, en outre, que la division de la droite l, en trois segments, ne puisse se faire qu'en ces points, de sorte que les trois segments contiennent, respectivement, x, y, z fois la longueur ε. Pour rentrer dans l'énoncé du problème, il

---

(*) La droite OI, considérée ci-dessus.
Les côtés de HBC enveloppent, également, trois paraboles.

QUESTIONS PROPOSÉES.

523. Les droites qui joignent les projections des pieds D_a, D_b, D_c, des trois hauteurs d'un triangle ABC sur ses côtés, déterminent un triangle $A_1B_1C_1$ homologique avec le premier. L'axe d'homologie est une droite $A_2B_2C_2$; le centre d'homologie, un point O.

Trouver la position de cette droite et de ce point.

(H. Brocard.)

524. En chaque point C d'une courbe on mène la tangente, qui rencontre en A et B les axes de coordonnées.

Par les points C, A, B, on mène des parallèles à ces axes, et l'on détermine ainsi deux *gradins* CEA, BDC (voir *N. C. M.*, t. II, p. 124) et une droite DE. Trouver les courbes telles, que le coefficient angulaire de DE soit une puissance $n^{ième}$ du coefficient angulaire de la tangente AB. Étudier les cas particuliers.

(H. B.)

525. On désigne par $\varphi(a)$ le nombre des entiers non supérieurs au nombre a et premiers avec lui, et par $\psi(a)$ le nombre des entiers plus grand que a, premier avec lui et non supérieurs à un nombre quelconque n, connu.

1° Calculer l'expression de $\psi(a)$;

2° Démontrer que

$$\varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n) = \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n);$$

3° Démontrer que

$$2\varphi(2) + 3\varphi(3) + \cdots + n\varphi(n) = 2\left[2\psi(2) + 3\psi(3) + \cdots + n\psi(n)\right].$$

(Éd. Lucas.)

points de rencontre avec la tangente en M'_1 (*); le foyer de la parabole est la projection du point d'intersection des tangentes rectangulaires OA, OB sur la corde des contacts. Donc :

Si d'un point P, *pris sur une normale fixe* M_1G_1 *à une ellipse* E, *on mène, à la courbe, les trois autres normales, les côtés du triangle formé par les pieds de ces droites enveloppent une parabole tangente aux axes, et dont le foyer est la projection du centre* E *sur la tangente au point diamétralement opposé à* M_1.

On sait que la circonférence circonscrite au triangle formé par trois tangentes à une parabole, passe par le foyer. Par conséquent, *la circonférence* $M_2M_3M_4$, *qui passe déjà par* M'_1, *passe aussi par la projection de* O *sur la tangente en* M'_1.

(*La suite prochainement.*)

SUR L'EXTENSION DU THÉORÈME DE DESCARTES;

par M. Édouard Lucas.

1. Appelons $f_m(x)$ un polynôme ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x,

$$f_m(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m,$$

(*) Car, ces points sont les pôles des asymptotes de l'hyperbole (tangentes perpendiculaires aux axes de E).

La droite M_2M_4 joint les projections, sur les axes de E, d'un point quelconque de la tangente en M'_1. Cette remarque et un théorème connu (*deux tangentes à une parabole sont divisées par une troisième tangente quelconque en parties réciproquement proportionnelles*) conduisent à une démonstration géométrique de la proposition du § 13.

Pour cette proposition, voir : *Comptes-rendus* de 1877 (Laguerre); *Nouvelle Correspondance*, t. IV, pp. 279, 390 (de Longchamps), et p. 391 (Jamet et Appell).

et considérons les polynômes

$$f_0(x) = A_0,$$
$$f_1(x) = A_0x + A_1,$$
$$f_2(x) = A_0x^2 + A_1x + A_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_m(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + A_m;$$

facilement calculables, pour une valeur déterminée de x, par la relation récurrente

$$f_p(x) = xf_{p-1}(x) + A_p.$$

Si l'on désigne par f_0, f_1, ... f_m les valeurs numériques de ces polynômes, pour $x = a$, on a

$$\frac{f_m(x)}{x-a} = f_0x^{m-1} + f_1x^{m-2} + \cdots + f_{m-1} + \frac{f_m}{x-a}.$$

On a aussi les identités

$$\frac{f(x)}{x-a} - \frac{f(x)}{x-b} = (a-b)\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)},$$

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} - \frac{f(x)}{(x-a)(x-c)} = (b-c)\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

qui permettent de calculer les quotients de $f(x)$ par $(x-a)(x-b)$, $(x-a)(x-b)(x-c)$, ..., pour des valeurs, inégales entre elles, de a, b, c, ...

2. Lemme de Segner, généralisé. Si $f(x)$ désigne l'expression

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + Kx + L,$$

le nombre des variations de $(x-b)f(x)$, *pour* b *positif, surpasse, d'un nombre impair, le nombre des variations de* $f(x)$. Ce lemme

sert de base à la démonstration donnée ordinairement, dans les cours, du théorème de Descartes. Il est facile d'étendre la démonstration de ce lemme à l'expression

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots + Kx + L + \frac{M}{x-a},$$

en supposant M constant, et a quelconque, positif ou négatif, pourvu que b soit positif et plus grand que a.

On peut d'ailleurs étendre le lemme, sous certaines conditions, à d'autres fonctions rationnelles de x, de forme unique.

3. Théorème de M. Laguerre. *Dans toute équation algébrique* $f_m(x) = 0$, *le nombre des racines positives, plus grandes que* a, *ne peut surpasser le nombre des variations de la suite*

$$f_0(a),\quad f_1(a),\quad f_2(a),\ \ldots,\ f_m(a),\quad \ldots\ . \qquad (1)$$

et, quand il est moindre, la différence est un nombre pair.

On démontre ce théorème, trouvé par une autre voie, exactement de la même manière que le théorème de Descartes, qui n'en est qu'un cas particulier, dans l'hypothèse $a = 0$.

Remarques. — I. Si pour $x = a$, la suite des fonctions (1) ne présente que des permanences, le nombre a est une limite supérieure des racines positives.

II. On obtient une limite du nombre des racines réelles comprises entre 0 et a, et une limite inférieure des racines positives, en appliquant les considérations précédentes à la transformée en $\frac{1}{x}$, et en remplaçant a par $\frac{1}{a}$. On fera, en particulier, $a = 1$.

Exemple. Soit l'équation

$$f_m(x) = x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0,$$

considérée par MM. Petersen et Laguerre.

Pour $x = 1$, la substitution donne la suite

$$1,\quad -4,\quad -20,\quad -8,\quad -17,\quad -22;$$

et, dans la transformée en $\frac{1}{x}$,

$$-5, \quad -14, \quad -2, \quad -18, \quad -23, \quad -22.$$

Donc l'équation n'a qu'une seule racine positive, laquelle est plus grande que l'unité.

REMARQUES SUR UNE SÉRIE.

I. Soit

$$f(x) = \frac{x^4}{1-x^2} + \frac{x^9}{1-x^3} + \frac{x^{16}}{1-x^4} + \frac{x^{25}}{1-x^5} + \cdots, \quad (1)$$

série dont le terme général a la forme $\frac{x^{(n^2)}}{1-x^n}$. Le développement de cette fraction est

$$x^{n \cdot n} + x^{n(n+1)} + x^{n(n+2)} + \ldots\ldots$$

Par conséquent :

1° *La série* (1), *ordonnée suivant les puissances de* x, *devient*

$$x^4 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + 2x^{12} + x^{14} + 2x^{16} + \cdots + A_N x^N + \cdots; \quad (2)$$

2° *L'exposant* N *est le produit de deux facteurs, autres que l'unité;*

3° *Si* N *n'est pas un carré,* A_N *égale la moitié du nombre des diviseurs de* N, *diminuée de* 1;

4° *Si* N *est un carré,* A_N *égale cette moitié, diminuée de* $\frac{1}{2}$.

II. Attribuons à N une valeur déterminée, et prenons la dérivée $N^{\text{ième}}$ de $f(x)$. Nous aurons

$$\frac{d^N f(x)}{dx^N} = 1.2.3...NA_N + (N'-N+1)(N'-N+2)...N'A_N x^{N'-N} + \cdots;$$

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 397.

On donne une circonférence OBD, *un diamètre fixe* D'OBD, *une tangente parallèle* CI, *dont le point de contact soit* C. *On projette chaque point* A *de la courbe, en* B, *sur* OD, *puis le point* B, *en* M, *sur* CA. *Trouver le lieu du point* M.

(H. Brocard.)

Prenons pour pôle le point C et pour axe polaire le diamètre COC', perpendiculaire à DD'. Soient r, θ les coordonnées du point M.

Si le point A est situé sur la demi-circonférence DC'D', nous aurons

$$r = CA - MA.$$

Mais

$$CA = 2R\cos\theta, \quad MA = AB\cos\theta = R\cos 2\theta\cos\theta;$$

donc

$$r = R(2 - \cos 2\theta)\cos\theta.$$

Même résultat si l'on suppose A situé sur DCD'.

La courbe est très-facile à construire.

(E. Fauquembergue.)

Question 595.

On désigne par $\varphi(a)$ *le nombre des entiers non supérieurs au nombre* a *et premiers avec lui, et par* $\psi(a)$ *le nombre des entiers plus grands que* a, *premiers avec lui et non supérieurs à un nombre quelconque* n *connu :*

1° *Calculer l'expression de* $\psi(a)$;

2° *Démontrer que*

$$\varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n) = \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n);$$

3° *Démontrer que*

$$2\varphi(2) + 3\varphi(3) + \cdots + n\varphi(n) = 2\left[2\psi(2) + 3\psi(3) + \cdots + n\psi(n)\right].$$

(É. Lucas.)

En désignant par $\psi(a, \nu)$ le nombre des entiers plus grands que a, premiers avec a et non supérieurs au nombre ν, on voit, d'abord, que la différence

$$\psi(a, \nu) - \psi(a, \nu - 1)$$

a la valeur 1 ou 0, selon que a est premier, ou non, avec ν (*). Par conséquent, l'expression

$$\psi(1, \nu) + \psi(2, \nu) + \cdots + \psi(\nu - 1, \nu) - \psi(1, \nu - 1) - \psi(2, \nu - 1) - \cdots - \psi(\nu - 1, \nu - 1)$$

est égale au nombre des entiers non supérieurs à ν et premiers avec ν, c'est-à-dire égale à $\varphi(\nu)$. Après avoir posé, successivement, $\nu = 2, 3, 4, \ldots, n$, nous obtenons, par addition,

$$\psi(1, n) + \psi(2, n) + \cdots + \psi(n, n) = \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n)\ (**).$$

Pour démontrer la seconde formule, je fais observer que la différence

$$a\psi(a, \nu) - a\psi(a, \nu - 1)$$

a la valeur a ou 0, selon que a est premier, ou non, avec ν; c'est

---

(*) Voir, plus loin, la solution de la *Question* 550. (E. C.)

(**) A cause de $\psi(n, n) = 0$, on peut ajouter, au premier membre, le terme $\psi(n, n)$; mais il n'est pas permis de chasser le terme $\psi(1, n)$. D'après cela, les formules de M. Lucas sont à modifier. (R.)

pourquoi la somme

$$1\psi(1,\nu) + 2\psi(2,\nu) + \cdots + (\nu-1)\psi(\nu-1,\nu)$$
$$- 1\psi(1,\nu-1) - 2\psi(2,\nu-1) - \cdots - (\nu-1)\psi(\nu-1,\nu-1)$$

égale la somme des entiers non supérieurs à ν et premiers avec ν, c'est-à-dire $\frac{\nu\varphi(\nu)}{2}$. En procédant comme on l'a fait ci-dessus, on trouve

$$1\psi(1,n) + 2\psi(2,n) + \cdots + (n-1)\psi(n-1,n)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[2\varphi(2) + 3\varphi(3) + \cdots + n\varphi(n)\right] (*).$$

(Radicke.)

Question 533.

Soient : DA, BC *deux droites perpendiculaires à* OX; F, *un point de* OX; MN, *un arc de courbe;* MF, *la tangente menée du point* F. *Cette tangente rencontre* DA, BC *aux points* A, C. *On joint* C *au pied* E *de l'ordonnée du point* M : *la droite* CE *rencontre* DA *en un point* A'. *On demande pour quelle courbe* MN *la construction ainsi dirigée donne, chaque fois,* DA = DA'.

(H. Brocard.)

I

Prenons DA pour axe des y; soient x, y les coordonnées du point M. L'ordonnée du point A est

$$y - x\frac{dy}{dx}.$$

Par suite, l'équation de la droite A'E est

$$\frac{X}{x} - \frac{Y}{y - x\dfrac{dy}{dx}} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(*) Voir la Note ci-dessus. (R.)

Nous laissons, au savant professeur de Bromberg, la responsabilité de ses remarques. (E. C.)

et que

2 918 000 731 816 531 *est un nombre premier* (*).

Ce dernier résultat, naturellement, a été obtenu avec moins de facilité que les deux premiers. Les deux autres nombres (**) demanderaient quelques efforts de plus. »

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 494.

Trouver la somme des termes de la série

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{1^2+1^2}+\frac{1}{1^2+1^2+2^2}-\frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2}+\frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2}-\frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2}+\ldots$$

(É. Lucas.)

I. On a

$$1^2=1$$
$$1^2+1^2=2,$$
$$1^2+1^2+2^2=2+2^2=2.3,$$
$$1^2+1^2+2^2+3^2=2.3+3^2=3.5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit que le dénominateur du $n^{\text{ième}}$ terme de la série est le

(*) Ce nombre *premier* est-il le plus grand qui soit connu? (E. C.)

(**) Voir *N. C. M.*, tome VI, p. 367.

produit des termes u_{n-1}, u_n de la série de Lamé :

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots\ldots$$

dans laquelle

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

II. Cette dernière relation constitue une équation aux différences finies, que l'on intègre facilement; on trouve :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

III. Je dis que l'on a :

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{u_{n-1}\cdot u_n} = \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} - \frac{u_{n-2}}{u_n}.$$

En effet, le second membre, après réduction, devient

$$\frac{u_{n-2}u_n - u_{n-2}u_{n-1}}{u_{n-1}u_n} = -\frac{(-1)^{n-2}}{u_{n-1}u_n} - \frac{(-1)^{n-1}}{u_{n-1}u_n}.$$

IV. Considérons la somme des n premiers termes de la série proposée :

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.8} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{u_{n-1}u_n}.$$

D'après la formule précédente, chacun des termes, à partir du troisième, se décompose en deux autres, de telle sorte que l'on a :

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{5}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} - \frac{u_{n-2}}{u_n}\right);$$

d'où :

$$S_n = 1 - \frac{u_{n-2}}{u_n} = \frac{u_n - u_{n-2}}{u_n} = \frac{u_{n-1}}{u_n};$$

et

$$S = \lim \frac{u_{n-1}}{u_n} = \lim \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} = \frac{2}{1-\sqrt{5}}.$$

MANGON,
sous-lieutenant d'Artillerie (Liège).

Question 567.

Vérifier l'identité

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}\left[1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}x^n\right]$$
$$=1+\frac{n_1}{3}(x-1)+\frac{n_2}{5}(x-1)^2+\cdots+\frac{1}{2n+1}(x-1)^n,$$

dans laquelle

$$n_1=\frac{n}{1},\quad n_2=\frac{n(n-1)}{1.2},\quad \ldots$$

(HERMITE.)

L'intégration par parties conduit à la relation générale

$$\int_1^x \frac{x^n dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{2}{2n+1}x^n\sqrt{x-1}+\frac{2n}{2n+1}\int_1^x \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{x-1}}.$$

Faisons-y, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots n$; nous obtiendrons, par des substitutions successives :

$$\int_1^x \frac{x^n dx}{\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}\left[1+\frac{1}{2}x+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^n\right]2\sqrt{x-1}.$$

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences
Professeur ordinaire à l'Université de Gand
Docteur spécial en sciences mathématiques, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences
Professeur à l'Athénée royal
et à l'École des mines de Liège

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS

TOME PREMIER

ANNÉE 1881

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

1881

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN

PRÉFACE.

Le nouveau journal, dont nous commençons aujourd'hui la publication, sous le nom de *Mathesis* (*), est, en quelque sorte, la continuation de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, fondée, en 1874, par M. Catalan, professeur à l'université de Liège, et par l'un de nous. Notre savant collègue a dirigé seul ce dernier recueil, de 1876 à 1880, et l'a élevé, peu à peu, au dessus du modeste programme formulé en tête du tome premier, de manière à lui attirer d'illustres collaborateurs, parmi lesquels nous citerons MM. Hermite, Cremona, E. Lucas, J. W. L. Glaisher. M. Catalan, ayant renoncé à la publication de la *Nouvelle Correspondance*, qui, par son caractère trop élevé, ne répondait peut-être pas tout à fait aux besoins de l'enseignement en Belgique, nous nous sommes décidés à faire paraître un nouveau journal de mathématiques, encouragés que nous étions par M. Catalan lui-même.

(*) Μάθησις = *discendi actio, cognitio, doctrina*, en grec classique ; en latin ancien, *mathesis* = *astrologie* et, quelquefois, *mathématiques ;* en latin moderne, ce dernier sens a prévalu.

Quant au programme de la *Mathesis*, nous ne pouvons mieux le faire connaître qu'en reproduisant, avec quelques modifications, une partie de la préface du recueil auquel elle fait suite :

Notre journal s'occupera, principalement, des parties de la science mathématique enseignées dans les classes supérieures des établissements d'instruction moyenne et dans les cours des Écoles spéciales. Nous essayerons, en particulier, de vulgariser la connaissance des parties les moins abstraites de la géométrie supérieure et de l'algèbre moderne. Nous espérons entreprendre aussi l'examen approfondi de certaines questions capitales de méthodologie mathématique, telles que la théorie des incommensurables, celle des quantités négatives et celle des imaginaires.

Nous publierons, dans chaque numéro : 1° des articles originaux; 2° des solutions de questions choisies; 3° des analyses, extraits, comptes-rendus ou traductions de mémoires ou d'ouvrages, de manière à tenir nos lecteurs au courant de la science, autant que le permet le cadre de notre recueil.

Nous serons forcés d'en exclure les articles absolument trop élémentaires et ceux qui, par leur caractère même, figureraient mieux dans les recueils académiques. Entre ces deux limites, nous accueillerons avec plaisir tous les articles intéressants qu'on voudra bien nous envoyer.

P. Mansion.
J. Neuberg.

NOTES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE,

par M. Éd. Lucas, professeur au lycée S. Louis à Paris.

1. Théorème I. *Si trois points d'une droite demeurent sur les faces d'un trièdre, un quatrième point de la droite décrit un ellipsoïde* (Dupin).

Prenons les trois plans pour plans de coordonnées. Soient A, B, C les points qui demeurent respectivement dans les plans des YZ, ZX, XY, et a, b, c, les distances de ces points au quatrième point M de coordonnées x, y, z. Les équations de la droite mobile sont :

$$\frac{X-x}{\alpha}=\frac{Y-y}{\beta}=\frac{Z-z}{\gamma}=\rho,$$

α, β, γ étant les coordonnés d'un point N situé sur une parallèle à MA menée par l'origine O, et à une distance de O égale à l'unité, ρ la distance du point (X, Y, Z) au point M. Si l'on exprime que les points A, B, C sont sur cette droite, on trouve

$$-x=a\alpha, \quad -y=b\beta, \quad -z=c\gamma.$$

On a, d'ailleurs,

$$\overline{ON}^2=1=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\cos(x,y)+2\beta\gamma\cos(y,z)+2\gamma\alpha\cos(z,x);$$

l'équation du lieu cherché est donc :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\frac{xy}{ab}\cos(x,y)+2\frac{yz}{bc}\cos(y,z)+2\frac{zx}{ca}\cos(z,x)=1.$$

2. Théorème II. *Si quatre points d'une droite demeurent sur les faces d'un tétraèdre, un cinquième point de la droite décrit un ellipse* (Mannheim).

D'après le théorème précédent, le lieu cherché est la courbe d'intersection de deux ellipsoïdes ; il suffit de démontrer que cette courbe est plane. Représentons par

$$P_r=A_rX+B_rY+C_rZ+D_r=0, \quad (r=1,2,3,4),$$

les quatre plans rapportés à des axes quelconques, et soient a, b, c, d, les distances des quatre points A, B, C, D au cinquième M (x, y, z). En exprimant que le point A dont les coordonnées sont $x+\alpha a$, $y+\beta a$, $z+\gamma a$, se trouve dans le plan P_1, on a

$$A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{a}=0,$$

et de même pour les autres points; d'où l'on déduit, par élimination,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \frac{P_1}{a} \\ A_2 & B_2 & C_2 & \frac{P_2}{b} \\ A_3 & B_3 & C_3 & \frac{P_3}{c} \\ A_4 & B_4 & C_4 & \frac{P_4}{d} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est l'équation d'un plan.

3. THÉORÈME III. *Si quatre points d'une droite demeurent sur les faces d'un tétraèdre, cette droite reste parallèle aux génératrices d'un cône de révolution* (MANNHEIM).

En effet, si l'on prend les trois premiers plans pour plans de coordonnées, et si l'on exprime que le point M (voir 1°) demeure sur le quatrième plan P_4, on a

$$A_4\,\alpha\alpha + B_4\,b\beta + C_4\,c\gamma - D_4 = 0.$$

Donc le point N décrit l'intersection d'une sphère et du plan déterminé par l'équation précédente. C. q. f. d.

NOTE. — Les théorèmes dont M. Lucas vient de donner une démonstration très-remarquable sont, en quelque sorte, la généralisation des propriétés suivantes qui sont mieux connues : *Si deux points* A, B *d'une droite mobile demeurent sur deux droites fixes non situées dans un même plan, cette droite reste parallèle aux génératrices d'un cône de révolution dont l'axe est parallèle à la plus courte distance des directrices; tout point de* AB *décrit une ellipse; le milieu de* AB *parcourt une circonférence de cercle, lorsque les directrices sont rectangulaires.* (J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

5. *Sur le limaçon de Pascal* (*Mathesis*, p. 43). M. Ed. Lucas nous signale le théorème suivant qui lui a été communiqué verbalement par M. Mannheim : *Si les côtés d'un angle constant restent tangents à deux circonférences fixes, la droite qui joint les points de contact enveloppe une conique.*

Cette proposition ne diffère pas essentiellement d'une question que nous avons proposée et résolue dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. III, p. 176, et t. VI, p. 463.

Ajoutons que *la circonférence qui passe par le sommet de l'angle mobile et par les points de contact des côtés enveloppe un limaçon de Pascal* (podaire de circonférence). En effet, cette ligne passe par un point fixe et son centre parcourt une circonférence (J. N.)

SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

1. *Valeur de l'intégrale.* L'intégrale définie

$$L = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx,$$

où n est supposé positif, est égale, *par définition*, à la limite de

$$I = \int_0^{X} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx,$$

pour X infini. On peut regarder I, à son tour, comme la limite, pour $\varepsilon = 0$, de

$$J = \int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-x} dx}{x} - \int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-nx} dx}{x}.$$

Posons $nx = z$, dans la seconde des intégrales qui composent J. Il viendra :

$$J = \int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-x} dx}{x} - \int_{n\varepsilon}^{nX} \frac{e^{-z} dz}{z},$$

c'est-à-dire, en décomposant chacune des intégrales du second membre :

$$J = \int_{\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{e^{-x} dx}{x} + \int_{n\varepsilon}^{X} \frac{e^{-x} dx}{x} - \int_{n\varepsilon}^{X} \frac{e^{-z} dz}{z} - \int_{X}^{nX} \frac{e^{-z} dz}{z},$$

ou, en supprimant les deux intégrales intermédiaires qui sont égales et de signes contraires,

$$J = \int_{\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{e^{-x} dx}{x} - \int_{X}^{nX} \frac{e^{-z} dz}{z}.$$

Dans la première des deux dernières intégrales, e^{-x} est compris entre $e^{-\varepsilon}$ et $e^{-n\varepsilon}$, et, dans la seconde, e^{-z} est compris entre e^{-X} et e^{-nX}. Par suite, l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{e^{-x} dx}{x}$$

×Question 30.

On donne un point P *sur une droite* AP, *un point* Q *sur une circonférence* QBC. *Trouver, sur celle-ci, un point* R, *tel que toute droite menée par* R *coupe* AP *en un point* K, QBC *en un point* H, *situés, l'un et l'autre, sur une circonférence passant par* P *et* Q. (J. L. MACKENZIE.)

Supposons le problème résolu. Menons la droite PQ, qui coupe la circonférence en M, et tirons MR. Le quadrilatère inscriptible PQHK donne :

$$\text{angle KPQ} + \text{angle KHQ} = 180^\circ.$$

Mais, dans le quadrilatère inscrit MQHR, on a aussi :

$$\text{angle RMQ} + \text{angle RHQ} = 180^\circ;$$

donc l'angle RMQ égale l'angle KPQ, et MR est parallèle à AP. On déduit, de là, une construction facile du point R. (EDM. VAN AUBEL.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

×35. Étant donnée une circonférence AMBN de diamètre AB, on projette chaque corde MN, perpendiculaire à AB, en PQ, sur un diamètre CD, parallèle à MN. Le lieu des points *m*, *n*, intersections des droites AP, AQ, avec MN est une courbe fermée dont l'aire est égale à celle de la circonférence. (J. MISTER.)

Si l'on prend, au lieu de la circonférence, une courbe quelconque ayant un axe de symétrie CD, on en déduit, par le procédé indiqué ici, une autre courbe de même aire (J. M.).

36. Trois droites, issues des trois sommets d'un triangle, et partageant les côtés opposés en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents, se coupent évidemment en un même point. Démontrer que ce point est le centre d'une infinité d'ellipses semblables, dont chacune est le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux côtés du triangle est constante. Pour un triangle donné, chercher la direction des axes des ellipses. (E. CESÁRO.)

37-39. I. D'un point quelconque P d'une parabole, on abaisse les deux normales PA, PB, rencontrant la parabole en A, B. Trouver : 1° l'équation de la droite AB; 2° le lieu de la projection du point P sur AB.

II. On mène par le point P des perpendiculaires à PA et PB; ces droites rencontrent la parabole aux points C et D; trouver : 1° l'équation de la droite CD; 2° l'enveloppe de CD; 3° le lieu de l'intersection de AB et CD; 4° le lieu de la projection du point P sur CD; 5° le lieu de l'intersection de CD avec la tangente au point P; 6° le lieu de l'intersection de CD avec la normale au point P.

III. On mène, par le point P, les bissectrices de l'angle APB; ces droites rencontrent la parabole aux points E et F; trouver : 1° l'équation de EF; 2° le lieu de l'intersection de EF avec AB; 3° avec CD; 4° avec la tangente en P à la parabole; 5° avec la normale en P; 6° avec la perpendiculaire abaissée du point P sur EF; 7° l'enveloppe de EF.

(Ed. Lucas.)

40. D'un point P, pris sur la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC, on abaisse des perpendiculaires PA', PB', PC', sur les côtés. Démontrer que les droites PA', B'C' se coupent sur la médiane issue de A. (E. Cesáro.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

24. Si $a > b > c > d$, l'équation

$$f(x) = (x-a)(x-c) + (x-b)(x-d) = 0,$$

a une racine comprise entre a et b, et l'autre comprise entre c et d.

[On a : $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f(c) < 0$, $f(d) > 0$.]

25. Deux mobiles, partant simultanément des extrémités de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, se dirigent vers le sommet de l'angle droit avec des vitesses constantes, v, v'. A quel instant sont-ils le plus proche l'un de l'autre ? [Chercher le minimum de $(b - vx)^2 + (c - v'x)^2$].

26. Déterminer a de manière que la somme des carrés des racines de l'équation $x^2 - (a-2)x - (a-3) = 0$ soit la plus petite possible [$a = 1$].

27. Trouver le maximum et le minimum de l'expression :

$$y^2 = \frac{4a^2x^2 + b^2(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}, \qquad (1)$$

dans laquelle $a^2 > b^2$. [Exprimant que l'équation (1) donne pour x^2 : 1° des valeurs réelles; 2° des valeurs positives, on trouve $a^2 > x^2 > b^2$].

28. Soient x et y des variables assujetties à vérifier l'équation

$$x^2 + xy + y^2 = K^2, \qquad (2)$$

QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE,

par Éd. Lucas.

1. Si l'on divise p termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison r par un nombre p, premier avec chacun des nombres r, $r+1$, $r-1$, la différence de deux restes quelconques n'est jamais, en valeur absolue, égale à la différence des rangs qu'ils occupent dans la progression.

2. Calculer le nombre des termes r de la suite

$$1, 2, 3, \ldots\ldots p,$$

tels que le produit $r(r+1)(r-1)$ soit premier avec p. On supposera p décomposé en ses facteurs premiers.

3-6. Calculer le nombre des termes r de la même suite, de telle sorte que le produit $r(r+r_1)(r+r_2)$ soit premier avec p.

On supposera r_1 et r_2 premiers avec p, et successivement :

1° r_1 et r_2 premiers entre eux, $r_1 - r_2$ premier avec p ;

2° r_1 et r_2 premiers entre eux, $r_1 - r_2$ non premier avec p ;

3° r_1 et r_2 non premiers entre eux, $r_1 - r_2$ premier avec p ;

4° r_1 et r_2 non premiers entre eux, $r_1 - r_2$ non premier avec p.

7. Donner la formule générale pour trois nombres r_1, r_2, r_3, de telle sorte que $r(r+r_1)(r+r_2)(r+r_3)$ soit premier avec p. — Cas de n nombres $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$.

8. Si dans un carré de p^2 cases, on pose p reines sur les cases ayant pour coordonnées :

$$x_i = x_0 + i, \quad y_i = y_0 + ir,$$

en supposant que i prenne les valeurs $1, 2, 3, \ldots\ldots p$, et que le produit $r(r+1)(r-1)$ soit premier avec p, on forme une figure telle que deux reines quelconques ne sont jamais situées sur la même ligne, sur la même colonne, ou sur la même diagonale. Déterminer le nombre des figures différentes formées par les p reines (*).

(*) Les meilleures solutions de chacun de ces problèmes seront publiées ou analysées dans le Livre des *Récréations mathématiques*, de M. Ed. Lucas, dont le premier volume paraîtra incessamment, chez M. Gauthier-Villars.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***59-61.** Soient ABCDE.....L une courbe dont la concavité est tournée vers une droite *al* sur laquelle on a abaissé des perpendiculaires, équidistantes d'une quantité h, savoir :

$$aA = y_1, \quad bB = y_2, \quad cC = y_3, \quad \ldots, \quad lL = y_n.$$

I. L'aire $S = aABC\ldots L l$ est donnée, approximativement, par la formule de M. Catalan (*) :

$$S = C \text{ (approximativement)},$$

$$C = h\left(\tfrac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + y_n\right)$$

$$+ \tfrac{1}{4}h\left(\frac{y_2 + y_{n-1}}{2} - \frac{y_1 + y_n}{2}\right) - \tfrac{1}{12}\left(\frac{y_3 + y_{n-2}}{2} - \frac{y_2 + y_{n-1}}{2}\right),$$

avec une erreur moindre que

$$\tfrac{3}{4}h\left(\frac{y_2 + y_{n-1}}{2} - \frac{y_1 + y_n}{2}\right).$$

II. Si $n - 1$ est divisible par 3, la seconde formule de Simpson :

$$S = s' \text{ (approximativement)},$$

$$s' = \tfrac{3}{8}h\left[(y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4) + (y_4 + 3y_5 + 3y_6 + y_7) + \cdots + (y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n)\right],$$

donne S, aussi avec une erreur moindre que

$$\tfrac{3}{4}h\left(\frac{y_2 + y_{n-1}}{2} - \frac{y_1 + y_n}{2}\right).$$

III. Si $n = 7$, la formule de Weddle :

$$S = w \text{ (approximativement)},$$

$$w = \tfrac{3}{10}h\left(y_1 + 5y_2 + y_3 + 6y_4 + y_5 + 5y_6 + y_7\right),$$

comporte une erreur moindre que

$$6h\left(y_2 + y_4 + y_6\right) - 3w. \qquad \text{(P. M.)}$$

62. Lorsque les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites qui se coupent, un point de la droite décrit une

---

(*) La formule de M. E. Catalan, comme les deux formules de Simpson, donne exactement l'aire d'une parabole du *troisième* degré. (P. M.)

ellipse. Démontrer que l'aire de l'ellipse est indépendante de l'angle des deux droites. (STEINER.)

63. Lorsque les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites de l'espace, cette droite engendre une surface du 4me ordre ; démontrer que le volume compris entre cette surface et deux plans fixes parallèles aux deux droites ne varie pas, lorsque les deux directrices se déplacent d'une manière quelconque dans deux plans parallèles aux plans donnés. (E. LUCAS.)

64. Lorsque trois points d'une droite glissent sur les faces d'un trièdre, un quatrième point de cette droite décrit un ellipsoïde; démontrer que le volume de l'ellipsoïde est indépendant de l'inclinaison des faces du trièdre. (E. LUCAS.)

×**65.** Soient r, R, l'apothème et le rayon d'un polygone régulier, ρ étant le rayon de la circonférence isopérimètre avec ce polygone, on a

$$\frac{1}{3}(r + 2R) > \rho > \sqrt[3]{rR^2}\ (*) \qquad \text{(E. CATALAN.)}$$

×**66.** *Application de la Géométrie à l'Algèbre.* Étant donnés trois nombres p, q, c, on décompose le troisième en deux parties a, b, de manière que

$$\frac{b}{p^2} + \frac{a}{q^2} = \frac{1}{c}.$$

On fait ensuite :

$$p' = \frac{ac}{q}, \quad q' = \frac{ab}{q}.$$

Cela posé, toutes les solutions des équations

$$\frac{u}{p} + \frac{v}{q} = 1, \quad \frac{v}{p'} + \frac{w}{q'} = 1,$$

rendent identiques l'équation

$$au^2 + bv^2 - cw^2 = abc. \qquad \text{(E. CATALAN.)}$$

(*) Cette question n'est pas entièrement nouvelle. Elle résulte d'une Note de M. A. Cambier (*Revue de l'Instruction publique en Belgique*) et d'une Note de M. *** (*Journal de mathématiques élémentaires*, juin 1881). (E. C.)

point de cette droite. On sait que la circonférence AOB a un rayon constant, et que les droites ON, OP qui joignent le point O aux extrémités N et P du diamètre passant par le point M sont deux droites fixes (*). Par suite, le point M décrit une ellipse dont les demi-axes sont MN et MP et dont l'aire a pour mesure $\pi \cdot MN \cdot MP$. Mais

$$MN \cdot MP = MA \cdot MB$$

quel que soit l'angle xOy. Donc le théorème est démontré. V. JAMET.

Question 63.

Lorsque les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites de l'espace, cette droite engendre une surface du quatrième ordre; démontrer que le volume compris entre cette surface et deux plans fixes parallèles aux deux droites ne varie pas, lorsque les deux directrices se déplacent d'une manière quelconque dans deux plans parallèles aux deux plans donnés. (E. LUCAS.)

Je dis d'abord que tout plan parallèle aux deux droites coupe la surface suivant une ellipse, dont l'aire est indépendante de l'angle des deux droites. En effet, soient AH et BK les deux droites données, AB une position de la droite mobile, M un point pris sur cette droite, m sa projection sur un plan mené par la droite AH parallèlement à BK, P la projection du point B sur le même plan. Le point P décrit, dans ce plan, une droite fixe parallèle à BK, et comme, dans le triangle rectangle ABP, l'hypoténuse est constante, ainsi que le côté BP, le côté AP est lui-même constant, et ne dépend pas de l'angle AOP. De plus, le point m divisant la droite AP dans le rapport constant MA : MB, les deux segments mA, mP sont constants. Donc le point m décrit une ellipse dont l'aire est $\pi \cdot m\text{A} \cdot m\text{P}$. Cette ellipse est elle-même la projection de la ligne décrite par le point M, et comme celui-ci se meut dans un plan

---

(*) Voir BRIOT et BOUQUET, *Géométrie analytique*, 6e édition, n° 35. Le rayon est constant parce que l'angle AOB et la base AB sont constants dans le triangle AOB. La somme PN et le produit $MN \cdot MP = MA \cdot MB$ des segments MN, MP étant constants, il en est de même de ces segments. Par suite, les cordes NA, PB et les angles AON, BOP sont aussi invariables. Ce théorème a été trouvé ou retrouvé par M. Mannheim, lorsqu'il était élève de M. Catalan. Voir le Cours autographié de ce dernier (*Lycée Charlemagne. Application de l'Algèbre à la géométrie*, 1848, p. 196).

parallèle aux deux droites données, il décrit une ellipse égale à celle que décrit le point m (*).

L'aire de cette ellipse est la dérivée du volume proposé, par rapport à la distance Mm, considérée comme variable indépendante. La différentielle de ce volume s'obtiendra en multipliant cette dérivée par la différentielle de Mm. Or on a

$$\frac{Mm}{Am} = \frac{BP}{AP}, \quad \text{ou} \quad Mm = \frac{BP}{AP} Am;$$

donc si l'on désigne par x la variable Am, par l la distance constante AP, par L la longueur BP, constante aussi, la différentielle du volume sera

$$\frac{\pi L}{l} x (l - x) dx.$$

Le volume est donc égal à

$$\frac{\pi L}{l} \int_a^b x (l - x) dx,$$

a et b désignant les valeurs de Am qui correspondent aux deux plans parallèles au plan AOP, entre lesquels est compris ce volume.

La recherche de cette intégrale n'offre aucune difficulté, et l'on voit que les grandeurs L, l, a et b qui y entrent, sont indépendantes de l'angle AOP. V. JAMET.

On peut prendre aussi, comme l'a fait M. Mister, dans une solution qu'il nous a communiquée, pour variable indépendante, la distance du point M, au plan mené par le milieu de AB, parallèlement aux droites données. Le volume total compris à l'intérieur de la surface décrite par M est égal, d'après les notations de M. Jamet, à l'expression

$$2\pi \frac{L}{l} \int_0^{\frac{1}{2}l} x (l - x) dx = \frac{1}{6} \pi L l^2.$$

On ne peut pas, sans précaution, calculer l'intégrale à laquelle arrive M. Jamet, parce que x croît de 0 à $\frac{1}{2}l$, puis décroît de $\frac{1}{2}l$ à 0, de sorte qu'elle est égale à

$$\int_a^{\frac{1}{2}l} x (l - x) dx + \int_{\frac{1}{2}l}^b x (l - x) (-dx),$$

comme on le voit aisément. Si $a = b = 0$, les deux parties de cette somme sont égales et on trouve l'expression donnée plus haut. Cette petite difficulté ne se présente pas quand on prend la variable indépendante indiquée plus haut. (P. M.)

(*) A la rigueur, on peut déduire le théorème de M. Lucas de ce que l'ellipse décrite par M est indépendante de l'angle des droites fixes, sans employer le calcul intégral.

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences Professeur à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des sciences de Liége, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS

Ut pictura mathesis
PH. BRETON.

TOME CINQUIÈME

ANNÉE 1885.

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
QUAI DES AUGUSTINS, 55

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1885

Digitized by Google

×Question 230.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 72.)

1° *Sur l'échiquier de n^2 cases, le nombre des sauts du cavalier des échecs est égal au double de* $(2n-3)^2-1$. 2° *Trouver le nombre des sauts du cavalier sur un rectangle de pq cases?* (Éd. Lucas.)

Soit un échiquier de *p colonnes* et de *q lignes*. On peut passer de l'une des $(p-1)$ premières colonnes à la colonne suivante par $(q-2)$ sauts *descendants* et par le même nombre de sauts *remontants*, ce qui fait en tout $4(p-1)(q-2)$ sauts, si l'on fait les mêmes sauts également en arrière (de droite à gauche). De même, il y a $4(q-1)(p-2)$ sauts pour passer d'une ligne à celle qui précède ou qui suit. Donc le nombre total des sauts est le double de

$$2(p-1)(q-2)+2(q-1)(p-2)=(2p-3)(2q-3)-1.$$

M. de Rocquigny a donné, de la même question, une autre solution un peu moins simple que la précédente. (J. N.)

×Question 286.

(Voir *Mathesis*, t. III, p. 232.)

Démontrer les inégalités

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2}{2n+1}\right]<\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right]-\frac{1}{2}l\frac{n+1}{n},$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right]-\frac{1}{2}l\frac{n+1}{n}<\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2}{2n+1}\right].$$

(E. Cesàro.)

Solution par M. Minoliti. On a, d'après une formule connue,

$$\frac{1}{2}l\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots$$

D'où

$$\frac{1}{2}l\frac{n+1}{n}>\frac{1}{2n+1},$$

ce qui démontre la seconde inégalité proposée.

Digitized by Google

jections du point de rencontre O des diagonales sur les côtés AB, BC, CD, AD, et soit S le point de concours de AB et CD (AD est supposé entre S et BC). Les quadrilatères OMAQ, OMBN, ONCP, OPDQ étant inscriptibles, on trouve aisément les relations suivantes entre les angles :

$$BSC = BAC - ACD = MQO - ONP,$$
$$BSC = BDC - DBA = OQP - ONM,$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$BSC = \frac{MQP - MNP}{2},$$

ce qui permet de construire la circonférence SMOP. On détermine de même la circonférence NOQ.

QUESTIONS PROPOSÉES.

457. Une parabole de grandeur invariable touche une droite donnée OX en un point fixe O. Trouver : 1° les lieux décrits par le foyer, le sommet et la projection de O sur l'axe ; 2° les enveloppes de l'axe, de la tangente au sommet et de la directrice.

458. La somme de deux cubes consécutifs n'est jamais un carré, excepté si ces cubes sont 1 et 8. (Ed. Lucas.)

459. La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais un bicarré. (Ed. Lucas.)

×**460.** Par un point M, pris sur la circonférence circonscrite à un triangle équilatéral, on abaisse les perpendiculaires aux côtés, et l'on détermine ainsi, sur les côtés, six segments. Si a, b, c sont trois segments non consécutifs, on a

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{bc + ac + ab} = \frac{5}{2}.$$ (E. Cesáro.)

461. L'enveloppe des circonférences qui ont pour diamètres les rayons de courbure d'une épicycloïde, est une courbe inverse de cette épicycloïde. (Mennesson.)

462. Une conique passe par quatre points fixes O, A, B, C. Trouver le lieu du centre du cercle osculateur au point O. (V. Jamet.)

463. Une conique passe par trois points fixes A, B, C et touche une droite fixe Ox en un point variable M. Lieu du centre de cercle osculateur au point M. (V. Jamet.)

Digitized by Google

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des Sciences de Liège, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON

TOME HUITIÈME

ANNÉE 1888.

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
49, RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1888

Question 459.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 192.)

La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais un bicarré.

(E. Lucas.)

Solution par M. Fauquembergue, ***professeur au Lycée de Mont-de-Marsan.*** Cette question revient à prouver que l'équation

$$3x^2 + 3x + 1 = y^4$$

est impossible en nombres entiers (excepté pour $x = 0$, $y = 1$).

Or, en multipliant les deux membres par 4 et posant $2x + 1 = z$, on peut la mettre sous la forme

$$3z^2 + 1 = 4y^4,$$

ou

$$(2y^2 + 1)(2y^2 - 1) = 3z^2.$$

Les deux facteurs du premier membre étant premiers entre eux, l'un d'eux doit être un carré et l'autre le triple d'un carré. Mais, y étant impair, $2y^2 - 1$ est de la forme $16t + 1$, tandis que le triple d'un carré impair est de forme $24t + 3$. Donc, la seule décomposition possible est la suivante :

$$2y^2 + 1 = 3\alpha^2 \quad \text{avec} \quad 2y^2 - 1 = \beta^2; \quad z = \alpha\beta,$$

α et β étant liés par la relation

$$3\alpha^2 - \beta^2 = 2.$$

Les équations précédentes donnent

$$4y^2 = 3\alpha^2 + \beta^2,$$

ou

$$(2y + \beta)(2y - \beta) = 3\alpha^2.$$

Puisque $2y + \beta$ et $2y - \beta$ sont premiers entre eux, il faut que l'on ait

$$2y + \beta = 3\gamma^2 \quad \text{avec} \quad 2y - \beta = \delta^2, \quad \alpha = \gamma\delta,$$

ou

$$2y - \beta = 3\gamma^2 \quad \text{avec} \quad 2y + \beta = \delta^2, \quad \alpha = \gamma\delta.$$

D'ailleurs β pouvant être négatif, la seconde décomposition rentre dans la première. Celle-ci donne $\alpha = \gamma\delta$, $\beta = \frac{1}{2}(3\gamma^2 - \delta^2)$, valeurs qui transforment la relation $3\alpha^2 - \beta^2 = 2$ en la suivante :

$$2(\delta^4 - 1^4) = \left[\frac{3(\gamma^2 - \delta^2)}{2}\right]^2.$$

sont dans un rapport égal à la limite du rapport des cordes D'd', Cc déterminées dans (D) et (C) par deux rayons vecteurs infiniment voisins OC, Oc. Or, si M est le point de rencontre des droites D'd', Cc, le triangle MCD' coupé par la transversale cd donne

$$\frac{D'd'}{d'M}\cdot\frac{Mc}{cC}\cdot\frac{CO}{D'O}=1,$$

d'où

$$\lim\frac{D'd'}{cC}=\frac{D'M.D'O}{CM\ CO}=\frac{\sin C}{\sin D'}\cdot\frac{DC}{DD'}=\frac{DH}{DK},$$

H et K étant les projections de O sur les droites MC, MD'.

Par conséquent, si l'on mène DF_1 parallèle à (D') et égale à DH, F_1d_1 parallèle à la tangente en C à la courbe donnée, et égale à DK, Dd_1 est la tangente cherchée. (Dérousseau.)

c) Si les points se suivent dans l'ordre OD'CD, O$d'cd$, les droites D'd' et Cc sont des transversales réciproques du triangle ODd et rencontrent Dd en deux points équidistants du milieu de Dd. Si l'on passe à la limite, on trouve que la droite (D') et la tangente en C rencontrent la tangente en D en deux points équidistants de D, propriété qui ramène la construction de la dernière tangente à un problème connu.

Si l'ordre des points était autre, la droite (D') et la tangente en D deviendraient des transversales réciproques du triangle OCc.

(D'après M. de Longchamps.)

d) Si entre les rayons vecteurs ρ, ρ_1, ρ_2 de trois courbes, on a une relation de la forme $\rho = a\rho_1 + b\rho_2$, les sous-normales ont entre elles la même relation : $\rho' = a\rho'_1 + b\rho'_2$. D'où un procédé pour obtenir la normale à l'une de ces courbes, lorsqu'on connaît les normales aux deux autres courbes.

×Question 562.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 76.)

Démontrer les formules

$$u_n = 2^{n-1} - 2^{n-3}C_{n-2,1} + 2^{n-5}C_{n-3,2} - \cdots$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3} = 1 - C_{n-1,1} + C_{n-2,2} - C_{n-3,3} + \cdots \text{ (Ed. Lucas.)}$$

Solution par M. Stuyvaert (Bruxelles). Ces formules se vérifient

QUESTIONS PROPOSÉES.

252. (Voir *Mathesis*, t. III, p. 143). I. Si q, r, s sont des entiers plus grands que 2 et p un entier quelconque, démontrer que les nombres de Bernoulli déterminés par la relation symbolique

$$(B+1)^q - B^q = 0$$

vérifient la relation

$$B^p(B+1)^q(B+2)(B+3)^s = B^s(B-1)^r(B-2)^q(B-3)^p.$$

II. Démontrer, sans se servir des séries, la relation symbolique

$$(2B+1)^p + 2^p B_p - 2B_p = 0. \qquad \text{(Éd. Lucas.)}$$

267. (*Mathesis*, t. III, pp. 175 et 192). On a

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^5}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots =$$
$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2}+\frac{q^9}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^2}+\cdots.$$

(E. Catalan.)

×**619.** ABC étant un triangle donné, soit D le point de contact, avec BC, du cercle inscrit, I. On projette les sommets B, C en E, F sur la bissectrice AO; puis l'on construit les parallélogrammes DEBG, DFCH. Cela posé : 1° Les points B, G, C, H appartiennent à une circonférence; 2° le centre de cette circonférence et le centre I du cercle inscrit, sont également distants du côté BC. (E. Catalan.)

620. On considère tous les triangles qui ont un sommet fixe A, et les deux autres sommets B, C sur une droite donnée; la longueur BC est également donnée. Trouver les lieux géométriques du centre du cercle circonscrit et du centre du cercle des neuf points, ainsi que les enveloppes des hauteurs issues de B et C. (Déprez.)

621. Intégrer l'équation aux dérivées partielles.

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy} = z\frac{d^2z}{dxdy}. \qquad \text{(V. Jamet.)}$$

Rectification. 618. Dans les égalités de la question 618 (page 152), il faut échanger les lettres B′ et C′.

et puisque OM = OP, ON = OQ, le moment d'inertie du triangle CDA par rapport au même point, est égal à

$$\frac{S_2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{3}.$$

Donc le moment d'inertie du quadrilatère, par rapport au point O, est égal à

$$\frac{S(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{3}.$$

D'ailleurs,

$$16\gamma^2 = a^2+b^2+c^2+d^2-\delta^2-\delta'^2 \text{ (*)}$$

$$4(\alpha^2+\beta^2) = 2(\overline{MN}^2+\overline{NP}^2) = \frac{\delta^2+\delta'^2}{2}.$$

D'où l'on conclut

$$16(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = a^2+b^2+c^2+d^2+\delta^2+\delta'^2.$$

Donc, le moment d'inertie du quadrilatère est égal à

$$\frac{S(a^2+b^2+c^2+d^2+\delta^2+\delta'^2)}{48},$$

ce qui démontre le théorème.

Question 563.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 76.)

En un point P ***d'un hyperboloïde à une nappe on mène les deux génératrices rectilignes, puis par chacune de celles-ci un plan perpendiculaire au plan tangent en*** P. ***Ces plans touchent l'hyperboloïde en deux points*** Q ***et*** R; ***trouver l'équation du plan passant par*** Q, R ***et le centre de l'hyperboloïde.***

(Ed. Lucas.)

Une bonne solution de cette question nous a été adressée par M. Couturiaux. Comme elle est un peu longue, nous reproduisons celle de l'auteur de la question.

La droite QR et la normale PP′ à l'hyperboloïde sont des droites conjuguées, car la première est la corde des contacts des plans tangents menés par l'autre. Le plan OQR est donc le plan polaire du point à

(*) La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la distance des milieux des diagonales.

l'infini sur PP', ou le plan diamétral des cordes parallèles à PP'. L'équation de la normale au point P (x', y', z') étant

$$\frac{x-x'}{\frac{x'}{a^2}}=\frac{y-y'}{\frac{y'}{b^2}}=\frac{z-z'}{-\frac{z'}{c^2}},$$

ce plan OQR est représenté par l'équation

$$\frac{xx'}{a^4}+\frac{yy'}{b^4}+\frac{zz'}{c^4}=0.$$

Question 603.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 28 et p. 164.)

On considère les paraboles qui ont même corde normale NN' (N et N' étant des points fixes). *Démontrer :* 1° *que l'axe enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements;* 2° *que la directrice enveloppe une parabole.* (Jeřábek.)

Solution géométrique par MM. Brocard, Cl. Servais, Verniory et Déprez. Soient m le point de concours des tangentes menées en N et N' à l'une des paraboles, A le milieu de NN'; mA est un diamètre de la courbe, et la tangente conjuguée est la parallèle B'B, menée à NN' par le milieu B de mA.

Le point de concours B' des tangentes rectangulaires menées en N et B appartient à la directrice; celle-ci est donc la perpendiculaire B'D abaissée de B' sur mA. Or, si C est le milieu de NA, CB' est parallèle à AB. Donc l'enveloppe de la directrice B'D est la parabole qui a C pour foyer et Nm pour tangente au sommet.

Le foyer F est la projection du point B' de la directrice sur sa polaire NB. Soit G la projection de C sur NB : on a, visiblement, NF = BG, et G décrit la circonférence qui a pour diamètre NC. Donc F décrit une cissoïde ayant son point de rebroussement en N et son asymptote dirigée suivant CB.

La parallèle menée par B' à BN rencontre NN' en un point fixe D; donc l'enveloppe de B'F est une parabole (*).

(*) Le symétrique de B' par rapport à F est la projection du pied C de la directrice de cette parabole sur une tangente B'F; donc ce point engendre une strophoïde. (Cl. Servais.)

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des Sciences de Liège, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON.

TOME NEUVIÈME
ANNÉE 1889.

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
49, RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1889

QUESTIONS PROPOSÉES.

17. (*Mathesis*, t. I, p. 30). Si A, B, C sont des quantités positives, a, b, c des quantités réelles les trois racines de l'équation

$$(x-a)(x-b)(x-c) - A(x-a) - B(x-b) - C(x-c) = 0$$

sont réelles. Calculer le discriminant de cette équation et le mettre sous une forme telle qu'on reconnaisse qu'il est toujours négatif.

95. (*Mathesis*, t. I, p. 206). Trouver l'équation des lignes de courbure d'une surface du second degré ayant pour équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0.$$

252. (*Mathesis*, t. III, p. 143). I. Si q, r, s sont des entiers plus grands que 2 et p un entier quelconque, démontrer que les nombres de Bernoulli déterminés par la relation symbolique

$$(B+1)^n - B^n = 0$$

vérifient la relation

$$B^p(B+1)^q(B+2)^r(B+3)^s = B^s(B-1)^r(B-2)^q(B-3)^p.$$

II. Démontrer, sans se servir des séries, la relation symbolique

$$(2B+1)^p + 2^pB_p - 2B_p = 0. \qquad \text{(Éd. Lucas.)}$$

267. (*Mathesis*, t. III, pp. 175 et 192). On a

$$1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots =$$

$$1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2} + \frac{q^5}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^3} + \cdots$$

(E. Catalan.)

283. (*Mathesis*, t. III, p. 231). Trouver la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt[m]{(P_nx^n + P_{n-1}x^{n-1} + \cdots + P_2x^2 + P_1x + 1)^{m-1}}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(m-1)},$$

m désignant un nombre entier plus grand que l'unité, et n un entier positif quelconque. (S. Realis.)

SUR LES COORDONNÉES TRIPOLAIRES;

par M. Ed. Lucas, professeur de mathématiques spéciales, au lycée St-Louis, à Paris.

Cette étude a pour but de montrer l'utilité du système des coordonnées tripolaires dans la recherche des propriétés de systèmes formés par des points, des droites et des cercles.

1. Soit un triangle ABC; désignons par A, B, C les *angles extérieurs* du triangle, par a, b, c ses côtés pris dans l'ordre de grandeur décroissante, par R et S le rayon du cercle circonscrit et l'aire du triangle. Prenons pour origine des coordonnées cartésiennes orthogonales le centre O du cercle circonscrit au triangle et désignons par (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), les coordonnées cartésiennes des sommets, par ξ, η celles d'un point quelconque P. Nous appellerons *coordonnées tripolaires* du point P, les *carrés* des distances de ce point aux trois sommets du triangle. On a donc

$$(1)\qquad \begin{cases} X = (\xi - a_1)^2 + (\eta - b_1)^2, \\ Y = (\xi - a_2)^2 + (\eta - b_2)^2, \\ Z = (\xi - a_3)^2 + (\eta - b_3)^2. \end{cases}$$

Les formules précédentes permettent de passer du système tripolaire au système cartésien et, inversement, en résolvant ces équations par rapport à $\xi^2 + \eta^2$, ξ, η.

Considérons encore le système trilinéaire formé par les trois côtés du triangle et désignons par x, y, z les coordonnées trilinéaires (normales) du point P, supposées positives pour un point pris à l'intérieur du triangle. On obtient facilement par la considération des trois systèmes de coordonnées obliques formés par deux des trois côtés du triangle :

$$(2)\qquad \begin{cases} X \sin^2 A = y^2 + z^2 - 2yz \cos A, \\ Y \sin^2 B = z^2 + x^2 - 2zx \cos B, \\ Z \sin^2 C = x^2 + y^2 - 2xy \cos C. \end{cases}$$

Ces formules permettent de passer du système tripolaire au système trilinéaire; nous donnerons plus loin les formules inverses, qui sont linéaires.

2. *Équation du cercle.* L'équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z + q = 0,$$

représente un cercle quelconque. En effet, en développant en coordonnées cartésiennes, on trouve

$$L(\xi^2+\eta^2)-2M\xi-2N\eta+Q=0,$$

après avoir posé

$$L=\lambda+\mu+\nu,\quad M=\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3,\quad N=\lambda b_1+\mu b_2+\nu b_3,$$
$$Q=\lambda(a_1^2+b_1^2)+\mu(a_2^2+b_2^2)+\nu(a_3^2+b_3^2)+q.$$

Par conséquent, si l'on suppose $L \gtrless 0$, l'équation représente un cercle dont le centre a pour coordonnées cartésiennes

$$\xi=\frac{\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3}{\lambda+\mu+\nu},\quad \eta=\frac{\lambda b_1+\mu b_2+\nu b_3}{\lambda+\mu+\nu}.$$

Ce point est le centre des distances proportionnelles des trois points A, B, C pour les coefficients λ, μ, ν; par suite, les *coordonnées trilinéaires* x, y, z *du centre* sont

$$ax=2S\frac{\lambda}{L},\quad by=2S\frac{\mu}{L},\quad cz=2S\frac{\nu}{L}.$$

Par l'emploi des formules (2) on trouvera les coordonnées tripolaires du centre.

Si l'on désigne par ρ le rayon du cercle, on a

$$\rho^2=\frac{M^2+N^2-LQ}{L^2},$$

ou, par le développement,

$$\rho^2=-\frac{a^2\mu\nu+b^2\nu\lambda+c^2\lambda\mu+q(\lambda+\mu+\nu)}{(\lambda+\mu+\nu)^2}.$$

Par conséquent, si x_0, y_0, z_0 et X_0, Y_0, Z_0 désignent les coordonnées trilinéaires et tripolaires du centre d'un cercle de rayon ρ, la puissance d'un point par rapport au cercle a pour expression

$$\frac{ax_0(X-X_0)+by_0(Y-Y_0)+cz_0(Z-Z_0)}{2S}-\rho^2.$$

On trouve de même, pour l'angle V de deux cercles,

$$2\rho\rho'\cos V=\frac{2MM'+2NN'-QL'-Q'L}{LL'},$$

ou, par le développement,

$$2\rho\rho' \cos V$$
$$\frac{a^2(\mu\nu' + \nu\mu') + b^2(\nu\lambda' + \lambda\nu') + c^2(\lambda\mu' + \mu\lambda') + q(\lambda' + \mu' + \nu') + q'(\lambda + \mu + \nu)}{(\lambda + \mu + \nu)(\lambda' + \mu' + \nu')}.$$

L'équation d'un cercle passant par trois points donnés par leurs coordonnées tripolaires est

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. *Équation de la droite.* Lorsque la somme L des coefficients de X, Y, Z, dans l'équation du cercle est nulle, cette équation représente une droite. La distance δ d'un point à cette droite a pour dénominateur $2\sqrt{M^2 + N^2}$ ou $2\sqrt{M^2 + N^2 - QL}$, puisque $L = 0$. On a donc

$$\pm\delta = \frac{\lambda X + \mu Y + \nu Z + q}{2\sqrt{-a^2\mu\nu - b^2\nu\lambda - c^2\lambda\mu}}.$$

En particulier, deux droites dont les équations ont des termes constants égaux et de signes contraires, sont symétriques par rapport au centre du cercle circonscrit.

En général, pour obtenir l'équation d'une droite parallèle à une autre et k fois plus éloignée du centre du cercle circonscrit, il suffit de multiplier par k le terme constant.

On trouve aussi pour l'angle V de deux droites la formule

$$\cos V = \frac{a^2(\mu\nu' + \nu\mu') + b^2(\nu\lambda' + \lambda\nu') + c^2(\lambda\mu' + \mu\lambda')}{2\sqrt{a^2\mu\nu + b^2\lambda\nu + c^2\lambda\mu}\sqrt{a^2\mu'\nu' + b^2\nu'\lambda' + c^2\lambda'\mu'}}.$$

L'équation d'une droite passant par deux points donnés par leurs coordonnées tripolaires est

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On sait que, si X, Y, Z représentent les premiers membres des équations de trois cercles quelconques, l'équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$

représente un cercle qui coupe orthogonalement le cercle radical des trois cercles donnés. Par conséquent, dans le cas présent, l'équation linéaire et homogène en coordonnées tripolaires représente un cercle orthogonal au cercle circonscrit ou un diamètre de ce cercle.

En particulier, le diamètre OA du cercle circonscrit a pour équation

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et la distance d'un point à ce diamètre est donnée par

$$\frac{b^2(Y - X) - c^2(Z - X)}{2abc}.$$

Le point A′ diamétralement opposé au point A sur le cercle circonscrit a pour coordonnées tripolaires

$$4R^2, \quad 4R^2 - c^2, \quad 4R^2 - b^2.$$

4. *Équation du cercle circonscrit.* Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour équation

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Par le développement, on trouve pour la puissance U d'un point par rapport au cercle circonscrit

$$U = -\frac{R}{2S}[aX \cos A + bY \cos B + cZ \cos C + abc].$$

Les puissances d'un point aux cercles décrits sur les côtés BC, CA, AB pris comme diamètres sont

$$\tfrac{1}{2}(Y + Z - a^2), \quad \tfrac{1}{2}(Z + X - b^2), \quad \tfrac{1}{2}(X + Y - c^2).$$

La tangente en A au cercle circonscrit est l'axe radical de ce cercle et

du point A; la distance d'un point à cette droite a pour expression

$$\frac{X - U}{2R},$$

puisque la distance du centre O à cette droite est égale à R.

Les bissectrices intérieures des angles du triangle formé par les tangentes en A, B, C sont les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés de ABC; elles ont pour équations

$$Y - Z = 0, \quad Z - X = 0, \quad X - Y = 0;$$

on obtient les distances d'un point à ces trois droites en divisant les premiers membres, changés de signe, par $2a$, $2b$, $2c$.

Les distances d'un point aux bissectrices extérieures du triangle des tangentes sont données par les expressions

$$\frac{Y + Z - 2U}{-4R\cos A}, \quad \frac{Z + X - 2U}{-4R\cos B}, \quad \frac{X + Y - 2U}{-4R\cos C}.$$

5. *Équation des côtés du triangle de référence.* On trouve l'équation de BC en prenant l'équation de la droite qui passe par les deux points B et C; on a

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on développe le déterminant et si l'on calcule la constante, on obtient pour les distances x, y, z d'un point quelconque aux trois côtés, et pour la *distance circulaire* u de ce point au cercle circonscrit (c'est-à-dire le rapport de la puissance de ce point au diamètre), les formules

$$\begin{aligned}
-4Sx &= aX + bY\cos C + cZ\cos B + abc\cos A,\\
-4Sy &= aX\cos C + bY + cZ\cos A + abc\cos B,\\
-4Sz &= aX\cos B + bY\cos A + cZ + abc\cos C,\\
-4Su &= aX\cos A + bY\cos B + cZ\cos C + abc.
\end{aligned}$$

Ces formules permettent de transformer l'équation d'un lieu donné en coordonnées trilinéaires $f(x, y, z) = 0$, dans le système tripolaire. Ces formules donnent lieu, par la considération de la théorie des invariants à un grand nombre de propriétés métriques nouvelles.

6. *Distance de deux points.* On a, en coordonnées trilinéaires, pour le carré de la distance de deux points,

$$d_{12}^2 = -\frac{(x_1 - x_2)^2 \sin 2A + (y_1 - y_2)^2 \sin 2B + (z_1 - z_2)^2 \sin 2C}{2 \sin A \sin B \sin C};$$

par suite, en coordonnées tripolaires,

$$16S^2 d_{12}^2 = a^2 (X_1 - X_2)^2 + b^2 (Y_1 - Y_2)^2 + c^2 (Z_1 - Z_2)^2 + 2bc (Y_1 - Y_2)(Z_1 - Z_2) \cos A + \cdots.$$

7. *Aire d'un triangle.* On trouve de même, pour l'aire T d'un triangle dont les sommets sont donnés, en coordonnées tripolaires,

$$-16ST = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

8. *Relation fondamentale.* Si l'on exprime, par notre théorème fondamental, que le déterminant des puissances mutuelles des trois sommets A, B, C, du triangle, d'un point quelconque et de la droite de l'infini est nul, on trouve

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 + 2bc \cos A\,[YZ + a^2X] + \cdots + a^2b^2c^2 = 0.$$

C'est la relation entre les coordonnées tripolaires d'un point; si l'on désigne le premier membre par F(X, Y, Z) et par F_1, F_2, F_3 les demi-dérivées partielles, on a, par le théorème d'Euler,

$$XF_1 + YF_2 + ZF_3 + abc\,(aX \cos A + \cdots + abc) = 0;$$

on a donc, entre les coordonnées trilinéaires x, y, z et les coordonnées tripolaires X, Y, Z, U d'un point quelconque, la relation

$$axX + byY + czZ + 2SU = 0.$$

(*A continuer.*)

NOTES MATHÉMATIQUES.

*7. *Note sur le parallélogramme* (par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy). On définit le *parallélogramme* un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles, et on démontre que les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux, ainsi que les angles opposés.

SUR LES COORDONNÉES TRIPOLAIRES;

par M. Ed. Lucas, professeur de mathématiques spéciales, au lycée St-Louis, à Paris.

(*Suite et fin*, voir p. 129.)

9. ***Segments capables.*** Si l'on désigne par V l'angle de la direction CM avec la direction MB, le cercle BCM a pour équation

$$Y + Z - a^2 + 2ax \cot V = 0,$$

x désignant la distance du point M au côté BC.

La puissance d'un point quelconque, par rapport au cercle, est représentée par la moitié du premier membre de l'équation précédente, et le rayon ρ de ce cercle est donné par la formule

$$\rho = R \frac{\sin A}{\sin V}.$$

En particulier, pour $V = A$, on retrouve le cercle circonscrit au triangle ABC, et l'on a

$$2U \equiv Y + Z - a^2 + 2ax \cot A;$$

par conséquent, la puissance d'un point, par rapport au cercle lieu du segment capable de l'angle V décrit sur BC, peut s'écrire

$$U = 2Rx \frac{\sin (V - A)}{\sin V}.$$

En particulier, la puissance d'un point par rapport au cercle passant par B, C et l'orthocentre a pour expression, si l'on fait $V = \pi - A$,

$$U = Rx \cos A.$$

La puissance d'un point par rapport à l'un des *cercles de Torricelli* (*), s'obtient en faisant $V = \frac{1}{3}\pi$ ou $V = \frac{2}{3}\pi$.

Les trois premiers cercles de Torricelli ont pour axes radicaux

$$x \sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right) = y \sin\left(\frac{\pi}{3} - B\right) = z \sin\left(\frac{\pi}{3} - C\right).$$

(*) Ce sont les cerles circonscrits aux triangles équilatéraux construits extérieurement ou intérieurement sur BC, CA, AB; leurs points de concours détermine les *centres isogones*, Z, Z'. Le point Z jouit de la propriété de rendre minimum la somme ZA + ZB + ZC. Fermat avait proposé à Torricelli le problème de déterminer le point jouissant de cette propriété. Le géomètre italien a donné plusieurs solutions de cette question. (J. N.)

Les formules (1) donnent les équations des figures inverses par rapport au cercle circonscrit pris pour cercle d'inversion. Ainsi l'inverse du cercle ayant pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z + q = 0,$$

a pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z + \frac{q}{R^2}(U + R^2) = 0.$$

En particulier, l'inverse du côté BC est le cercle BCO qui a pour équation

$$aX + bY\cos C + cZ\cos B + abc\cos A\,\frac{U + R^2}{R^2} = 0;$$

on peut lui donner la forme suivante

$$U - \frac{Rx}{\cos A} = 0,$$

comme segment capable de l'angle $V = 2A - \pi$, décrit sur BC.

Exemple. Le cercle décrit sur le segment formé sur le côté BC par le pied de la hauteur, et par la droite joignant les pieds des deux autres hauteurs, a pour équation

$$Y\,\mathrm{tg}^2 B = Z\,\mathrm{tg}^2 C.$$

L'axe radical des trois cercles de cette nature est la droite de Lemoine.

13. *Cercles isotomiques.* Aux trois cercles ayant pour équations

$$\frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Z}{Z_0},$$

correspondent les cercles ayant pour équations

$$XX_0 = YY_0 = ZZ_0;$$

ils ont même axe radical et sont symétriques des précédents par rapport aux milieux des côtés du triangle ABC.

En particulier, si les trois premiers cercles sont ceux d'Apollonius, les cercles *isotomiques* (*) ont pour équations

$$\frac{X}{a^2} = \frac{Y}{b^2} = \frac{Z}{c^2},$$

et pour axe radical la droite ayant pour équation

$$X(b^2 - c^2) + Y(c^2 - a^2) + Z(a^2 - b^2) = 0.$$

(*) Ces cercles se coupent aux deux centres *isologiques*. Voir *Mathesis*, VII, p. 117.

C'est la droite d'Euler qui passe par le barycentre et par l'orthocentre du triangle ABC.

14. *Bissectrices et cercles tangents.* Les coordonnées tripolaires du centre I du cercle inscrit sont

$$\overline{AI}^2 = \frac{bc(p-a)}{p}, \quad \overline{BI}^2 = \frac{ca(p-b)}{p}, \quad \overline{CI}^2 = \frac{ab(p-c)}{p}.$$

La droite joignant le centre I du cercle inscrit au centre O du cercle circonscrit, a pour équation

$$aX(b-c) + bY(c-a) + cZ(a-b) = 0;$$

c'est l'axe radical des cercles ayant pour équations

$$aX = bY = cZ.$$

La puissance d'un point par rapport au cercle inscrit a pour expression

$$\frac{aX + bY + cZ}{2p} - r(2R + r),$$

et la distance d'un point à la bissectrice intérieure de l'angle A est donnée par la formule

$$\frac{X(c-b) + bY - cZ + bc(b-c)}{2bc\cos\frac{A}{2}}.$$

Les coordonnées tripolaires du centre I_a du cercle ex-inscrit de rayon r_a sont(*)

$$\overline{AI_a}^2 = bc\frac{p}{p-a}, \quad \overline{BI_a}^2 = ac\frac{p-c}{p-a}, \quad \overline{CI_a}^2 = ab\frac{p-b}{p-a}.$$

La droite OI_a a pour équation

$$-aX(b-c) + bY(c+a) - cZ(a+b) = 0.$$

La puissance d'un point par rapport au cercle ex-inscrit de rayon r_a a pour expression

$$\frac{-aX + bY + cZ}{2(p-a)} - r_a(2R - r_a);$$

la puissance d'un point par rapport au cercle décrit sur II_a comme diamètre est

$$\frac{-a^2X + b(b+c)Y + c(b+c)Z - a^2bc}{4p(p-a)}.$$

(*) Voir ma *Note sur un nouveau principe des signes*, dans la N. C. M., t. II, p. 384, III, p. 1 et mon article *Aire du triangle*, dans *Mathesis*, t. III, p. 167.

Les formules (1) donnent les équations des figures inverses au cercle circonscrit pris pour cercle d'inversion. Ainsi cercle ayant pour équation

$$\lambda X - \mu Y + \nu Z + q = 0,$$

a pour équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z - \frac{q}{R^2} UV + R^2 = 0.$$

En particulier, l'inverse du côté BC est le c équation

$$aX - bY\cos C + cZ\cos B + abc\cos$$

on peut lui donner la forme suivante

$$U - \frac{Rr}{\cos A} = 0.$$

comme segment capable de l'angle $V = 2A$

Exemple. Le cercle décrit sur le segmen pied de la hauteur, et par la droite joi hauteurs, a pour équation

$$Y\,tg^2 B = Z$$

L'axe radical des trois cercles de cet

12. *Cercles isotomiques.* Aux trois

$$\frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y}$$

correspondent les cercles ayant pou

$$XX_0 =$$

ils ont même axe radical et sont aux milieux des côtés du triangl

En particulier, si les trois pr cercles isotomiques (*) ont pour

et pour axe radical la droite

$$X(b^2 - c^2) +$$

(*) Ces cercles se coupent

angle

par rap-

en C, A, B aux côtés

$$\frac{a}{c},$$

distance d'un point par rapport
distances du point F sont

$$\frac{abc}{(b^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$$

$$\frac{16R^2S^2}{\cdot^2 + a^2b^2}.$$

i coupe ortho-

ıts entre eux
Si l'on désigne
ıe que la distance
ı obtient trois équa-

$$\cdot) \cos 2C = (\lambda + \mu)^2,$$

$$\text{ı}^2\, C = \lambda\mu,$$
$$\sin^2 A = \mu\nu,$$
$$\text{ı}) \sin^2 B = \nu\lambda.$$

ı membre, on en déduit

$$- \nu) \sin A \sin B \sin C = \pm \lambda\mu\nu.$$

$$+,$$

$$- \lambda) \sin B \sin C = \lambda \sin A,$$

$$\lambda = \frac{Rbc}{bc + 2aR}.$$

ı trois cercles intérieurs au cercle circonscrit; avec le urait les trois cercles extérieurs, inverses des premiers par cercle circonscrit.

---

ucas, si les cercles n'ont pas été considérés encore. *(Rédaction.)*

on a pour le rayon ρ_a de ce cercle

$$4\rho_a^2 = \overline{\Pi}_a^2 = \frac{a^2bc}{p(p-a)}.$$

La distance d'un point à la bissectrice extérieure de l'angle A a pour expression

$$\frac{(b+c)X - bY - cZ + bc(b+c)}{2bc\cos\frac{A}{2}}.$$

On peut obtenir une autre expression de la puissance d'un point par rapport au cercle décrit sur Π_a comme diamètre, qui est encore le segment capable de l'angle $\frac{A}{2}$ décrit sur BC; on trouve ainsi

$$U + 2Rx.$$

La puissance d'un point au cercle décrit sur I_bI_c comme diamètre a pour expressions équivalentes

$$\frac{a^2X + b(c-b)Y + c(b-c)Z - a^2bc}{4(p-b)(p-c)} \equiv U - 2Rx.$$

Enfin, si l'on pose

$$J = aX + bY + cZ + abc,$$

l'équation du cercle passant par les trois points $I_aI_bI_c$ (et dont le rayon est 2R) est

$$\sin^2\frac{A}{2}(J - 2aX) + \sin^2\frac{B}{2}(J - 2bY) + \sin^2\frac{C}{2}(J - 2cZ) = J.$$

15. *Points de Brocard.* Si F est le premier point de Brocard, l'angle de CF avec FB est $\pi - C$; par suite, les puissances d'un point par rapport aux trois cercles BCF, CAF, ABF ont pour expressions

$$U + 2Rx\frac{b}{c}, \quad U + 2Ry\frac{c}{a}, \quad U + 2Rz\frac{a}{b};$$

ces trois cercles sont respectivement tangents en C, A, B aux côtés CA, AB, BC; on a d'ailleurs l'identité

$$U + 2Rx\frac{b}{c} \equiv Z - 2Ry\frac{a}{c},$$

qui donne une autre expression de la puissance d'un point par rapport aux trois cercles; les coordonnées trilinéaires du point F sont

$$\frac{bx}{c} = \frac{cy}{a} = \frac{az}{b} = \frac{8RS^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2},$$

et les coordonnées tripolaires

$$\frac{a^2X}{b^2}=\frac{b^2Y}{c^2}=\frac{c^2Z}{a^2}=\frac{16R^2S^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}.$$

De même pour le second point de Brocard.

Le cercle qui passe par les deux points de Brocard et qui coupe orthogonalement le cercle circonscrit a pour équation

$$\begin{vmatrix} a^2X & b^2Y & c^2Z \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}=0,$$

ou, en développant

$$a^6X+b^6Y+c^6Z-a^2b^2c^2(X+Y+Z)=0.$$

16. *Cercles de. . . . .* ?(*) Ces trois cercles sont tangents entre eux deux à deux et tangents au cercle circonscrit en A, B, C. Si l'on désigne par λ, μ, ν les rayons des trois cercles et si l'on exprime que la distance de leurs centres est égale à la somme des rayons, on obtient trois équations telles que

$$(R-\lambda)^2+(R-\mu)^2-2(R-\lambda)(R-\mu)\cos 2C=(\lambda+\mu)^2,$$

d'où l'on tire facilement

$$(R-\lambda)(R-\mu)\sin^2 C=\lambda\mu,$$
$$(R-\mu)(R-\nu)\sin^2 A=\mu\nu,$$
$$(R-\nu)(R-\lambda)\sin^2 B=\nu\lambda.$$

Donc, en multipliant membre à membre, on en déduit

$$(R-\lambda)(R-\mu)(R-\nu)\sin A\sin B\sin C=\pm\lambda\mu\nu.$$

Par suite, avec le signe +,

$$(R-\lambda)\sin B\sin C=\lambda\sin A,$$

et

$$\lambda=\frac{Rbc}{bc+2aR}.$$

On obtient ainsi trois cercles intérieurs au cercle circonscrit; avec le signe — on aurait les trois cercles extérieurs, inverses des premiers par rapport au cercle circonscrit.

(*) *De Lucas*, si les cercles n'ont pas été considérés encore. *(Rédaction.)*

Les coordonnées trilinéaires du centre du cercle tangent intérieurement en A, sont

$$x = -\lambda\left(\frac{a}{R} + \cos A\right), \quad y = -\lambda \cos B, \quad z = -\lambda \cos c;$$

par suite, l'équation de ce cercle est

$$aX \cos A + bY \cos B + cZ \cos C + abc + \frac{a^2X}{R} = 0,$$

ou, plus simplement :

$$a^2X - 2SU = 0.$$

Si l'on retranche, membre à membre, les équations des cercles tangents en A et B, on obtient l'équation du cercle d'Apollonius passant par le point C. Par conséquent, les trois cercles cherchés sont tangents à deux des trois cercles d'Apollonius, et le problème revient à tracer un cercle tangent à un cercle donné en un point donné et tangent à un autre cercle.

L'axe radical des cercles tangents en A et B a pour équation

$$\frac{a^2X - 2SU}{a^2 - 2S} = \frac{b^2Y - 2SU}{b^2 - 2S};$$

il passe donc par le point de concours des tangentes en A et en B au cercle circonscrit.

La droite qui joint les centres des cercles tangents en A et B a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{\cos C}\left(\frac{c}{ab} - \frac{1}{R}\right) = 0.$$

Donc l'axe d'homologie du triangle ABC et du triangle des trois centres a pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0;$$

c'est la polaire du point de Lemoine par rapport au triangle ABC(*).

Remarque. Les considérations précédentes s'appliquent à un polygone d'un nombre impair de côtés inscrit à un cercle; lorsque le nombre

(*) Le J. M. S. a publié en janvier, mars et juillet une étude encore inachevée sur les coordonnées tripolaires due à M. Poulain. Plusieurs formules contenues dans ce travail figurent également dans l'article de M. E. Lucas, mais les deux auteurs les ont obtenues indépendamment l'un de l'autre. — Nous rappelons à cette occasion les articles suivants de M. E. Lucas : *Principes de géométrie tricirculaire et tétrasphérique* (N. C. M. t. II, pp. 225, 255, 289); *Sur un principe fondamental de Géométrie et de Trigonométrie* (Ib., pp. 85, 160, 200). (*Rédaction.*)

des côtés du polygone inscrit est pair, le problème n'est possible que lorsque le produit des côtés de rang pair est égal au produit des côtés de rang impair, et alors le problème comporte une infinité de solutions, et la couronne des cercles tangents se ferme d'elle-même, en commençant par un cercle tangent quelconque.

Paris, janvier 1889.

SUR LA FORMULE D'OZANAM.

I. Comme nous l'avons dit dans l'article précédent (*Mathesis*, pp. 161-164), cette formule remarquable appartient à la trigonométrie générale. Elle exprime que le rapport

$$J = \frac{x(2+\cos x)}{\sin x} = \frac{1}{2}x\left(3\cot\frac{1}{2}x + \operatorname{tang}\frac{1}{2}x\right)$$

est toujours très voisin de 172, quand x varie de 0° à 45°. Nous publierons ultérieurement une démonstration élémentaire de ce théorème. Voici une petite table des valeurs de J, de degré en degré (Pour $x = 0$, la limite de J est 171,887) :

x	J	x	J	x	J
1	171,887	16	171,893	31	171,972
2	171,887	17	171,895	32	171,984
3	171,887	18	171,897	33	171,996
4	171,887	19	171,899	34	172,011
5	171,887	20	171,902	35	172,026
6	171,887	21	171,905	36	172,043
7	171,888	22	171,908	37	172,062
8	171,888	23	171,912	38	172,082
9	171,888	24	171,917	39	172,104
10	171,888	25	171,923	40	172,128
11	171,889	26	171,929	41	172,154
12	171,889	27	171,936	42	172,182
13	171,890	28	171,943	43	172,212
14	171,891	29	171,952	44	172,245
15	171,892	30	171,962	45	172,279

Quand la dernière décimale est forcée, elle est en caractère gras.

II. Voici un exemple d'application de la formule d'Ozanam, dont nous

×Question 582.

(Voir *Mathesis*, t. VII, p. 207.)

Si l'on considère les séries

$$\begin{aligned} n &: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \\ u_n &: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots \\ v_n &: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots \end{aligned}$$

démontrer que l'on a

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 + u_n^2, \tag{1}$$

$$v_{2n} = u_{n-1}^2 + 2u_n^2 + u_{n+1}^2, \tag{2}$$

$$v_{4n+2} = v_{2n+1}^2 + 2 \tag{3}$$

$$v_{4n} = (2u_n)^2 + u_n^2 + 2 \tag{4}$$

et décomposer en carrés u_{2n} *et* v_{2n+1}. (Ed. Lucas.)

Solution par MM. Molenbroek, Mosnat *et* Rocchetti.

1° On a généralement

$$u_p = u_{p-1} + u_{p-2}, \quad v_p = v_{p-1} + v_{p-2}. \tag{5}$$

De là

$$u_p = u_{p-1} + u_{p-2} = 2u_{p-2} + u_{p-3} = 3u_{p-3} + 2u_{p-4} \cdots,$$

ce que l'on peut écrire ainsi

$$\begin{aligned} u_p = u_2u_{p-1} + u_1u_{p-2} = u_3u_{p-1} + u_2u_{p-2} = u_4u_{p-2} + u_3u_{p-3} \\ = u_3u_{p-3} + u_4u_{p-4} = \text{etc.} \end{aligned}$$

Par induction,

$$u_p = u_ku_{p-k+1} + u_{k-1}u_{p-k}. \tag{6}$$

On constate aisément que, si cette formule est vraie pour une valeur de k, elle subsiste également pour $k+1$, il suffit de remplacer u_{p-k+1} par la somme $u_{p-k} + u_{p-k-1}$.

Si dans l'égalité (6), on fait $p = 2n+1$, $k = n+1$, on trouve la relation (1).

2° On a

$$v_n = u_{n+1} + u_{n-1}, \tag{7}$$

car cette formule se vérifie pour $n = 1, 2, \ldots$ et, si elle a lieu pour n, elle subsiste aussi pour $n+1$.

D'après l'égalité (1) :

$$v_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n-1} = (u_{n+1}^2 + u_n^2) + (u_n^2 + u_{n-1}^2) = u_{n+1}^2 + 2u_n^2 + u_{n-1}^2,$$

ce qui démontre la formule (2).

3° La formule (2) peut s'écrire ainsi :

$$v_{2n} = (u_{n+1} + u_{n-1})^2 + 2(u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}) = v_n^2 + 2(u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}).$$

Or, si l'on multiplie les relations

$$u_p = u_{p-1} + u_{p-2}, \quad u_{p-1} = u_{p-2} + u_{p-3},$$

respectivement par u_{p-2} et u_{p-1} et qu'on fasse la différence des produits, on trouve

$$u_p u_{p-2} - u_{p-1}^2 = -(u_{p-1}u_{p-3} - u_{p-2}^2).$$

Donc l'expression $u_p u_{p-2} - u_{p-1}^2$ a une valeur absolue constante; pour $p = 2$, cette valeur est -1; par conséquent

$$u_p u_{p-2} - u_{p-1}^2 = (-1)^{p-1}. \tag{8}$$

On en conclut

$$v_{2n} = v_n^2 + (-1)^{n-1}.2, \tag{9}$$

ou

$$v_{4n+2} = v_{2n+1}^2 + 2, \quad v_{4n} = v_{2n}^2 - 2.$$

4. D'après les formules (2) et (8) :

$$v_{2n} = 2u_n^2 + u_n u_{n-2} + u_{n+2}u_n + (-1)^{n-1}.2.$$

Mais

$$u_{n+2} + u_{n-2} = (u_{n+1} + u_n) + (u_n - u_{n-1})$$
$$= (u_n + u_{n-1} + u_n) + (u_n - u_{n-1}) = 3u_n.$$

Par suite,

$$v_n^2 = 5u_n^2 + (-1)^{n-1}.2,$$

ou

$$v_{4n} = 5u_n^2 + 2, \quad v_{4n+2} = 5u_{n+1}^2 - 2.$$

5. Des égalités (1) et (9), on déduit

$$u_{2n} = u_{2n+1} - u_{2n-1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2,$$
$$v_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n+2} = u_{n+2}^2 + u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_{n-1}^2$$
$$v_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n} = v_{n+1}^2 + v_n^2 + (-1)^n.4. \quad \text{(Mosnat.)}$$

On trouve facilement

$$u_{2n} = u_{2n-1} + u_{2n-3} + u_{2n-5} + \cdots + u_3 + u_1,$$
$$v_{2n+1} = v_{2n} + v_{2n-2} + v_{2n-4} + \cdots + v_4 + v_2 + v_1;$$

d'où

$$u_{2n} = u_n^2 + 2u_{n-1}^2 + 2u_{n-2}^2 + \cdots + 2u_3^2 + 2u_2^2 + 2u_1^2,$$
$$v_{2n+1} = u_{n+1}^2 + 3u_n^2 + 4u_{n-1}^2 + 4u_{n-2}^2 + \cdots + 4u_2^2 + 4u_1^2.$$

(Rocchetti.)

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des Sciences de Liège, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON

TOME DIXIÈME
ANNÉE 1890.

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
49, RUE DES CHAMPS, 49

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1890

MATHESIS

SUR QUELQUES QUESTIONS DE SIGNES EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

par M. Ed. Lucas, professeur de mathématiques spéciales, au Lycée St-Louis.

La plupart des Traités de Géométrie analytique ne résolvent pas d'une manière précise, les questions où il entre des signes; aucun auteur, je pense, n'a distingué jusqu'à présent par un procédé analytique les deux modes différents de croisement de deux droites quelconques de l'espace. La présente note a pour but de combler cette lacune. Nous ne nous occuperons, pour plus de simplicité, que des coordonnées rectangulaires; mais les considérations suivantes s'appliquent tout aussi bien aux coordonnées obliques dans le plan ou dans l'espace.

Désignons par

$$X_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$$

le premier membre de l'équation d'un plan; par Q le déterminant des coefficients de X_1, X_2, X_3, X_4, et par A_i, B_i, C_i, D_i les mineurs du premier ordre de ce déterminant correspondant à a_i, b_i, c_i, d_i.

Pour que ces quatre plans X_1, X_2, X_3, X_4 forment un tétraèdre, il faut et il suffit que le produit $D_1D_2D_3D_4Q$ ne soit pas nul, et l'on sait qu'un plan quelconque est représenté par une équation linéaire et homogène.

L'identité

$$D_1X_1 + D_2X_2 + D_3X_3 + D_4X_4 = Q$$

nous montre que les plans

$$D_1X_1 + D_2X_2 = 0, \quad D_3X_3 + D_4X_4 = 0,$$

sont parallèles; le premier passe par l'arête (1, 2) parallèlement à la droite (3, 4). Par suite, le plan conjugué harmonique

$$D_1X_1 = D_2X_2$$

passe par l'arête (1, 2) et par le milieu de l'arête opposée, et le barycentre du tétraèdre est déterminé par les équations

$$D_1X_1 = D_2X_2 = D_3X_3 = D_4X_4 = \frac{Q}{4}.$$

Les quatre plans divisent l'espace en quinze régions qu'il est facile de caractériser. Un point quelconque et le barycentre du tétraèdre sont d'un même côté ou de côtés différents de la première face suivant que le produit D_1QX_1 est positif ou négatif.

Plan bissecteur d'un angle intérieur au tétraèdre. Posons

$$l_i = +\sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2};$$

l'un des plans bissecteurs du dièdre (1, 2) a pour équation

$$\frac{X_1}{l_1} = \varepsilon \frac{X_2}{l_2},$$

avec $\varepsilon = \pm 1$; par conséquent, puisque l_1 et l_2 sont positifs, on obtiendra le plan bissecteur de l'angle intérieur en choisissant ε du signe de D_1D_2.

Plan bissecteur de l'angle aigu d'un dièdre. Posons

$$h_{12} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2;$$

cette expression égalée à zéro est la condition de perpendicularité des deux plans. L'expression $\frac{X_1X_2}{h_{12}}$ ne change pas quand on multiplie les coefficients par un nombre quelconque; elle ne change pas non plus dans la transformation des coordonnées rectangulaires. Pour s'en convaincre, et pour se convaincre de quelques autres résultats qui vont suivre, il suffit de faire une rotation d'axes autour de Oz, puisque l'on peut passer d'un système d'axes à un autre quelconque par trois rotations, comme dans les formules d'Euler. Si l'on prend pour plan des xy le plan bissecteur de l'angle aigu des deux plans, l'expression précédente devient

$$\frac{(z + mx)(z - mx)}{1 - m^2}$$

et l'on a $m < 1$; pour un point de l'axe des x, cette expression est négative. Par suite, un point est situé dans l'angle aigu ou dans l'angle obtus de deux plans, suivant que l'expression $\frac{X_1X_2}{h_{12}}$ est négative ou positive.

Le plan bissecteur de l'angle aigu de deux plans a donc pour équation

$$\frac{X_1}{l_1} = \varepsilon \frac{X_2}{l_2}$$

ε ayant le signe contraire de celui de l'expression précédente h_{12}.

En comparant l'équation du plan bissecteur de l'angle aigu avec celle de l'équation du plan bissecteur de l'intérieur, on trouve immédiatement la nature de l'angle dièdre du tétraèdre, et les signes des fonctions trigonométriques de cet angle sont nettement déterminés.

Croisement de deux droites de l'espace. Sans tenir compte de leurs directions, deux droites quelconques de l'espace prolongées indéfiniment, qui ne se coupent pas et ne sont pas perpendiculaires, peuvent affecter deux modes distincts de croisement, puisque l'ensemble formé par deux droites quelconques ne peut coïncider avec la figure symétrique par rapport à un point quelconque de l'espace, par exemple, par rapport au milieu de leur plus courte distance.

Considérons deux droites parallèles, et, dans la plus courte distance, un bonhomme ayant les pieds sur l'une d'elles, et la tête dans l'autre; faisons tourner de moins d'un angle droit dans le sens de gauche à droite en passant par devant, c'est-à-dire à la droite du bonhomme, la ligne qui passe par sa tête. Nous dirons que le croisement est *dextrorsum*(*).

Cela posé, soient

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0,$$

les équations d'une droite, et

$$X_3 = 0 \quad X_4 = 0$$

celles d'une seconde droite; posons

$$\begin{aligned} L_{12,34} = {} & (b_1c_2 - b_2c_1)(b_3c_4 - b_4c_3) \\ & + (c_1a_2 - c_2a_1)(c_3a_4 - c_4a_3) \\ & + (a_1b_2 - a_2b_1)(a_3b_4 - a_4b_3); \end{aligned}$$

cette expression égalée à zéro est la condition de perpendicularité, et $Q = 0$ est la condition de rencontre. Mais l'expression $\frac{L_{12,34}}{Q_{1234}}$ ne change pas, 1° quand on échange les indices 1 et 2, ou 3 et 4; 2° quand on change l'ordre des deux droites; 3° quand on multiplie les coefficients de l'équation de l'un des plans par un nombre quelconque; enfin 4° dans la transformation des coordonnées rectangulaires.

En particulier, soient les droites

$$z = 1, \quad y = mx, \quad \text{et} \quad z = -1, \quad y = -mx,$$

(*) Cette définition est indépendante de l'ordre des droites et s'applique aux deux droites, en renversant le bonhomme.

et $m < 1$; on trouve dans ce cas un résultat positif. Donc *le croisement de deux droites de l'espace est dextrorsum ou sinistrorsum suivant que le rapport* $\frac{L}{Q}$ *est positif ou négatif.*

Application aux quadriques. Soit

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'une quadrique,

$$s^3 - Is^2 + Js - \delta = 0$$

l'équation en s, en supposant toujours les coordonnées rectangulaires, et Δ le discriminant de l'équation (1) rendue homogène

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

On peut se proposer de rechercher les caractéristiques de position d'un point et d'une quadrique.

Il faut alors considérer le signe de f avec celui d'un invariant I ou δ d'ordre impair tandis que le genre et la variété des surfaces est donné par le signe des invariants d'ordre pair, ou du produit $I\delta$ des invariants d'ordre impair par rapport aux coefficients.

Pour reconnaître si un point est dans une région déterminée par la surface d'une quadrique à centre ou d'un cône, on prend le signe de $\delta f(x, y, z)$.

Pour reconnaître les relations de position d'un point et d'un paraboloïde, de deux plans sécants, ou parallèles, d'un cylindre parabolique, on prend le signe de $If(x, y, z)$.

Pour les cylindres à centre, on prendra le signe de $\Gamma f(x, y, z)$, en désignant par Γ la somme des mineurs de Δ par rapport aux coefficients des carrés des variables (*).

(*) On trouve une étude sur des questions analogues à celles qui sont traitées dans l'article de M. Lucas, dans le chapitre II (pp. 22-34) de l'Introduction du *Cours de Mécanique* de DUHAMEL (Paris, Mallet-Bachelier, 1862; troisième édition). Ce chapitre est intitulé : *Révision de quelques formules de Géométrie analytique* et l'auteur y traite, avec quelque prolixité, les deux questions suivantes : 1° Distinction du sens de la perpendiculaire à deux droites. 2° Distinction du sens de l'axe d'un mouvement de rotation. (P. M.)

5. $a, b \in G . m \in N : \supset . ma - mb = m(a - b)$.
6. $a \in G . m, n \in N : \supset . ma - na = (m - n)a$.
7. $a, b, c \in G . a = b : \supset : a/c = b/c . c/a = c/b$.
8. » $. a > b : \supset : a/c > b/c . c/b > c/a$.
9. » $. . a/c = b/c : \supset . a = b$.
» $. c/a = c/b : \supset . a = b$.
10. » $. a/c > b/c : \supset . a > b$.
» $. c/b > c/a : \supset . a > b$.
11. $a, b, c, d, e, f \in G . a/b = c/d . c/d = e/f : \supset . a/b = e/f$.
12. » $. a/b = c/d = e/f : \supset . a/b = (a + c + e)/(b + d + f)$.
13. » $. a/b = c/d . c/d > e/f : \supset . a/b > e/f$.
14. $a, b, c, d \in G . a/b = c/d : \supset . \therefore a > c . \supset . b > d : a = c . \supset . b = d :$
$a < c . \supset . b < d$.
15. $a, b \in G . m \in N : \supset . (ma)/(mb) = a/b$.
16. $a, b, c, d \in G . a/b = c/d : \supset . a/c = b/d$.
17. » » $: \supset . (a - b)/b = (c - d)/d$.
18. » » $: \supset . (a + b)/b = (c + d)/d$.
19. » » $: \supset . (a - c)/(b - d) = a/b$.
20. $a, b, c, d, e, f \in G . a/b = d/e . b/c = e/f : \supset . \therefore a > c . \supset . d > f :$
$a = c . \supset . d = f : a < c . \supset . d < f$.
21. » $. a/b = e/f . b/c = d/e : \supset . \therefore a > c . \supset . d > f :$
$a = c . \supset . d = f : a < c . \supset . d < f$.
22. » $. a/b = d/e . b/c = e/f : \supset . a/c = d/f$.
23. » $. a/b = e/f . b/c = d/e : \supset . a/c = d/f$.
24. » $. a/b = c/d . e/b = f/d : \supset . (a+e)/b = (c+f)/d$.
25. $a, b, c, d \in G . a/b = c/d . a > b . a > c : \supset . a + d > b + c$.

SUR LES NOMBRES PARFAITS;

par M. Ed. Lucas, professeur de mathématiques spéciales au Lycée St-Louis, à Paris.

I. Lionnet a énoncé (N. A. M., 1879; p. 306) le théorème démontré par M. Stern (*Mathesis*, VI; p. 248). Il s'occupa aussi des nombres parfaits, *de seconde espèce*, égaux au produit de leurs parties aliquotes. On simplifie sa méthode, en observant que le produit des diviseurs d'un nombre n est une puissance de n dont l'exposant est la moitié du nombre ν des divi-

seurs de n, ainsi qu'on s'en assure en groupant les diviseurs deux par par deux, de telle sorte que leur produit soit n. D'ailleurs la formule subsiste lorsque n est un carré. On doit donc avoir

$$n = n^{\frac{\nu}{2}-1},$$

d'où $\nu = 4$, et par suite, en se reportant à la formule qui donne le nombre des diviseurs de n, il faut et il suffit que n soit le cube d'un nombre premier ou le produit de deux nombres premiers inégaux. On trouverait de même les nombres n dont le produit des parties aliquotes est une puissance de n d'exposant donné.

II. On sait que les *nombres parfaits pairs*, ou nombres d'Euclide, sont pris parmi les nombres

$$e_p = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

dans lesquels le second facteur est premier; par suite, l'exposant p est premier. Donc *tout nombre parfait pair autre que* 6 *ou* 28 *est divisible par* 16.

Tout nombre premier plus grand que 3, est de l'une des formes $6q+1$ ou $6q+5$; d'autre part, on a, pour le *module* 9,

$$2^3 \equiv -1, \quad 2^{6q} \equiv +1;$$

par suite, pour

$$p = 6q+1, \quad e_p \equiv 1(2-1) \equiv 1,$$
$$p = 6q+5, \quad e_p \equiv 2(2^3+1) \equiv 1;$$

donc *tout nombre parfait pair, autre que* 6, *est un multiple de* 9, *augmenté de* 1.

On a, de même, pour le *module* 7, les congruences

$$2^3 \equiv +1, \quad 2^{3q} \equiv +1;$$

par suite, pour

$$p = 6q+1, \quad e_p \equiv 1(2-1) \equiv 1,$$
$$p = 6q+5, \quad e_p \equiv 2(2^3-1) \equiv -1;$$

donc *tout nombre parfait pair, autre que* 28, *est un multiple de* 7 *augmenté ou diminué de* 1.

Pour le *module* 13, on a $2^6 \equiv -1$; en appliquant ce résultat aux nombres des formes

$$p = 12q+1, 5, 7, 11,$$

on en déduit que *tout nombre parfait pair, autre que* 6, *est un multiple de* 13 *augmenté de* 1, 2, 3 *ou* 8.

Pour le *module* **19**, on a $2^9 \equiv -1$; en appliquant ce résultat aux nombres p des formes

$$p = 18q + 1, 5, 7, 11, 13, 17,$$

on trouve que *tout nombre parfait pair, autre que* 6 *ou* 28, *est un multiple de* 19 *augmenté de* 1, 2, 3, 7, 10 *ou* 15.

Enfin pour le *module* **25**, la congruence $2^{10} \equiv -1$, donne pour les nombres p des formes

$$p = 20q + 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19,$$

ce théorème : *Tout nombre parfait pair, autre que* 496, *est un multiple de* 25 *augmenté de* 1, 3, 6, 11 *ou* 16.

En combinant ce résultat avec le premier, il en résulte que *tout nombre parfait pair, autre que* 6 *ou* 496, *est terminé par l'ensemble des deux chiffres*

16, 28, 36, 56, 76.

Exercices I. Trouver les résidus des nombres parfaits pairs 1° par les nombres 11, 23, 29, 49. 2^n par les nombres 31, 37, 41, 43.

II. Trouver les trois derniers chiffres des nombres parfaits pairs; — et les quatre derniers chiffres.

III. Les nombres amiables(*) fournis par les formules

$$a = 2^n(3.2^{n-1} - 1)(3.2^n - 1), \quad b = 2^n(3^n.2^{2n-1} - 1),$$

dans lesquelles les facteurs entre parenthèses sont des nombres premiers, ne donnent de tels nombres, pour $n < 35$, que pour les valeurs connues d'Euler, $n = 2, 4, 7$.

Note. Sur la théorie des nombres parfaits, voir *Mathesis*, VI, 100-101 (Seelhoff); 145-148 (E. Lucas et P. Mansion); 178 (Seelhoff); 248-250 (M. Stern et E. Lucas); VII, 45-46 (E. Lucas); 228-230 (C. Servais); 245-246 (E. Cesàro); VIII, 57-61, (Sylvester); 92-93, 135 (C. Servais); 112-113 (E. Catalan). (Rép.)

(*) On appelle ainsi deux nombres dont chacun est égal à la somme des diviseurs de l'autre. Exemple : $a = 220$, $b = 284$. Nous publierons dans *Mathesis* les solutions des exercices proposés par M. Lucas, que l'on voudra bien nous envoyer.

CRITERIUM POUR LA FORMULE DE PAOLI;

par M. Éd Lucas, professeur au Lycée St-Louis, à Paris.

On sait que le problème fondamental de la partition des nombres revient à déterminer le nombre des solutions entières non négatives de l'équation

$$ax + by + cz + \cdots = n,$$

pour des valeurs données des nombres entiers $a, b, c, \ldots$, positifs et premiers entre eux. En désignant ce nombre par $\Psi(n)$, Euler a démontré, dans son *Algèbre*, que le coefficient de ξ^n dans le développement de

$$\frac{1}{(1-\xi^a)(1-\xi^b)(1-\xi^c)\cdots}$$

ordonné suivant les exposants croissants de ξ est précisément égal à $\Psi(n)$; mais la solution de cette question, c'est-à-dire de la détermination exacte du nombre $\Psi(n)$ n'était pas connue; et, en dehors de la formule de Paoli qui donne le résultat à une unité près, pour une équation à deux inconnues, on ne connait qu'une formule approximative donnée par Laguerre, dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1877, t. V, pp. 76-78).

Nous allons exposer une méthode très simple, pour déterminer le nombre exact des solutions non négatives de l'équation

$$ax + by = c. \tag{1}$$

Nous poserons

$$c = abq + r,$$

q et r étant positifs et $0 \leqq r < ab$. De plus, soit (x_0, y_0) une première solution quelconque de l'équation (1); on sait que toutes les autres sont données par les formules

$$x = x_0 + bt; \quad y = y_0 - at.$$

On obtient d'ailleurs une première solution (x_0, y_0) par le développement de la fraction $(a : b)$ en fraction continue. En désignant par n le nombre des réduites, et par $(\alpha : \beta)$ l'avant-dernière réduite, on a

$$x_0 = (-1)^n c\beta, \quad y_0 = -(-1)^n c\alpha.$$

Ceci posé, considérons un système d'axes rectangulaires OX, OY et construisons la droite AB qui correspond à l'équation (1). Les valeurs

entières de t donnent sur cette droite des points équidistants qui représentent les solutions entières; la distance de deux points voisins est $\sqrt{a^2+b^2}$; la longueur du segment AB de la droite, intercepté par les axes, est $\frac{c}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$. Par conséquent, d'après une formule donnée par Paoli, le nombre des solutions entières non négatives est q ou $(q+1)$, c'est-à-dire égal à l'un des deux quotients de c par ab, à une unité près, soit par défaut, soit par excès.

Si l'on construit la droite ayant pour équation

$$ax+by=c-ab,$$

on aperçoit tout de suite que le nombre des solutions entières non négatives de la nouvelle équation est moindre de 1 que pour l'ancienne; par conséquent, en appliquant q fois cette remarque, on trouve

$$\Psi(c)=q+\Psi(r)(*).$$

Plus généralement, *si c et c' désignent deux nombres non négatifs dont la différence égale mab, on a*

$$\Psi(c)-\Psi(c')=m.$$

On démontre de même cette autre proposition : *si c et c' désignent deux nombres non négatifs dont la somme égale sab, on a*

$$\Psi(c)+\Psi(c')=(s+1)\text{ ou }s,$$

suivant que c est ou n'est pas divisible par l'un des coefficients a ou b.

Mais, lorsque l'on suppose $0 \leqq r < ab$ et $r'=ab-r$, la relation précédente devient

$$\Psi(r)+\Psi(r')=2, \text{ ou } 1,$$

suivant que r est ou n'est pas divisible par l'un des coefficients; d'ailleurs $\Psi(r)$ est toujours l'un des nombres 1 ou 0, suivant que r est ou n'est pas divisible par l'un des coefficients.

Mais le nombre des valeurs totales de r est $(ab-1)$; celles qui sont divisibles par a ou b, sont en nombre $(a+b-1)$; il y a, par conséquent, $(a-1)(b-1)$ valeurs de r qui ne sont pas divisibles par a ou b; de là ce théorème démontré autrement par M. Cesàro dans son important mémoire *Sur diverses questions d'arithmétique* (p. 276):

(*) *Mathesis*, t. IX, p. 110; CATALAN, *Mélanges mathématiques*, t. I, p. 24.

Le nombre des valeurs nulles de $\Psi(r)$ *est égal à*

$$\tfrac{1}{2}(a-1)(b-1).$$

On en déduit facilement cette autre formule :

$$\Psi(0)+\Psi(1)+\cdots+\Psi(qab-1)=\frac{q}{2}(qab+a+b-1).$$

Mais il *restait à trouver le criterium* pour déterminer la valeur de $\Psi(r)$ pour une valeur donnée de r.

Considérons le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite ayant pour équation

$$ax+by=r;$$

la valeur de t qui correspond à ce point résulte de l'égalité

$$\frac{x_0+bt}{a}=\frac{y_0-at}{b}, \quad \text{d'où} \quad t=\frac{ay_0-bx_0}{a^2+b^2};$$

ou en substituant à $(x_0, y_0,)$ la solution donnée par les fractions continues

$$t=(-1)^{n-1}\frac{a\alpha+b\beta}{a^2+b^2}r;$$

cette valeur de t ne peut être entière, puisque (a^2+b^2) premier à $(a\alpha+b\beta)$ diviserait r qui est plus petit que lui, en exceptant le cas de $r=0$(*). Désignons par t_1 et $t_2=t_1+1$ les nombres entiers consécutifs qui comprennent t, et posons

$$(-1)^{n-1}(a\alpha+b\beta)r=t_1(a^2+b^2)+\rho_1,$$
$$(-1)^{n-1}(a\alpha+b\beta)r=t_2(a^2+b^2)-\rho_2,$$

ρ_1 et ρ_2 étant positifs et $<a^2+b^2$. Aux deux valeurs t_1 et t_2 correspondent les solutions

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{ar-b\rho_1}{a^2+b^2}, \\ y_1=\dfrac{br+a\rho_1}{a^2+b^2}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2=\dfrac{ar+b\rho_2}{a^2+b^2}, \\ y_2=\dfrac{br-a\rho_2}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

(*) En général, $\lambda x+\mu y$, $\lambda' x+\mu' y$ ont même plus grand commun diviseur que x et y, si $\lambda\mu'-\lambda'\mu=\pm 1$. Dans le texte, nous appliquons cette remarque à $ax+b\beta$, $a\alpha+b\delta$.

Une seule d'entre elles peut être positive : Donc *pour que l'équation*

$$ax + by = r$$

soit possible en nombres entiers, il faut et il suffit que l'un des nombres $ar - bp_1$, *et* $br - ap_2$ *ne soit pas négatif, ou que leur produit ne soit pas positif.* D'ailleurs, les formules précédentes donnent les deux solutions pour lesquelles $x^2 + y^2$ a les plus petites valeurs possibles.

Exemple. Soit l'équation $35x + 24y = 201$. On a

$$a = 35, \quad b = 24, \quad r = 201;$$
$$\alpha = 16, \quad \beta = 11, \quad n = 4;$$

d'où l'on tire

$$t_1 = -92, \quad \rho_1 = 68, \quad x_1 = 3, \quad y_1 = 4.$$

Note. Voir J. M. S., 1886, pp. 20-22, une autre note de M. Lucas.

SUR LA RÉVERSIBILITÉ DE LA TRANSFORMATION LINÉAIRE;

par M. Cl. Servais, répétiteur à l'Université de Gand.

(Voir *Mathesis*, t. IX, p. 267.)

Outre les hypothèses que nous avons examinées, concernant les points doubles, on pourrait en imaginer d'autres faciles à écarter. Mais l'examen des différents cas ferait perdre à notre démonstration sa simplicité; c'est pourquoi nous proposons la suivante.

Si P et P' sont deux points correspondants, à la droite PP' correspond la droite P'P; à un point Q de PP' correspond doublement un point Q' de la même droite, et les couples de points QQ' déterminent une involution. Soient U et V les points doubles de cette involution. De même, à tout plan μ passant par PP', correspond doublement un plan μ' mené également par PP'; les couples de plans μ et μ' sont en involution; nous représenterons les plans doubles par σ et τ. Le plan σ est le support d'un système plan involutif; donc deux points homologues de σ sont alignés sur un point fixe S et séparés harmoniquement par S et une droite fixe s(*). La droite PP' passe nécessairement par S, car ses points se correspondent deux à deux dans le système σ; par conséquent S se confond, par exemple, avec U et s passe par V. De même, le plan τ est le support d'un système plan involutif, ayant un centre de perspective T et un axe de perspective t.

---

*) Voir *Mathesis*, t. VII, pp. 90-91.

tour dans le sens ABC, autour des sommets M, N, P, Q, on forme une *croix* composée de cinq carrés égaux à A'B'C'D'.

459. Construire la tangente commune à deux coniques qui ont un foyer commun F.

La projection de F sur une tangente commune se détermine par l'intersection des cercles principaux.

QUESTIONS PROPOSÉES.

691. Un disque elliptique se déplace en restant toujours tangent à une droite fixe OX en un point donné O. Quel est le lieu géométrique du centre de courbure de l'ellipse au point où la courbe est rencontrée par la normale fixe OY. (H. Brocard.)

692. Par un point P du plan d'un triangle passent deux hyperboles équilatères l'une circonscrite, l'autre conjuguée au triangle. Déterminer en coordonnées trilinéaires les équations de ces hyperboles et l'équation du cercle qui passe par les trois points d'intersection de ces deux hyperboles, autres que le point P. (E. Lucas.)

×**693.** Trouver dans le plan d'un triangle ABC deux directions telles que les droites AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 menées par les sommets parallèlement à ces directions rencontrent les côtés opposés en six points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 situés sur une même circonférence. (Gob.)

×**694.** Chercher le minimum de la bissectrice d'un des angles aigus d'un triangle rectangle dont la hauteur relative à l'hypoténuse est constante. (Cl. Thiry.)

Rectifications. Page 148, ligne 3, lire t. VII, au lieu de t. VI. Le théorème 1 de M. Denys, p. 162, est donné comme question proposée dans le *Bulletin scientifique* de M. Lebon, p. 146, n° 5. Page 175, ligne 2, lire $+(\sqrt{5}-2)^{2p+1}$, au lieu de $-(\sqrt{5}-2)^{2p+1}$; ligne 4, la valeur de x doit être rectifiée comme il suit :

$$x=\frac{1}{80}[9(9+4\sqrt{5})^{2p+1}+9(9-4\sqrt{5})^{2p+1}-82],$$

c'est-à-dire qu'il faut introduire deux fois le facteur 9 dans la parenthèse. Dans la figure de la page 166, lire a_1, a_2, au lieu de d_1, d_2.

III. *Si p est un nombre entier, non-divisible par* 7 :

$$1 + 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} + 2^{4p} + 2^{5p} + 2^{6p-1} = \mathcal{M}.\ 127;$$

etc.

Liège. — Août 1890.

VARIÉTÉS.

Sur les différents systèmes de numération.

« Aristote avait observé que le nombre 4 peut très bien remplacer le nombre 10, comme base de la numération. Weichel publia à ce sujet, en 1687, le plan d'une *Arithmétique tétractique*. Simon Stevin, de Bruges, mort en 1633, avait aussi imaginé le système de numération duodécimale, se rapprochant beaucoup plus de notre manière de compter les mois de l'année, les heures du jour, les degrés de la circonférence. Quant au système de la numération binaire, auquel nous avons consacré deux Chapitres dans nos *Récréations mathématiques*, il date de cinquante-quatre siècles; il fut retrouvé par Leibniz.

« On peut donc se demander si l'adoption d'une base autre que dix n'eût pas été préférable; en d'autres termes, si l'accident de notre espèce qui fait que nous avons dix doigts aux deux mains, s'accorde avec les conditions requises pour que le système de numération chiffrée soit le plus parfait possible. Ceci exige qu'on distingue la notation des nombres entiers et abstraits de celle des nombres concrets et fractionnaires. Sous le rapport de l'application du système de numération à celui des mesures, et à la subdivision de l'unité concrète, on est convenu, ainsi que Buffon l'a remarqué, que le nombre *douze*, à cause de ses quatre diviseurs deux, trois, quatre, six, eût été une base plus commode que le nombre dix, qui n'a que deux diviseurs, deux et cinq.

« D'autre part, Auguste Comte avait remarqué que la structure de la main, composée de quatre doigts à trois phalanges, ou de douze phalanges, permet de représenter avec les deux pouces posés sur deux phalanges, tous les nombres jusqu'à treize fois douze; alors les phalanges de la main gauche représentent des unités simples, et celle de la main droite des *grosses*, ou unités de second ordre. Par suite, on pourrait ainsi compter sur ses phalanges dans le système duodécimal, plus facilement et plus loin que sur ses doigts, dans le système décimal. Mais, si l'on se reporte au *Calcul digital* ignoré de Comte, cette assertion est inexacte. Au moyen de ce calcul, professé dans les écoles, au temps de Charlemagne, on représentait avec les doigts des deux mains tous les nombres jusqu'à dix mille.

« Il serait plutôt permis de se demander si le choix d'une base inférieure à dix ne rendrait pas les calculs plus sûrs et plus rapides. En effet, B désignant la base du système de numération, il faut retenir de mémoire les $\frac{1}{2}(B-1)(B-2)$ valeurs différentes de la somme et du produit de deux nombres inégaux, et les $(B-1)$ valeurs des premiers carrés, des premiers cubes. Par conséquent, les premiers frais

de mémoire diminuent avec la base et les causes d'erreur seront moindres. Mais cet avantage est compensé par la nécessité d'employer plus de temps et de place pour écrire les nombres. »

Les lignes qui précèdent sont extraites d'une *Théorie des Nombres*, par M. Éd. Lucas. Le premier volume de cet important ouvrage paraîtra vers le 1er janvier 1891; en voici la table des matières :

Livre I. Nombres entiers.

Livre II. Nombres rationnels (Nombres fractionnaires. — Sommation des puissances numériques. — Nombres de Bernoulli. — Calcul symbolique. — Fonctions symétriques. — Déterminants.)

Livre III. Divisibilité arithmétique. Théorèmes de Fermat, Euler, Wilson, Clausen, Smith, Mansion, Césaro, etc.

Les savantes recherches de M. Éd. Lucas dans le domaine de l'Arithmétique supérieure nous sont un sur garant que sa *Théorie des nombres* sera lue avec intérêt et profit par les géomètres et les professeurs. (P. M. et J. N.)

×BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Trigonométrie rectiligne, par E. Dessenon, *professeur au lycée Saint-Louis*. Paris, Nony, 1891 (282 pages, in 8°). Prix : 3 francs.

Sommaire : Chapitre préliminaire. Théorie des projections (pp. 1-17). Chapitre I. Arcs et angles (17-31). II. Lignes trigonométriques (31-55). III. Relations entre les lignes trigonométriques d'un angle quelconque (55-69). IV. Addition, soustraction, multiplication et division des arcs (69-99). V. Formules de transformation (99-122). VI. Tables trigonométriques (122-140). VII. Dérivées des fonctions circulaires (140-158). VIII. Équations et fonctions trigonométriques (158-201). IX. Résolution des triangles (cas élémentaires) (201-238). X. Applications et problèmes (238-269). — Note sur la formule de Moivre. — Des exercices bien choisis sont placés à la fin de chaque chapitre.

Le cours de M. Dessenon développe avec une grande clarté et dans un ordre méthodique, toutes les questions traitées habituellement dans les bons traités de trigonométrie.

Voici comment l'auteur fait connaître, dans l'Avertissement, le caractère distinctif de son livre. « Je me suis efforcé d'appliquer la théorie des projections toutes les fois que j'ai eu à démontrer une formule générale qui n'était pas la conséquence immédiate d'autres formules établies antérieurement. Le cosinus et le sinus sont définis, *les mesures des projections, sur des axes bien déterminés, de certains segments*. La théorie des projections est utilisée dès le début de la trigonométrie, et elle est la base des démonstrations des formules relatives aux triangles. Toutes les généralisations de formules, quelquefois si longues, si fastidieuses sont ainsi évitées. »

(J. N.)

Par un point P d'un axe principal de la conique, je mène les cordes *cd*, *ef* parallèles aux cordes CD, EF. Alors

$$\frac{PC \cdot PD}{PE \cdot PF} = \frac{pc \cdot pd}{pe \cdot pf}.$$

Si *cd* et *ef* sont symétriques par rapport à l'axe principal, on a $pc = pe$, $pd = pf$, d'où $PC \cdot PD = PE \cdot PF$; de sorte que les extrémités de deux cordes *antiparallèles* CD, EF appartiennent à une même circonférence. Réciproquement, si les points C, D, E, F appartiennent à une même circonférence, les cordes CD, EF sont antiparallèles; car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait mener par E une corde EF′ antiparallèle à CD, et la circonférence CDE passerait à la fois par F et F′.

16. *Généralisation de la question* 666 par M. Deprez. La démonstration indiquée dans *Mathesis*, t. X, p. 46, s'applique aisément à la proposition suivante:

Par un point fixe P *de l'axe focal d'une ellipse ou d'une hyperbole, on mène une sécante quelconque, rencontrant la courbe en* M *et* M′. *De ces points, on mène les tangentes* MT, M′T′ *à une circonférence ayant son centre sur l'axe focal et touchant la conique. Démontrer qu'il existe une constante r telle que le produit* $(MT + r)(M'T' + r)$ *a une valeur invariable, quelle que soit la sécante menée par* P.

17. *Note sur la question* 530 (*Mathesis*, t. VI, p. 262), par M. E. Lucas. Pour mettre l'expression

$$N = 24(1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5) + 1$$

sous la forme d'une somme de deux carrés, il suffit d'observer que

$$N = 2n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1) + 1$$
$$= [n^2 + (n+1)^2][(n^2 + n - 1)^2 + (n^2 + n)^2].$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 429.

(Voir *Mathesis*, t. V, p. 94.)

Si des parallèles menées par les sommets d'un tétraèdre ABCD *rencontrent les faces opposées aux points a, b, c, d, le volume du tétraèdre abcd est triple de celui de* ABCD. (Malet.)

Solution par M. Mosnat. Soient (x_1, y_1, z_1), ... les coordonnées

Ce rôle curieux des nombres figurés, dans le calcul intégral, n'avait peut-être pas encore été signalé Il donne lieu, du reste, à des généralisations remarquables.

Une question analogue de M. Realis se trouve proposée sous le n° 1427, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1882, p. 527 et résolue (*ibid.*), 1883, p. 378.

M. Verniory nous a envoyé une bonne solution de la question 283, que le défaut d'espace nous empêche d'insérer.

QUESTIONS D'EXAMEN.

464. Donnez les formules qui expriment la mesure du rectangle et celle du cercle, lorsque l'unité de surface est la surface du cercle qui a pour rayon l'unité de longueur. (Réponse : $\frac{bh}{\pi}$, R^2).

465. Donnez les formules qui expriment les mesures du parallélipipède, de la sphère et du cylindre, lorsque l'unité de volume est le volume du cylindre ayant pour diamètre et pour hauteur l'unité de longueur.

QUESTIONS PROPOSÉES.

699. Si n femmes sont placées dans un ordre déterminé autour d'une table ronde, de combien de manières leurs maris peuvent-ils se placer à cette table en satisfaisant aux conditions suivantes : un homme se trouve toujours entre deux femmes et n'est jamais à côté de la sienne. (*Permutations circulaires discontiguës*). (Éd. Lucas.)

***700.** Si x, y, z sont des nombres entiers, le nombre

$$N = xyz(x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz) + x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3$$

est décomposable en deux facteurs entiers, et, par suite, ne peut être premier. (E. Catalan.)

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'Ecole normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Membre de la Société royale des Sciences de Liège, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME I. — ANNÉE 1891.

(TOME XI DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1891

MATHESIS

SUR LES THÉORÈMES ÉNONCÉS PAR FERMAT, EULER, WILSON, STAUDT ET CLAUSEN;

par M. Ed Lucas, professeur au lycée St Louis.

Désignons par $a, b, c, \ldots$, des nombres premiers, inégaux deux à deux. et posons

$$A = a^{\alpha},\ B = b^{\beta},\ C = c^{\gamma}, \cdots$$
$$q = ABC \ldots,$$
$$\lambda = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$$

On sait par le *théorème de Fermat généralisé*, que, s'il y a $\varphi(q)$ nombres premiers et inférieurs à q, pour tout entier x premier à q, la différence

$$x^{\varphi(q)} - 1$$

est un multiple de q, et par conséquent de A. Pour étendre cette congruence à toutes les valeurs entières de x, il suffit de multiplier par x^{α} et *à fortiori*, par x^{λ}; donc l'expression

$$x^{\lambda}(x^{\varphi(q)} - 1)$$

est un multiple de A, B, C, ...; et puisque ces nombres sont premiers entre eux deux à deux, cette expression est divisible par q pour toutes les valeurs entières de x. On a ainsi un *énoncé, plus général, du théorème de Fermat généralisé par Euler*, qui conduit à des conséquences importantes.

Supposons, par exemple, que l'on veuille calculer les restes de la division de x^n par q, en supposant $n > q$. Posons

$$n - \lambda = h\varphi(q) + r, \tag{1}$$

r désignant un entier plus petit que $\varphi(q)$. D'ailleurs, on déduit de (1) l'identité algébrique

$$x^{n-\lambda} - 1 = (x^{\varphi(q)} - 1)Q(x) + x^r - 1,$$

et en multipliant les deux membres par x^{λ},

$$x^n = x^{\lambda}(x^{\varphi(q)} - 1)Q(x) + x^{r+\lambda},$$

donc pour toute valeur entière de x, les restes des puissances

$$x^n \quad \text{et} \quad x^{r+\lambda}.$$

par q sont égaux ; il en sera de même de leurs différences successives et en particulier des restes de la division par q, de

$$\Delta^{q-1}x^n \quad \text{et} \quad \Delta^{q-1}x^{r+\lambda}.$$

Nous allons faire voir que la différence

$$\delta = q - 1 - (r + \lambda)$$

est nulle ou positive ; remplaçons r par sa plus grande valeur $\varphi(q) - 1$, on a

$$\delta \geq q - \varphi(q) - \lambda.$$

Si q ne contient qu'un seul nombre premier a, alors

$$\varphi(a^\alpha) = a(a^{\alpha-1} - 1) \quad \text{et} \quad \delta \geq a^{\alpha-1} - \alpha.$$

1° Pour $\alpha = 1$, on a $\delta = 0$, et q est premier ;

2° Pour $\alpha = 2$, on a $\delta = 0$, si $a = 2$ et alors $q = 4$; mais δ est toujours positif pour $a > 2$, et $\alpha = 2$;

3° Pour $\alpha > 2$, on a toujours $\delta > 0$; il suffit de le vérifier pour la plus petite valeur 2 de a, en développant la puissance d'exposant $(\alpha - 1)$ du binôme $(1 + 1)$.

Considérons maintenant le cas général $q = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$; alors on a

$$\varphi(q) = a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}(a-1)(b-1)(c-1).$$

De l'identité

$$a^\alpha = a^{\alpha-1}(a-1) + a^{\alpha-1},$$

et des résultats précédents, on déduit

$$\begin{aligned} a^\alpha &\geq a^{\alpha-1}(a-1) + \alpha, \\ b^\beta &\geq b^{\beta-1}(b-1) + \beta, \\ c^\gamma &\geq c^{\gamma-1}(c-1) + \gamma, \end{aligned}$$

et en multipliant ces inégalités membre à membre,

$$q > \varphi(q) + \lambda,$$

puisque les coefficients de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, dans le produit des seconds membres, sont au moins égaux à l'unité.

Par conséquent, δ est toujours positif pour q composé > 4 ; et par suite, les restes de la division de

$$\Delta^{q-1}x^n \quad \text{ou de} \quad \Delta^{q-1}x^{r+\lambda}$$

par q sont nuls, puisque l'exposant $(r + \lambda)$ de x est inférieur à l'ordre

des différences. Il nous reste donc à étudier les cas de $q = 4$ et de q premier, que nous remplacerons alors par p.

Pour $q = 4$, les restes des puissances de x^n, pour des valeurs entières et consécutives de x, ainsi que ceux des différences sont données dans le tableau suivant, pour n impair :

Restes de	x^n :	0	1	0	3	0	1	0	3	0
»	Δx^n :	1	3	3	1	1	3	3	1	
»	$\Delta^2 x^n$:	2	0	2	0	2	0	2		
»	$\Delta^3 x^n$:	2	2	2	2	2	2			

par conséquent, les restes de $\Delta^3 x^n$ par 4 sont tous égaux à 2 pour n impair, et ceux des différences d'ordre supérieur sont nuls. On démontre de même que pour n pair, les restes de $\Delta^3 x^n$ sont tous égaux à 2 et ceux de $\Delta^3 x^n$ à 0. On déduit encore de ce tableau que les nombres Δx^n sont toujours impairs.

Enfin pour q premier et égal à p, on peut avoir $r < p - 2$ ou $r = p - 2$; dans le premier cas, n n'est pas un multiple de $(p - 1)$, alors δ n'est pas nul et par conséquent, comme pour q composé > 4, les restes de $\Delta^{p-1} x^n$ sont nuls. Mais si $r = p - 2$, on a $\delta = 0$ et par suite, il faut considérer l'expression

$$\Delta^{p-1} . x^{p-1} = 1 . 2 . 3 \ldots (p - 1);$$

donc cette différence est constante; mais par une autre formule bien connue, du calcul des différences, on a encore

$$\Delta^{p-1} 0^{p-1} = (p - 1)^{p-1} - C^1_{p-1} (p - 2)^{p-1} + \cdots - C^{p-2}_{p-1} . 1^{p-1} + 0^{p-1};$$

en remplaçant les puissances par 1, d'après le théorème de Fermat on voit donc que les restes de

$$\Delta^{p-1} . x^{p-1} \quad \text{et} \quad (1 - 1)^{p-1} - 1$$

par p sont égaux; par suite les restes de $\Delta^{p-1} x^{p-1}$ par p sont égaux à -1. En comparant ce résultat avec le précédent, on en déduit que tout nombre premier quelconque p divise $(p - 1)! + 1$; c'est précisément le *théorème de Wilson*.

En résumé, les résidus de $\Delta^{r-1} x^n$ par q sont constants et égaux à

-1, si q est un nombre premier tel que $(q - 1)$ divise n;
$+2$, si $q = 4$ et si n est impair;
0, dans tous les autres cas.

Théorème de Staudt et Clausen(*). Si l'on désigne, pour abréger, $\Delta^n 0^n$ par Δ_n, la formule d'interpolation de Newton donne l'identité

$$x^n = x\Delta_1 + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta_2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta_3 + \cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}\Delta_n.$$

Désignons par S_n la somme des puissances d'exposant n des $(x-1)$ premiers nombres; remplaçons successivement x par $1, 2, 3, \ldots (x-1)$ dans la formule précédente. En ajoutant les égalités obtenues, par le procédé de Fermat, on trouve

$$S_n = \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta_1 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta_2 + \cdots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots(n+1)}\Delta_n.$$

Si l'on désigne par B_n le coefficient de x dans le développement de S_n, on a

$$B_n = -\frac{\Delta_1}{2} + \frac{\Delta_2}{3} - \frac{\Delta_3}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{\Delta_n}{n}.$$

Telle est l'expression des *nombres de Bernoulli* en fonction des différences de 0^n. Mais, d'après les résultats précédents, les fractions qui ne se réduisent pas à des nombres entiers sont toutes celles dont le dénominateur q est un nombre premier tel que $q-1$ divise n ou $q=4$ pour n impair; mais à l'exception de B_1, les nombres d'indice impair sont tous nuls; donc n est pair et la fraction de dénominateur 4 se réduit à un nombre entier; les autres fractions pour q premier, satisfaisant à la condition énoncée se réduisent à un entier d iminué de 1. Donc, *on a pour les nombres de Bernoulli l'expression*

$$B_n = A_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \cdots - \frac{1}{l},$$

dans laquelle A_n *désigne un nombre entier* et $2, b, c, \ldots, l$, *tous les nombres premiers qui surpassent de* 1 *tous les diviseurs de* n.

Paris, 10 janvier 1890.

(*) Voir *Mathesis*, t. III, p. 25.

462. Résoudre le système

$$\frac{a^2}{5y}+\frac{4}{20x}=\frac{a}{xy},\quad 3ax-a=\frac{2y^2-2y}{y-1}.$$

(École des Beaux-Arts, Paris, 1890.)

Solutions

$$y=1,\quad x=\frac{5a-1}{a^2};\quad x=\frac{11}{2a+3},\quad y=\frac{v(15-a)}{2a+3},$$

QUESTIONS PROPOSÉES(*).

17. (Voir *Mathesis*, (1) I, p. 30). Si A, B, C sont des quantités positives, a, b, c des quantités réelles, les trois racines de l'équation

$$(x-a)(x-b)(x-c)-A(x-a)-B(x-b)-C(x-c)=0$$

sont réelles. Calculer le discriminant de cette équation et le mettre sous une forme telle qu'on reconnaisse qu'il est toujours négatif.

95. (Voir *Mathesis*, (1) I, p. 206). Trouver l'équation des lignes de courbure d'une surface du second degré ayant pour équation

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gxz+2hxy+2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta=0.$$

252. (Voir *Mathesis*, (1) III, p. 143). I. Si q, r, s sont des entiers plus grands que 2 et p un entier quelconque, démontrer que les nombres de Bernoulli déterminés par la relation symbolique

$$(B+1)^q-B^q=0$$

vérifient la relation

$$B^p(B+1)^q(B+2)^r(B+3)^s=B^s(B-1)^r(B-2)^q(B-3)^p.$$

II. Démontrer, sans se servir des séries, la relation symbolique

$$(2B+1)^p+2^pB_p-2B_p=0. \qquad \text{(Éd. Lucas.)}$$

267. (Voir *Mathesis*, (1) III, p. 192). On a

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots=$$

$$1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^4}{[(1-q)(1-q^2)]^2}+\frac{q^9}{[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)]^3}+\cdots.$$

(E. Catalan.)

(*) Nous réimprimons ici, en tête de la deuxième série de *Mathesis*, toutes les questions de la première série dont nous n'avons pas encore reçu de solution complète.

Question 692.

(Voir *Mathesis*, t. X, p. 216.)

Par un point P *du plan d'un triangle* ABC *passent deux hyperboles équilatères, l'une circonscrite, l'autre conjuguée au triangle. Déterminer en coordonnées trilinéaires les équations de ces hyperboles et l'équation du cercle qui passe par les points d'intersection de ces courbes, autres que le point* P. (E. Lucas.)

Solution par M. Kluyver (Breda). Soient α, β, γ les coordonnées normales de P par rapport au triangle de référence ABC.

L'hyperbole circonscrite, passant par l'orthocentre (séc A, séc B, séc C) a pour équation

$$H_1 \equiv \begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = 0.$$

L'hyperbole conjuguée passant par le centre du cercle inscrit, son équation est

$$H_2 \equiv \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient L, M, N les points de rencontre de ces courbes autres que P; le dernier point est l'orthocentre du triangle LMN. L'équation du cercle des neuf points de LMN s'obtient en cherchant le lieu des centres des hyperboles équilatères passant par L, M, N, P. Ces courbes étant représentées par l'équation

$$\lambda H_1 + H_2 = 0,$$

on trouve pour l'équation du cercle

$$K \equiv \begin{vmatrix} x(\beta^2 - \gamma^2) & y(\gamma^2 - \alpha^2) & z(\alpha^2 - \beta^2) \\ \beta\gamma' z + \gamma\gamma' y & \gamma\gamma' x + \alpha\alpha' z & \alpha\alpha' y + \beta\beta' x \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix} = 0,$$

après avoir posé

$$\alpha' = \beta\cos B - \gamma\cos C, \quad \beta' = \gamma\cos C - \alpha\cos A, \quad \gamma' = \alpha\cos A - \beta\cos B.$$

Or, le cercle LMN et le cercle K sont deux figures homothétiques, le centre d'homothétie étant P et le rapport de similitude étant égal à 2.

Entre les coordonnées absolues (X, Y, Z), (x, y, z) de deux points homologues et celles de P, on a donc les relations

$$x = \frac{X + \alpha}{2}, \quad y = \frac{Y + \beta}{2}, \quad z = \frac{Z + \gamma}{2}.$$

Pour l'homogénéité, nous écrivons

$$\frac{x}{X\partial + \alpha D} = \frac{y}{Y\partial + \beta D} = \frac{z}{Z\partial + \gamma D},$$

où

$$D \equiv X \sin A + Y \sin B + Z \sin C, \quad \partial \equiv \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C.$$

Remplaçons dans l'équation $K = 0$ les coordonnées x, y, z par les quantités $X\partial + \alpha D$, ... qui leur sont proportionnelles, etc.

QUESTIONS D'EXAMEN.

475. Résoudre

$$1 + \frac{2x}{x + 4a} + \frac{27a^2}{2x^2 + 7ax - 4a^2} = \frac{6a}{2x - a}.$$

Le dénominateur commun est $2x^2 + 7ax - 4a^2$. On trouve

$$6x^2 - ax - a^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{a}{3}, \quad x = \frac{a}{2}.$$

La racine $x = \frac{a}{2}$ qui annule le dénominateur commun a besoin d'être vérifiée. — A cet effet, on écrit

$$1 + \frac{2x}{x + 4a} = \frac{1}{2x - a}\left(6a - \frac{27a^2}{x + 4a}\right) = \frac{3a(2x - a)}{(2x - a)(x + 4a)}.$$

En divisant les deux termes de la fraction du second membre par $2x - a$, on peut dire que $x = \frac{1}{2}a$ est une solution étrangère. (*Journal de Vuibert.*)

476. On a

$$(a - b)^2 (b - c)^2 + (b - c)^2 (c - a)^2 + (c - a)^2 (a - b)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)^2.$$

477. Étant donnée l'équation

$$x^2 - 2mx - (1 - m^2) = 0,$$

ˣNOTES MATHÉMATIQUES.

10. *Sur les formules de la Trigonométrie sphérique* (d'après M. Ed. Lucas). Pour l'établissement des formules générales de la géométrie analytique à trois dimensions et de la trigonométrie sphérique, il est préférable de prendre pour angles d'un triangle sphérique ABC, les suppléments des angles intérieurs. Soient donc a, b, c les côtés et A, B, C les angles *extérieurs* du triangle ABC. On a, moyennant cette convention,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad \cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} A} + \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(B-C)} = 0, \quad \frac{\cos \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} A} + \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)} = 0. \quad \text{(Delambre.)}$$

Si l'on pose

$$2p = a + b + c, \quad 2P = A + B + C,$$

la formule de Lhuillier s'écrit

$$\cot^2 \tfrac{1}{2} P = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-a) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-c),$$

et donne par la considération du triangle A'BC (A' est l'antipode de A)

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(P - A) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-c)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} p \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-a)}.$$

On peut permuter les lettres minuscules et les lettres majuscules et écrire par exemple

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}(p-a) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(P-B) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(P-C)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} P \operatorname{tang} \frac{1}{2}(P-A)}.$$

De là

$$\cot \tfrac{1}{2} p \cot \tfrac{1}{2} P = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-a) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P-A) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P-B) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-c) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(P-C)$$

11. *Problème de l'héritage. — Sixième solution.* Finck, dans son *Système d'Algèbre élémentaire*, Strasbourg 1839, page 560, donne la solution suivante, qu'il attribue à Euler, et qui diffère peu de la quatrième, de M. Catalan (p. 112) :

« On représentera, avec Euler, par x le bien total, par p_m la part du rang m, par s_{m-1} la somme des parts précédentes, et l'on aura

$$p_m = am + \frac{x - s_{m-1} - am}{n},$$

$$p_{m+1} = a(m+1) + \frac{x - s_{m-1} - p_m - a(m+1)}{n},$$

d'où

$$p_{m+1} - p_m = a - \frac{p_m + a}{n},$$

et

$$p_{m+1} = p_m \cdot \frac{n-1}{n} + a \cdot \frac{n-1}{n}. \qquad (1)$$

Cette relation prouve qu'il est permis de faire $p_{m+1} = p_m$, c'est-à-dire de supposer les parts égales : car cette hypothèse introduite dans (1) donne $p_m = a(n-1)$, quantité qui est en effet indépendante de m. »

« Je ferai observer, ajoute Finck, que cette solution n'a pas toute la généralité possible, si on ne suppose pas $p_m = p_{m+1}$. En effet, l'équation (1) est une équation aux différences finies, dont l'intégrale est

$$p_m = a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^m,$$

C étant arbitraire.

Les parts sont donc

$$p_1 = a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

$$p_2 = a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^2, \text{ etc.}$$

Pour avoir x, on se sert de l'équation $p_1 = a + \frac{x-a}{n}$ qui donne

$$x = a(n-1)^2 + C(n-1).$$

Quant au nombre des parts, si on le nomme y, pour le trouver, on fera la somme des parts

$$a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

$$a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

. . . . . .

$$a(n-1) + C\left(\frac{n-1}{n}\right)^y.$$

Cette somme devant être égale à x, on a

$$a(n-1)^2 + C(n-1) = ay(n-1) + (n-1)C\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^y\right],$$

ou

$$a(n-1) = ay - C\left(\frac{n-1}{n}\right)^y.$$

Voilà donc une équation entre C et y. On pourra donner à y telle valeur ***entière positive*** qu'on voudra, cette équation donnera C ».

SUR LES QUADRANGLES COMPLETS;

par M. J. Neuberg.

(Fin; voir *Mathesis*, (2) I, p. 33, 67, 81.)

10. Pour simplifier l'écriture, nous désignons maintenant par X, Y, Z les milieux des côtés BC, CA, AB du triangle ABC; par X', Y', Z' les milieux des côtés opposés AD, BD, CD du quadrangle (fig. 1).

D'après un théorème connu, le lieu des centres des coniques passant par A, B, C, D, est une conique ayant pour diamètres les droites XX', YY', ZZ' et passant par les intersections P, Q, R des côtés opposés du quadrangle. Ce lieu porte le nom de ***conique des neuf points*** du quadrangle ABCD.

Fig. 1.

Il existe une hyperbole équilatère circonscrite au quadrangle. Son centre E est à l'intersection des cercles des neuf points des triangles ABC, BCD, CDA, DAB.

On peut remarquer le théorème suivant qui résulte immédiatement de ce qui précède et d'où Steiner a déduit une foule de propriétés curieuses des coniques (*Œuvres complètes*, t. II, p 689; *J. de Crelle*, t. LXVI, p. 237):

Soient XX', YY', ZZ' *trois droites qui se divisent mutuellement en parties égales au point* G. *Les cercles* XYZ, XY'Z', X'YZ', X'Y'Z *passent par un même point* E; *les cercles* X'Y'Z', X'YZ, XY'Z, XYZ' *se coupent en un*

NÉCROLOGIE.

ÉDOUARD LUCAS.

Au moment de mettre sous presse le présent numéro, nous sommes surpris par une nouvelle douloureuse autant qu'inattendue. L'un des collaborateurs de *Mathesis* les plus zélés et les plus distingués, Édouard Lucas, vient de succomber à l'âge de 49 ans à une courte maladie.

Né à Amiens en 1842, Édouard Lucas avait été admis à la fois, en 1861, à l'École Polytechnique et à l'École Normale. Il opta pour cette dernière, fut quelque temps astronome-adjoint à l'Observatoire de Paris et servit brillamment en 1870, pendant la guerre franco-allemande, comme officier auxiliaire d'artillerie. Depuis lors, sa vie entière a été consacrée à l'enseignement et à la science. Il était en dernier lieu professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée St-Louis, à Paris.

Ses publications scientifiques sont innombrables et se trouvent répandues dans les principaux recueils mathématiques de l'Europe et des États-Unis. Les lecteurs de *Mathesis* ont pu maintes fois admirer la portée et la profondeur de cet esprit éminent, chez lequel la faculté d'invention était alliée à une grande érudition.

Les travaux d'Édouard Lucas ont porté sur presque toutes les branches des Mathématiques; mais ils ont eu pour principal objet l'Arithmétique supérieure. La mort le frappe au moment où il laisse une œuvre inachevée : il venait de publier un premier volume de sa *Théorie des nombres;* espérons que les notes laissées par lui permettront de reconstituer la suite de ce bel ouvrage.

La mort d'Édouard Lucas, on peut le dire sans aucune exagération, est une grande perte pour la science mathématique. Mais à côté du savant, il y avait en lui l'ami dévoué, le père de famille admirable.

Puissent les regrets que nous exprimons ici en notre nom et au nom de tous nos lecteurs, adoucir la douleur de ses nombreux amis et la désolation de ses enfants.

P. Mansion et J. Neuberg.

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME II. — ANNÉE 1892.

(TOME XII DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1892

conférence donnée comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons un arc de cercle DBB'D' coupant la première circonférence en B et B'. Des points B, B' comme centres, avec le rayon BA = B'A, décrivons deux arcs de cercle se coupant au point A' symétrique de A par rapport à la corde BB'. Du centre A' et avec le rayon A'A, décrivons un arc de cercle DAD' coupant DBB'D' en D et D'. Les arcs de cercle décrits des centres D, D' avec le rayon DA se coupent en un point O, qui est le centre du cercle donné.

En effet, soient C, E les milieux des droites BB', DD' et R le rayon du cercle donné. On trouve facilement

$$\overline{AD}^2 = AE.2AA', \quad \overline{AB}^2 = AC.2R;$$

d'où, à cause de AD = AB,

$$AE.2AA' = AC.2R.$$

Comme $AC = \frac{1}{2}AA'$, on a nécessairement $AE = \frac{1}{2}R$; or $AE = \frac{1}{2}AO$, donc AO = R.

NOTES MATHÉMATIQUES.

7. ***Sur la question 519*** (Voir p. 47). La courbe représentée, en coordonnées cartésiennes orthogonales, par l'équation $y = f(x)$, rencontre, ***mais ne touche pas***, la bissectrice de xOy, en un point A dont l'abscisse est a : cela résulte des hypothèses faites sur la première équation. En vertu des hypothèses relatives à la seconde équation, la courbe $x = f(y)$ rencontre ***et touche***, en A, la première courbe. Les deux lignes, symétriques par rapport à OA, ne peuvent se toucher sur cette droite (leur normale commune) qu'***en s'y croisant***, à moins qu'elles ne coïncident sur toute leur longueur. Leur contact est donc d'ordre pair, et, par suite, l'ordre de multiplicité de a est impair. (E. Cesáro).

8. ***Sur la somme des termes d'une progression arithmétique.*** — 1° Considérons un échiquier carré de n^2 cases.

Le long d'une diagonale, on rencontre n cases; on peut ensuite distinguer deux rangées parallèles à cette diagonale et comprenant chacune $n-1$ cases, puis deux autres comprenant $n-2$ cases, et ainsi de suite. Cette figure montre que

$$n^2 = n + 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 2.2 + 2.1,$$

d'où

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

La somme des termes de la progression

$$a,\quad a+\delta,\quad a+2\delta,\quad \ldots,\quad a+\overline{n-1}\delta$$

se ramène à la précédente; car elle est égale à

$$na+\delta(1+2+\cdots+\overline{n-1})=na+\delta\frac{(n-1)n}{2}.$$

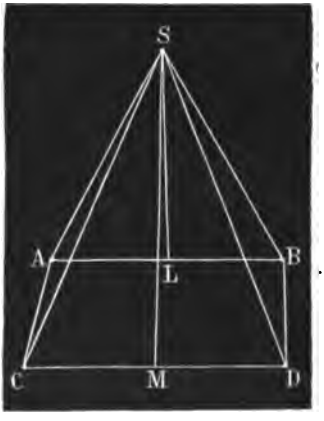
La figure de l'échiquier montre aussi que le carré n^2 est égal à la somme des deux nombres triangulaires T_{n-1}, T_n. (Léon Collette.)

2° Considérons sur l'échiquier la p^e case de la diagonale et les deux rangées parallèles aux bords de l'échiquier, comprises entre la diagonale et un bord. Chacune de ces rangées comprenant $p-1$ cases, nous aurons, avec la case de la diagonale, $2(p-1)+1=2p-1$ cases.

Par ce moyen, on réalise les nombres impairs 1, 3, 5, ..., $2n+1$. On en conclut que la somme des n premiers nombres impairs égale n^2.

(D'après Éd. Lucas.)

*9. ***Un piège mathématique.*** Voici une démonstration fallacieuse de la proposition absurde : ***un angle obtus est égal à un angle droit.*** Elle nous a été communiquée par un de nos lecteurs (*).



Soit ABDC un quadrilatère ayant un angle droit B, un angle obtus A et deux côtés opposés égaux AC et BD. Élevons au milieu L de AB, la perpendiculaire LS, au milieu M de CD, la perpendiculaire MS, et joignons leur point d'intersection S aux sommets A, B, C, D.

(*) Cette curieuse démonstration se trouve aussi dans l'ouvrage intitulé : ***Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times*** by W. W. Rouse Ball, Fellow and Lecturer of Trinity College, Cambridge. Second Edition London : Mac Millan and C° and New-York. 1892 (XII-241 p. in 8°), p. 32-33.

On y trouve aussi, pp. 33-34, une démonstration tout aussi captieuse de la proposition suivante : ***Tout triangle est isoscèle !*** Nous la ferons connaître ultérieurement.

531. Les projections d'une droite font avec la ligne de terre les angles α, β; calculer l'angle de cette droite avec la ligne de terre.

(*Baccalauréat*, Caen, 1891.)

Si la droite rencontre la ligne de terre en B et que les projections d'un point M de la droite sur les plans de projections et sur la ligne de terre soient m, m', m'', on a $mm'' = m''\mathrm{B}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $m'm'' = m''\mathrm{B}\,\mathrm{tg}\,\beta$, $\overline{\mathrm{M}m''}^2 = \overline{mm''}^2 + \overline{m'm''}^2$, $\mathrm{M}m'' = m''\mathrm{B}\,\mathrm{tg}\,x$, etc.

532. Discuter les racines de l'équation

$$\mathrm{F}(x) \equiv (a^2 - a - 2)\,x^2 + 2(a-1)\,x + 2 = 0.$$

Comment faut-il prendre a pour que cette équation ait une racine et une seule comprise entre -1 et $+1$.

1° Racines réelles, si a est compris entre $-\sqrt{5}$ et $+\sqrt{5}$; 2° Racines réelles de même signe si $a^2 - a - 2 > 0$ ou a compris, soit entre 2 et $\sqrt{5}$, soit entre $-\sqrt{5}$ et -1; 3° Une seule racine est comprise entre -1 et $+1$ si le premier membre de l'équation proposée prend des signes différents pour $x=1$ et $x=-1$. Or F(1) est négatif pour a compris entre 1 et -2; F(-1) est négatif pour a compris entre 1 et 2; donc F(1) et F(-1) ont des signes contraires pour a compris entre -2 et $+2$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***775.** Mettre le nombre $x^{10} - 5^4 y^{10}$, où x et y sont des nombres entiers positifs, sous la forme d'un produit de trois facteurs rationnels.

(Éd. Lucas.)

776. Les parallèles menées par un point de l'ellipse de Steiner aux médianes du triangle, rencontrent les côtés opposés sur une droite. Étudier l'enveloppe de cette droite, lorsque le point se déplace sur l'ellipse. (E. Cesáro.)

777. Soient M, N deux points correspondants d'une ellipse et du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. Le rayon OM de l'ellipse rencontrant en P la tangente menée en N au cercle, on demande l'aire de la courbe engendrée par le point P. (Mandart.)

778. Soient M, N deux points complémentaires par rapport au triangle ABC; U, V leurs triangles podaires. Trouver les lieux décrits par ces points lorsqu'on donne une relation de la forme $m\mathrm{U} + n\mathrm{V} = p$. Ces lieux peuvent-ils être des droites? (Déprez.)

---

centre des moyennes harmoniques, relatif au diamètre AC, des points où chacune de ces paraboles rencontre une courbe géométrique donnée, est un point fixe. (Cl. Servais.)

*783. De combien de manières un pion du jeu de dames, placé en un coin du damier, peut il se rendre sur le bord opposé en progressant par cases consécutives parallèlement à l'une ou l'autre diagonale ?

Suivant que le damier a $2n$ ou $2n+1$ cases de côté, le nombre cherché est égal à $C_{2n-1,n-1}$ ou $C_{2n,n}$. (Éd. Lucas.)

784. Trouver

$$\int \frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\dots\sin(x-a_m)}{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\dots\sin(x-b_n)}\,dx.$$ (J. Neuberg.)

785. Soient H_a, H_b, H_c les pieds des hauteurs d'un triangle ABC; M_a, M_b, M_c les points de rencontre des droites AM, BM, CM avec BC, CA, AB. Les triangles AH_bH_c, H_aBH_c, H_aH_bC étant semblables à ABC, appelons M'_a, M'_b, M'_c respectivement l'homologue de M_a dans AH_cH_b, l'homologue de M_b dans H_aBH_c, l'homologue de M_c dans H_aH_bC. Trouver le lieu du point M tel que les droites $M_aM'_a$, $M_bM'_b$, $M_cM'_c$ concourent en un même point M'; trouver aussi le lieu du point M'. (E. Lemoine.)

*786. Les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrangle sphérique ABCD étant divisés aux points E, F, G, H de manière que

$$\frac{\sin AE}{\sin BE}=\frac{\sin CF}{\sin BF}=\frac{\sin CG}{\sin DG}=\frac{\sin AH}{\sin DH}=\lambda,$$

démontrer que les arcs de grand cercle EG, FH se coupent en un point I de l'arc joignant les milieux K, L des diagonales AC, BD. Si ces diagonales sont égales, on a $\sin KL : \sin LI = \lambda$. (J. Tate.)

*787. Les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC sont divisés aux points P, Q, R dans un même rapport $p:q$ et aux points P', Q', R' dans le rapport inverse. Démontrer que les cercles PQR, P'Q'R' ont pour axe radical la droite QR joignant le centre de gravité de ABC au point de Lemoine. (Tucker.)

Lorsque le rapport $p:q$ varie, l'axe radical des cercles ABC, PQR enveloppe une conique. (J. N.)

×**794.** Si $A+B+C+D=2n\pi$, démontrer la relation

$$\Sigma \cos^4 A - 2\Sigma \cos^2 A \cos^2 B + 4\Sigma \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C = 4\cos A \cos B \cos C \cos D\,(\Sigma \cos^2 A - 2). \quad \text{(Greenstreet).}$$

795. Si a est supérieur à (-1), on a

$$\int_0^1 \frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}\,dx = \text{log. nép. } 2. \quad \text{(E. Catalan.)}$$

×**796.** Résoudre le système

$$\begin{aligned} xy(x+y) &= ab(a+b),\\ yz(y+z) &= bc(b+c),\\ zx(z+x) &= ca(c+a). \end{aligned} \quad \text{(Laisant.)}$$

797. Si dans un polygone inscrit d'un nombre pair de côtés, le produit des côtés de rang pair est égal au produit des côtés de rang impair, on peut inscrire une couronne de cercles tangents, consécutifs et tangents au cercle circonscrit aux sommets du polygone, quel que soit le premier cercle (*). (Éd. Lucas.)

Rectifications.

P. 63 : ligne 6, au lieu de : O, lire o; ligne 8, 13, 18, au lieu de O_a, lire o_a; ligne 7, au lieu de : *homologue*, lire : *transformé continu en* A.

P. 82 : formule 22, au lieu de : 4R, lire 2R.

P. 85 : 2me formule 59, au lieu de : $\frac{aa_1r_a}{a}$, lire : $\frac{ar_1r_a}{a}$.

P. 89 : 1re formule 99, au lieu de : $\frac{R}{r}$, lire : $\frac{r}{R}$.

P. 90 : formule 109, au lieu de : R= lire : cos A=.

P. 91 : formule 110, la formule se reproduit, transformée soit en A, soit en B, soit en C; formules 112bis, parce que $4R-r_1-r_a=r_a-r$ et $r_1+r_a=s-r_a$, au lieu de : S^2 il faut mettre : $-S^2$ dans la seconde formule; formule 120, $-ab\cos C$ et 2S doivent être séparés par le signe = et non par −.

(*) Ce théorème nous a été transmis par M. Émile Lemoine, à qui le regretté Éd. Lucas l'avait communiqué en ces termes : « J'ai trouvé ces jours ci un théorème qui peut être considéré comme fort difficile si l'on ne prend droit le sentier qui y conduit; c'est du Poncelet circulaire. »

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand. Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liège, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME III. — ANNÉE 1893.

(TOME XIII DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1893

×Question 775.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 176.)

Mettre le nombre $x^{10} - 5^5y^{10}$, ***où*** x ***et*** y ***sont des nombres entiers positifs, sous la forme d'un produit de trois facteurs rationnels.*** (Éd. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. De l'identité

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$

on déduit

$$x^{10} - 5^5 = (x^2 - 5)(x^8 + 5x^6 + 25x^4 + 125x^2 + 625);$$

et, par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve aisément :

$$x^8 + 5x^6 + 25x^4 + 125x^2 + 625$$
$$= (x^4 + 5x^3 + 15x^2 + 25x + 25)(x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 25x + 25).$$

Il en résulte l'identité

$$x^{10} - 5^5y^{10} = (x^2 - 5y^2)(x^4 + 5x^3y + 15x^2y^2 + 25xy^3 + 25y^4)$$
$$(x^4 - 5x^3y + 15x^2y^2 - 25xy^3 + 25y^4).$$

×Question 776.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 176.)

Les parallèles menées par un point de l'ellipse de Steiner aux médianes du triangle, rencontrent les côtés opposés sur une droite. Étudier l'enveloppe de cette droite, lorsque le point se déplace sur l'ellipse. (E. Cesáro.)

Solution par A. Droz Farny. Considérons un triangle équilatéral inscrit dans une circonférence. Les parallèles aux médianes de ce triangle par un point quelconque P de la circonférence, coupent les côtés opposés en trois points situés sur la ligne de Simson du point P. L'enveloppe de cette droite est l'hypocycloïde de Steiner. Projetons la figure orthogonalement sur un plan, le triangle devient quelconque, la circonférence devient l'ellipse de Steiner et la courbe demandée est une quartique, projection orthogonale d'une hypocycloïde de Steiner.

M. Déprez a traité très élégamment la même question par le calcul et la généralise en ces termes : *Trouver le lieu d'un point* P *tel, que les parallèles menées par* P *à trois directions fixes rencontrent respectivement les côtés d'un triangle donné* ABC *en trois points d'une même droite et chercher l'enveloppe de cette droite.*

Le défaut d'espace nous empêche de reproduire les développements de M. Déprez, et nous renvoyons à *Mathesis*, (1) II, p. 106.

Si l'on fait la somme de ces valeurs, on obtient l'équation

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{ab(a+b)+v} + \frac{1}{bc(b+c)+v} + \frac{1}{ca(c+a)+v}, \qquad (2)$$

qui sert à déterminer v. Rendue entière, elle devient

$$2v^3 + v^2 \Sigma ab\,(a+b) - a^2b^2c^2\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) = 0.$$

On sait qu'elle admet la racine $v = abc$; on peut le vérifier en observant que

$$(a+b)\,(b+c)\,(c+a) = \Sigma ab\,(a+b) + 2abc.$$

Les deux autres valeurs de v sont racines de l'équation

$$2v^2 + v\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) + abc\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a) = 0.$$

Si l'on multiplie les égalités (1) membre à membre, on trouve

$$u^5 = \frac{[ab(a+b)+v]\,[bc(b+c)+v]\,[ca(c+a)+v]}{v^2}.$$

Le numérateur de la dernière fraction, eu égard à l'égalité (2), est égal à

$$\Sigma v\,[bc(b+c)+v]\,[ca(c+a)+v],$$

de sorte qu'on peut écrire

$$u^5 = \frac{v^2 + 2v\Sigma ab\,(a+b) + abc\Sigma a\,(a+b)\,(a+c)}{v}.$$

Ont résolu la même question MM. Brocard, Delville, Decamps.

Question CCCCXIV.

(N. C. M., t. IV, p. 303; Laisant IV, n° 153, p. 41.)

Trouver la relation qui existe entre la longueur d'une corde de l'ellipse, les rayons vecteurs(*) *des deux extrémités et les distances des deux foyers à cette corde. — En déduire que le produit des distances des deux foyers à une tangente à l'ellipse est constant.* (Éd. Lucas.)

Solution par M. Barisien. Soit M_1M_2 la corde de l'ellipse de longueur

---

(*) M. Barisien prend les demi-diamètres OM_1, OM_2; la relation qu'on demande est alors *déterminée*. La longueur de la corde M_1M_2 et les rayons vecteurs M_1F, M_1F', M_2F, M_2F' déterminent complètement le quadrilatère M_1M_2FF' et, par suite, chacune des distances de M_1M_2 à F ou à F'. (J. N.)

l. Désignons par r_1, r_2 les rayons vecteurs joignant le centre O aux points M_1, M_2, et par δ, δ_1 les distances des foyers F, F′ à la corde M_1M_2.

L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, si $y = mx + p$ est l'équation de la corde M_1M_2, et si (x_1, y_1) (x_2, y_2) sont les coordonnées des deux points M_1, M_2, on a

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 (1 + m^2).$$

Or, l'équation qui donne les abscisses de M_1 et M_2 est

$$x^2 (a^2m + b^2) + 2a^2mpx + a^2 (p^2 - b^2) = 0.$$

Par conséquent,

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2mp}{a^2m^2 + b^2}, \quad x_1x_2 = \frac{a^2(p^2 - b^2)}{a^2m^2 + b^2};$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{4a^2b^2 (a^2m^2 + b^2 - p^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}.$$

Donc

$$l^2 = \frac{4a^2b^2 (1 + m^2) (a^2m^2 + b^2 - p^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}. \qquad (1)$$

D'autre part,

$$\delta = \frac{p + mc}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad \delta_1 = \frac{p - mc}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Par conséquent, on a

$$\delta\delta_1 (1 + m^2) = p^2 - m^2c^2.$$

Cette relation peut s'écrire

$$a^2m^2 + b^2 - p^2 = (b^2 - \delta\delta_1) (1 + m^2). \qquad (2)$$

L'égalité (1) devient, en tenant compte de (2),

$$l = 2ab \left(\frac{1 + m^2}{a^2m^2 + b^2}\right) \sqrt{b^2 - \delta\delta_1}. \qquad (3)$$

Exprimons maintenant de deux façons différentes l'aire du triangle OM_1M_2.

Soient P la projection de O sur M_1M_2 et α l'angle M_1OM_2. On a

$$OP \times M_1M_2 = r_1r_2 \sin \alpha.$$

Mais

$$OP = \frac{p}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Donc

$$\frac{p^2 l^2}{1+m^2} = r_1^2 r_2^2 \sin^2 \alpha. \tag{4}$$

Or,

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \alpha. \tag{5}$$

En éliminant α entre (4) et (5), on trouve

$$\frac{4 p^2 l^2}{1+m^2} = 4 r_1^2 r_2^2 - (r_1^2 + r_2^2 - l^2)^2. \tag{6}$$

Pour avoir la relation entre l, r_1, r_2, δ et δ_1, remarquons que l'égalité (2) peut prendre la forme

$$\frac{a^2 m^2 + b^2}{1+m^2} - \frac{p^2}{1+m^2} = b^2 - \delta\delta_1. \tag{7}$$

Or les équations (3) et (6) donnent les valeurs de $\frac{a^2 m^2 + b^2}{1+m^2}$ et $\frac{p^2}{1+m^2}$, qui, portées dans (7), fournissent immédiatement la relation demandée :

$$8abl\sqrt{b^2 - \delta\delta_1} + (r_1^2 + r_2^2 - l^2)^2 - 4 r_1^2 r_2^2 = 4 l^2 (b^2 - \delta\delta_1). \tag{8}$$

Lorsque $l = 0$, c'est-à-dire lorsque la corde est tangente, on a aussi $r_1 = r_2$, et l'équation (8) est identiquement satisfaite.

La relation (3) montre que, dans ce cas, $\delta\delta_1 = b^2$. On retrouve ainsi une propriété connue.

Question DXXXVIII.

(N. C. M., VI, p. 142, 228 et 263; Laisant, IV, n° 282).

Démontrer que la surface de révolution, représentée par les équations

$$x = \cos u \cos 2v,$$
$$y = \cos u \sin 2v,$$
$$z = \sin u (\cos v - \cos u \sin v),$$

n'a qu'une seule face; c'est-à-dire qu'en cheminant sur cette surface, d'une manière continue, on peut, d'un point quelconque, aller à un autre point quelconque. (R. Hoppe).

Cette solution était connue d'avance. L'autre équation peut s'écrire

$$3\,d\theta = \frac{d\left(\frac{r'}{r}\right)}{1+\frac{r'^2}{r^2}},$$

laquelle étant intégrée donne

$$3(\theta + B) = \text{arc tang}\frac{r'}{r}, \quad \frac{r'}{r} = \text{tang } 3(\theta + B),$$

puis, par une seconde intégration,

$$r^3 = \frac{A}{\cos 3(\theta + B)},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

Cette équation représente des courbes semblables à l'inverse de la rosace à trois feuilles

$$r^2 = \cos 3\theta,$$

par rapport à l'origine. (P. M.)

Autres solutions par MM. H. Brocard et H. Lembourg.

×Question 797.

(Voir *Mathesis*, (2) II, p. 264.)

Si dans un polygone inscrit d'un nombre pair de côtés, le produit des côtés de rang pair est égal au produit des côtés de rang impair, on peut inscrire une couronne de cercles tangents, consécutifs et tangents au cercle circonscrit aux sommets du polygone, quel que soit le premier cercle.

(Ed. Lucas).

Solution par M. Sollertinsky. Soit $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ le polygone donné. Puisque l'égalité

$$\frac{A_1A_2 \cdot A_3A_4 \ldots A_{2n-1}A_{2n}}{A_2A_3 \cdot A_4A_5 \ldots A_{2n}A_1} = 1 \qquad (1)$$

ne change pas dans l'inversion, on pourrait simplifier la démonstration en prenant un point quelconque de la circonférence donnée O pour centre d'inversion. Mais voici une démonstration directe.

Soit O_1 le centre d'un cercle quelconque tangent en A_1 à O; on construit successivement les cercles O_2, O_3 ..., O_{2n} de manière que

chacun d'eux soit tangent au précédent et au cercle donné au sommet correspondant du polygone donné. Il nous reste à démontrer que le dernier cercle O_{2n} touche aussi le premier O_1.

Pour fixer les idées, nous supposerons que les cercles O, O_1 se touchent extérieurement. On sait que les points A_k, A_{k+1} sont alors les points de contact du cercle inscrit au triangle OO_kO_{k+1}. Par suite, R, R_k, R_{k+1} désignant les rayons des cercles,

$$\sin\frac{O}{2} = \sqrt{\frac{R_k \cdot R_{k+1}}{(R+R_k)(R+R_{k+1})}};$$

d'où

$$A_kA_{k+1} = 2R\sqrt{\frac{R_k \cdot R_{k+1}}{(R+R_k)(R+R_{k+1})}}.$$

On déduit donc, de la relation (1),

$$A_1A_{2n} = 2R\sqrt{\frac{R_1R_{2n}}{(R+R_1)(R+R_{2n})}};$$

d'où

$$\sin\frac{A_1OA_{2n}}{2} = \sqrt{\frac{R_1R_{2n}}{(R+R_1)(R+R_{2n})}}.$$

La supposition que le cercle inscrit au triangle O_1OO_{2n} touche les côtés OO_1, OO_{2n} aux points α_1, α_{2n} nous conduirait à l'égalité

$$R_1R_{2n} = O_1\alpha \cdot O_{2n}\alpha_{2n};$$

celle-ci est impossible, car les facteurs de l'un de ces produits sont d'une même quantité plus grands que ceux de l'autre. Les points α_1, α_{2n} coïncident donc avec A_1, A_{2n}, et, par suite, le cercle O_{2n} touche le cercle O_1.

La même question a été résolue par MM. Soons (Tirlemont), J. Wasteels (Hasselt) et Déprez (Mons).

×Question 807.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 32.)

On a

$$\frac{1+x}{1-x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}x^9 + \cdots + \frac{1+x^n}{1-x^n}x^{n^2} =$$

$$\frac{x}{1-x}(1+x^n) + \frac{x^2}{1-x^2}(1+x^{2n}) + \cdots + \frac{x^n}{1-x^n}(1+x^{n^2}).$$

(Baschwitz.)

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liége Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1895.

(TOME XV DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1895

Solution par M. Fauquembergue. Ecrivons que les discriminants de ces équations sont carrés parfaits :

$$A^2 + 4B = C^2, \quad A^2 - 4B = D^2;$$

d'où

$$B = \frac{C^2 - D^2}{8} \quad \text{et} \quad 2A^2 = C^2 + D^2$$

ou

$$A^2 = \left(\frac{C+D}{2}\right)^2 + \left(\frac{C-D}{2}\right)^2.$$

Cette dernière équation est vérifiée si l'on pose

$$A = \alpha^2 + \beta^2, \quad \frac{C+D}{2} = \alpha^2 - \beta^2, \quad \frac{C-D}{2} = 2\alpha\beta.$$

De là on déduit

$$\frac{C^2 - D^2}{8} = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2).$$

Par suite les valeurs générales de A et B sont

$$A = \alpha^2 + \beta^2, \quad B = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2),$$

α et β étant des nombres entiers quelconques. Celles de x sont respectivement

$$-\beta(\alpha+\beta), \quad -\alpha(\alpha-\beta) \quad \text{et} \quad \beta(\alpha-\beta), \quad -\alpha(\alpha+\beta).$$

Solution analogue par MM. Boutin, Brocard, Droz-Farny, François, Jonesco, Strymbersch, Cristescu et Vanderstegen. M. Droz Farny trouve les formules

$$A = (\alpha^2 + \beta^2)t, \quad B = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)t^2,$$

où t, α, β sont les nombres entiers quelconques.

Question CCCXII.

(Voir N. C. M., t. III, p. 433).

Démontrer que si $8q + 7$ *est premier*, $2^{4q+3} - 1$ *ne l'est pas*. (E. Lucas).

Solution par M. M. Fauquembergue. Soit $4q + 3 = p$. Le nombre p peut être supposé premier, sans quoi $2^p - 1$ ne serait évidemment pas premier.

D'après le théorème de Fermat, $2p + 1$ étant premier, on a la congruence

$$2^{2p} - 1 \equiv 0 \text{ [Mod. } (2p+1)], \quad \text{ou} \quad (2^p+1)(2^p-1) \equiv 0 \text{ [Mod. } (2p+1)].$$

Par suite, l'un des facteurs $2^p + 1$ ou $2^p - 1$ est divisible par $(2p + 1)$. Or, on sait que chaque racine de la congruence $x^{\frac{1}{2}(P-1)} - 1 \equiv 0 \,(\text{Mod.}P)$, P étant premier, est un résidu quadratique et que chaque racine de la congruence $x^{\frac{1}{2}(P-1)} + 1 \equiv 0 \,(\text{Mod. } P)$ est un non-résidu quadratique. On sait aussi que $+2$ est résidu quadratique de tout nombre premier de l'une des formes $8k + 1$, $8k + 7$. Donc c'est le facteur $2^p - 1$, c'est-à-dire $2^{4q+3} - 1$, qui est divisible par $2p + 1$ ou $8q + 7$. C. Q. F. D.

Parthenay, 11 janvier 1895.

QUESTIONS D'EXAMEN.

886. Les côtés AE, BC d'un pentagone régulier ABCDE se rencontrent en F. La figure tournant autour de DF, les droites FB, CD engendrent la même surface

$$\frac{1}{4}\pi a^2 (\sqrt{5} + 1),$$

et les triangles FAB, DCE engendrent le même volume

$$\frac{1}{24}\pi a^3 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}};$$

a désigne la longueur du côté AB. (Watson.)

887. Résoudre le système d'équations :

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x + y\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = r\sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}}.$$

(*Bulletin scientifique* de Lebon.)

Poser $x = yz^3$, ce qui ramène les équations à

$$y^2(z^6 + 1) = a^2,$$

$$yz(z^3 + 1) = r\sqrt{1 + z^3}, \text{ ou } y^2z^2(z^3 + 1) = r^2;$$

en éliminant y on trouve après suppression d'un facteur $z^3 + 1$ une équation bicarrée :

$$r^2z^4 - (a^2 + r^2)z^2 + r^2 = 0.$$

888. Par un point M on mène des parallèles P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2 aux côtés BC, CA, AB d'un triangle ; ces droites rencontrent les deux autres côtés respectivement en P_1 et P_2, Q_1 et Q_2, R_1 et R_2. Trouver le lieu du point M lorsque la somme

$$MP_1 \cdot MP_2 + MQ_1 \cdot MQ_2 + MR_1 \cdot MR_2$$

Question CCCXIII.

(Voir N. C. M., t. III, p. 433).

Pour quelles valeurs de n la somme des boulets des n premières piles, à base carrée, est-elle un carré parfait? (E. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. Le nombre des boulets contenus dans une pile à base carrée et ayant K boulets de côté, est donné par la formule

$$\frac{K(K+1)(2K+1)}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{K^3}{3}+\frac{K^2}{2}+\frac{K}{6}.$$

Donc la somme S des boulets des n premières piles est égale à

$$\frac{S_3}{3}+\frac{S_2}{2}+\frac{S_1}{6},$$

S_m désignant la somme des puissances m des n premiers nombres entiers.

Or,

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2}, \quad S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S_3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Il en résulte

$$S=\frac{n(n+2)(n+1)^2}{12}.$$

Pour que cette expression soit un carré parfait, il faut et il suffit que le produit $n(n+2)$ soit le triple d'un carré. Posons donc

$$n(n+2)=3p^2, \quad \text{d'où} \quad (n+1)^2-3p^2=1.$$

Les solutions entières de cette équation sont toutes données par les deux termes des réduites de rang pair dans le développement de $\sqrt{3}$ en fraction continue, ou encore par les formules

$$n+1=\frac{(2+\sqrt{3})^m+(2-\sqrt{3})^m}{2}, \quad p=\frac{(2+\sqrt{3})^m-(2-\sqrt{3})^m}{2\sqrt{3}},$$

m étant un nombre entier quelconque.

On trouve ainsi

$$n=1, \quad 6, \quad 25, \quad 96, \quad 361, \quad \ldots, \quad \text{etc.}$$

Ces valeurs de n forment une suite récurrente dont l'échelle de relation est

$$u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} + 2.$$

Ajoutons que ces valeurs sont alternativement des carrés impairs et des sextuples de carrés pairs, comme cela pouvait être prévu d'après l'équation $n(n+2) = 3p^2$.

Parthenay, 11 janvier 1895.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

693. Trois quelconques des quatre hauteurs d'un tétraèdre peuvent-elles être parallèles à un même plan?

694. Les deux bissectrices de l'angle A et les deux bissectrices de l'angle B d'un triangle ABC sont tangentes à une parabole qui a pour foyer le point C et pour directrice le côté AB; son équation est

$$x^2 + y^2 - z^2 \sin^2 C + 2xy \cos C = 0. \quad \text{(E. Lemoine.)}$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1027.** Construire un triangle ABC, connaissant deux côtés AB, AC et sachant que l'angle $C = 2B$ ou $C = 3B$.

1028. Par un point P donné dans le plan d'une ellipse on mène deux cordes orthogonales AB et CD.

1° L'axe radical des cercles décrits sur AB et CD comme diamètres passe par un point fixe.

2° Le pied de l'axe radical décrit une circonférence. (Déprez.)

×**1029.** Soient O le centre et AB une corde quelconque d'une ellipse donnée. Trouver le maximum de l'aire du triangle OAB. 1° lorsque la droite AB se déplace parallèlement à elle même; 2° lorsqu'elle pivote autour d'un point fixe. (Cristescu.)

1030. Les plans osculateurs à une quartique gauche en ses points d'intersection avec un plan quelconque rencontrent de nouveau la quartique en quatre points situés dans un même plan. (A. Cazamian.)

Rectification. La note au bas de la page 105 doit être complétée ainsi :

Elle contient également beaucoup de résultats propres à l'auteur (J. N.)

Les deux paraboles du faisceau ont donc pour équations

$$f(x,y)\equiv c^2\left(\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\right)^2\pm 2ab\left(\frac{\beta x}{a^2}-\frac{\alpha y}{b^2}\right)-c^2=0.$$

On en déduit

$$f'_x=\frac{2c^2}{a}\left(\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\right)\pm\frac{2b\beta}{a},\quad f'_y=\pm\frac{2c^2}{b}\left(\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\right)\mp\frac{2a\alpha}{b},$$

d'où l'on tire pour équation de l'axe :

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=\frac{a^3\alpha\mp b^3\beta}{c^2d^2},\quad (d^2=a^2+b^2).$$

Les axes des deux paraboles se coupent au point

$$\frac{x}{a}=\frac{a^3\alpha}{c^2d^2},\quad \frac{y}{b}=-\frac{b^3\beta}{c^2d^2};$$

si ce point décrit l'ellipse donnée, le point (α, β) se meut sur l'ellipse

$$a^6\alpha^2+b^6\beta^2-c^4d^4=0.$$

Question CCXIII.

(Voir N. C. M., p. 403, t. II, 1876.)

La somme $-1^4+3^4-5^4+7^4-\cdots+(4x-1)^4$ *n'est ni un carré, ni le double d'un carré, ni le triple d'un carré.* (E. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. La différence des deux derniers termes est égale à

$$[(4x-1)^2-(4x-3)^2]\,[(4x-1)^2+(4x-3)^2],$$

ou à

$$16(2x-1)\,[4(2x-1)^2+1]=64(2x-1)^3+16(2x-1).$$

Par conséquent la suite proposée est égale à 64 fois la somme des cubes des x premiers nombres impairs, augmentée de 16 fois la somme de ces mêmes nombres, c'est-à-dire à

$$64x^2(2x^2-1)+16x^2$$

ou encore

$$16x^2(8x^2-3).$$

Or, le nombre impair $8x^2-3$ ne peut évidemment pas être le double d'un carré. Il n'est pas non plus un carré, puisque le carré de tout nombre impair est un multiple de 8 plus 1.

Si $8x^2 - 3$ était le triple d'un carré, x serait multiple de 3, soit $x = 3y$, et le nombre $24y^2 - 1$ devrait être carré; ce qui est impossible pour la même raison que dans le cas précédent.

Donc le théorème est démontré.

QUESTIONS D'EXAMEN.

694. Soient a, b les bases et S la surface d'un trapèze ABCD. On joint le milieu de chaque côté latéral aux sommets du côté opposé; les quatre droites ainsi menées déterminent un quadrilatère dont l'aire S' est donnée par la formule

$$S' = S\,\frac{(a+b)^2}{(a+3b)(b+3a)}.$$

Le quadrilatère déterminé par les quatre droites qui joignent le milieu d'une base aux extrémités de l'autre base a pour aire $\dfrac{abh}{2(a+b)}$.

695. Si, dans un triangle ABC, m_a, m_b, m_c désignent les longueurs des bissectrices et l_a, l_b, l_c celles des trois symédianes, on a :

$$\Sigma\,\frac{l_a^2(4m_a^2+m_b^2+m_c^2)^2}{m_a^2} = 36\,\Sigma m_b^2 m_c^2. \qquad \text{(E. Lemoine.)}$$

696. Un terrain a été payé à raison de 2500 livres tournois l'arpent de Paris, avant l'établissement du système métrique, et sa valeur a quadruplé depuis cette époque. On demande quel est, à cent francs près, son prix actuel à l'hectare, sachant :

1° Que 80 francs valent 81 livres tournois;

2° Que l'arpent de Paris contenait cent perches carrées, dont chacune était un carré de trois toises de côté;

3° Que la longueur de la toise équivalait à $1^m,94904$.

(*Concours d'admission aux Écoles d'Arts et Métiers*, 1893).

Solution. 1 arpent = 900 toises carrées = $9 \times 19,4904^2$ mètres carrés = $0,194904^2$ hectares. — 2500 livres tournois valent $\dfrac{80}{81} \times 2500$ francs. — Un hectare vaut donc actuellement

$$\frac{80 \times 2500 \times 4}{81 \times 9 \times 0,194904^2} \text{ francs.}$$

697. Une pyramide pentagonale régulière SABCDE repose par sa base ABCDE sur le plan horizontal. Le diamètre du cercle circonscrit

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liége, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut picture mathesis!
PH. BRETON.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VI. — ANNÉE 1896.

(TOME XVI DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1896

Question CCCXIV.

(Voir N. C. M., t. III, p. 433).

Pour quelles valeurs de n la somme des boulets des n premières piles triangulaires est-elle un carré parfait? (E. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. Le nombre des boulets contenus dans une pile triangulaire, dont la base a k boulets au côté, est

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}.$$

Donc la somme des boulets des n premières piles est

$$\frac{S_3}{6}+\frac{S_2}{2}+\frac{S_1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

Par suite l'équation du problème est

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=24p^2,$$

ou encore

$$(n^2+3n+1)^2-6(2p)^2=1,$$

équation de la forme

$$x^2-6y^2=z^2,$$

x, y, z étant premiers entre eux.

Or, toutes les solutions de cette équation sont données par les formules

$$\begin{cases} x=\alpha^2+6\beta^2, \\ y=2\alpha\beta, \\ \pm z=\alpha^2-6\beta^2; \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x=2\alpha^2+3\beta^2, \\ y=2\alpha\beta, \\ \pm z=2\alpha^2-3\beta^2. \end{cases}$$

Donc notre équation présente les deux décompositions :

$$\begin{cases} n^2+3n+1=\alpha^2+6\beta^2, & (1) \\ \alpha^2-6\beta^2=1; & (2) \end{cases} \text{et} \begin{cases} n^2+3n+1=2\alpha^2+3\beta^2, & (3) \\ 2\alpha^2-3\beta^2=-1. & (4) \end{cases}$$

Les autres signes de z donneraient des relations, entre α et β, impossibles suivant le module 3.

En retranchant membre à membre les équations (3) et (4), on obtient l'équation

$$n^2+3n=4\alpha^2,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(2n+3+4\alpha)(2n+3-4\alpha)=9.$$

Cette équation n'est possible en nombres entiers que pour

$$2n+3+4\alpha=9 \quad \text{avec} \quad 2n+3-4\alpha=1,$$

c'est-à-dire pour $n=1$, $\alpha=1$.

Il ne reste donc à résoudre que le système des équations (1) et (2), que l'on peut remplacer par le suivant

$$\begin{cases} n^2+3n=12\beta^2, & (5)\\ \alpha^2-6\beta^2=1. & (6)\end{cases}$$

L'équation (5) montre que n et par suite β sont divisibles par 3.

Faisons $n=3m$, $\beta=3\gamma$; cette équation devient

$$m(m+1)=12\gamma^2,$$

ou encore

$$(2m+1)^2=\nu^2=48\gamma^2+1, \qquad (7)$$

et l'autre devient

$$\alpha^2=54\gamma^2+1. \qquad (8)$$

De ces équations on déduit

$$\alpha^2=\nu^2+6\gamma^2.$$

α, ν et γ étant premiers entre eux, toutes les solutions de cette équation sont données par les formules

$$\begin{cases} \alpha=\lambda^2+6\mu^2,\\ \pm\nu=\lambda^2-6\mu^2,\\ \gamma=2\lambda\mu; \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha=2\lambda^2+3\mu^2,\\ \pm\nu=2\lambda^2-3\mu^2,\\ \gamma=2\lambda\mu. \end{cases}$$

Dans le premier cas, l'une et l'autre des équations (7) et (8) deviennent

$$\lambda^4-204\lambda^2\mu^2+36\mu^4=1, \qquad (9)$$

et dans le second cas

$$4\lambda^4-204\lambda^2\mu^2+9\mu^4=1. \qquad (10)$$

L'équation (9) peut s'écrire

$$(\lambda^2-102\mu^2)^2=8.(6\mu)^4+1.$$

Le second membre doit être le carré d'un nombre impair; en l'égalant à $4t^2+4t+1$, on en tire

$$(6\mu)^4=\frac{t(t+1)}{2}.$$

Or, on sait, d'après Euler, qu'aucun nombre triangulaire, excepté l'unité n'est égal à un bicarré. Donc l'équation (9) est impossible.

De même l'équation (10) peut s'écrire

$$(2\lambda^2 - 51\mu^2)^2 = 2.(6\mu)^4 + 1^4.$$

Or, Euler a démontré que la somme de trois bicarrés, dont deux sont égaux, ne peut être égale à un carré.

Donc l'équation (10) est aussi impossible.

En résumé l'équation du problème n'admet que la solution insignifiante $n = 1$.

Les théorèmes d'Euler que nous venons de rappeler se trouvent reproduits dans la Théorie des Nombres de Legendre.

COROLLAIRE. Le nombre

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

représente le triangulo-triangulaire de rang n. Donc, dans ce qui précède, nous avons démontré qu'aucun nombre triangulo-triangulaire, excepté l'unité, n'est égal à un carré.

Parthenay, 11 janvier 1895.

QUESTIONS D'EXAMEN.

785. Résoudre le système

$$x+y+z+u=a, \quad (x+y)(z+u)=b, \quad (x+z)(y+u)=c,$$
$$(x+u)(y+z)=d.$$

786. Résoudre le système

$$x+y+z=a, \quad x^2+y^2+z^2=a^2+2b^2, \quad x^3+y^3+z^3=a^3.$$

NYT, *Tidsskrift for Matematik.*

De $x+y=a-z$ on déduit

$$x^2+y^2=(a-z)^2-2xy=a^2+2b^2-z^2,$$
$$x^3+y^3=(a-z)^3-3xy(a-z)=a^3-z^3;$$

éliminant le produit xy, on obtient

$$(a-z)(6z^2-6b^2)=0, \quad \text{d'où} \quad z=a, b, -b \ldots$$

787. Soient O le centre et M un point quelconque d'une conique. Sur une droite ON faisant avec l'axe focal Ox un angle $NOx = 2MOx$ on

Remarques. I. La somme $OA + OB + OC + OD$ est constante lorsque les limaçons ont même point double et même paramètre a, le rayon R étant variable. (Verdeyen).

II. Le produit $OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD$ est constant pour toutes les sécantes situées à une même distance de O.

Si le cercle (Γ) a son centre sur l'axe de symétrie des limaçons, on trouve

$$OA' \cdot OB' \cdot OC' \cdot OD' = \frac{R^2 (d^2 - r^2)^2}{(R - d)^2}. \qquad \text{(Droz).}$$

Un correspondant remplace l'équation (2) par celle qu'on obtient en multipliant membre à membre les équations

$$\rho \cos(\omega - \alpha) = d, \quad \rho \cos(\omega + \alpha) = d,$$

lesquelles représentent la droite (Δ) et sa symétrique (Δ') par rapport à $O\varpi$. Nous faisons remarquer que l'équation résultante

$$\rho^2 \cos(\omega - \alpha) \cos(\omega + \alpha) = d^2$$

ne représente pas le système des droites (Δ) et (Δ'). (J. N.).

Question CCCXV.

(Voir N. C. M., t. III, p. 433).

Pour quelles valeurs de n la somme des carrés des n premiers triangulaires, divisée par la somme des n premiers triangulaires, est-elle un carré parfait ? (E. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. Le carré d'un nombre triangulaire de rang K étant

$$\frac{K^4 + 2K^3 + K^2}{4},$$

la somme des carrés des n premiers triangulaires est égale à

$$\frac{S_4 + 2S_3 + S_2}{4},$$

ou

$$\frac{n(n+1)(n+2)(3n^2 + 6n + 1)}{60}.$$

$$\left[S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S_3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}, \right.$$
$$\left. S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}\right].$$

La somme des n premiers triangulaires est égale à

$$\frac{S_2 + S_1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Le rapport de la première somme à la seconde est

$$\frac{3n^2 + 6n + 1}{10}.$$

L'équation à résoudre est donc

$$3n^2 + 6n + 1 = 10p^2, \quad \text{ou} \quad 3(n+1)^2 - 2 = 10p^2.$$

On voit que $(n+1)$ doit être pair; soit $n+1 = 2x$, l'équation devient

$$6x^2 - 5p^2 = 1.$$

Elle admet la solution évidente $x = 1$, $p = 1$.

Or, quand une équation de la forme

$$ax^2 - by^2 = 1$$

admet une solution entière, elle en admet une infinité d'autres. Soit, en effet, x, y, une solution, on en obtiendra une nouvelle par les formules

$$x = x_1(ax_1^2 + 3by_1^2), \quad y = y_1(3ax_1^2 + by_1^2).$$

De sorte que dans l'équation

$$6x^2 - 5p^2 = 1,$$

on passera d'une solution x_q, p_q à une autre x_{q+1}, p_{q+1} par les formules

$$x_{q+1} = 3x_q(2x_q^2 + 5p_q^2), \quad p_{q+1} = p_q(18x_q^2 + 5y_q^2).$$

On trouve ainsi, en partant de la solution immédiate $x_1 = 1$, $p_1 = 1$, $x_2 = 21$, $p_2 = 23$; $x_3 = 222201$, $p_3 = 243409$, ... etc.

Il en résulte pour n les valeurs

$$1, 41, 444401, \ldots \text{ etc.}$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

734. Construire et résoudre un trapèze isoscèle, connaissant une base, le côté et l'angle des diagonales.

735. Développer $(2 - \sqrt{-2})^6$.

736. Une personne place à intérêts composés à 4 $\frac{1}{2}$ p. °/. un capital de fr. 762-13; pendant combien d'années à partir de la 12e après le

Question CCCXVI.

(Voir N. C. M., t. III, p. 433).

La somme des puissances semblables des x premiers nombres, augmentée ou diminuée de l'unité, est divisible par $x+2$.

(E. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. De la formule classique, qui sert à calculer la somme des puissances semblables de x nombres en progression arithmétique, on déduit celle-ci :

$$(x+1)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot S_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} S_{m-} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot S_{m-3} + \cdots x. \qquad (1)$$

On a aussi l'identité

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.} + \cdots \pm 1, \qquad (2)$$

obtenue en faisant $x = 1$ dans le développement de $(x-1)^m$; le dernier terme est positif ou négatif suivant que m est pair ou impair.

En combinant ces deux égalités par voie d'addition ou de soustraction, on obtient la relation

$$(x+1)^m \pm 1^m = (x+2) + \frac{m}{1}(S_{m-1} \pm 1) + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot(S_{m-2} \mp 1) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot(S_{m-3} \pm 1) + \cdots;$$

les signes supérieurs correspondent au cas de m impair et les signes inférieurs au cas de m pair.

Faisons successivement $m = 2, 3, 4, 5, \cdots$; nous aurons

$$(x+1)^2 - 1^2 = (x+2) + 2.(S_1 - 1),$$

$$(x+1)^3 + 1^3 = (x+2) + 3.(S_2 + 1) + \frac{3.2}{1.2}\cdot(S_1 - 1)$$

$$(x+1)^4 - 1^4 = (x+2) + 4.(S_3 - 1) + \frac{4.3}{1.2}(S_2 + 1) + \frac{4.3.3}{1.2.3}\cdot(S_1 - 1),$$

$$(x+1)^5+1^5=(x+2)+5.(S_4+1)+\frac{5.4}{1.2}.(S_3-1)$$

$$+\frac{5.4.3}{1.2.3}.(S_2+1)+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.(S_1-1),$$

. . . . . .

Ces égalités nous font voir de proche en proche que $x+2$ divise

$$S_1-1,\quad S_2+1,\quad S_3-1,\quad S_4+1,\quad \cdots$$

et ainsi de suite. En effet, $(x+1)^m+1^m$ est divisible par $(x+1)+1$ quand m est impair, et $(x+1)^m-1^m$ est divisible par $(x+1)+1$ quand m est pair.

QUESTIONS D'EXAMEN.

748. Deux tangentes parallèles d'une ellipse interceptent sur la droite menée par un foyer et le point de contact de l'une des tangentes un segment égal au grand axe.

749. Soient MM′, NN′ deux diamètres réels quelconques d'une hyperbole équilatère, P un point quelconque de cette courbe. Démontrer que les angles MPN, M′PN′ sont égaux ou supplémentaires.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***1068.** Par trois droites données non situées dans un même plan, mener trois plans formant un trièdre trirectangle. (J. Neuberg.)

1069. Quelle relation doit-il exister entre deux circonférences pour que les deux centres soient les deux foyers de la courbe polaire réciproque de l'une des circonférences par rapport à l'autre?

(Droz Farny.)

1070. Eliminer α et β entre les équations

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2=a^2b^2,$$

$$c^2\alpha^2-(c^2+a^2)\,a^2\alpha+a^4x=0,\quad c^2\beta^2-(c^2-b^2)\,b^2\beta-b^4y=0.$$

(H. Brocard.)

***1071.** Au cercle I, inscrit à un triangle équilatéral ABC, on mène une tangente quelconque, qui coupe les côtés du triangle aux points α,β,γ, de chacun desquels on mène la seconde tangente respectivement aux cercles exinscrits I_a, I_b, I_c. Chercher le lieu des sommets du triangle formé par ces droites. (E. Duporcq).

des autres : 2 fois 1 2; 2 fois 2 4; 2 fois 4 8; 2 fois 8 16; 2 fois 6 12, et 1 13; 2 fois 3 6, et 1 7, et ainsi de suite. Démontrer : 1° que les dix-huit premiers chiffres obtenus se reproduiront indéfiniment dans le même ordre; 2° que les neuf premiers chiffres sont les compléments à 9 des neuf chiffres suivants; 3° que, si l'on appelle N le nombre formé par les dix-huit premiers chiffres, le produit de N par les nombres de 1 à 18 est formé des mêmes chiffres, écrits dans le même ordre, mais en commençant par un chiffre différent; 4° que le produit de N par 19 est un nombre formé de dix-huit chiffres 9.

2424. Faire l'addition des nombres 83 765, 43 708, 38 976, 64 812, 94 077, 25 049, 35 621, 82 473, 78 964 : 1° par la méthode ordinaire; 2° sans retenues, en écrivant intégralement la somme des chiffres de chaque colonne, et en faisant ensuite le total de ces sommes partielles; 3° en marquant un point pour chaque dizaine ou chaque vingtaine à retenir, et en reportant ensuite ces dizaines ou ces vingtaines à la colonne suivante; 4° en comptant le nombre de fois que le chiffre 4 ou 5 est contenu dans chaque colonne, et en ajoutant au multiple de 4 ou de 5 ainsi obtenu la somme des compléments à 4 ou 8, ou à 5, de tous les chiffres de cette colonne. (GELIN.)

2425. De deux nombres quelconques, le plus grand est égal à leur demi-somme plus leur demi-différence, et le plus petit est égal à leur demi-somme moins leur demi-différence.

2426. Étant donnés trois nombres de n chiffres, comment peut-on écrire, à vue, trois autres nombres tels que la somme des six nombres soit égale au nombre formé du chiffre 2, suivi de $n - 1$ chiffres 9, suivis du chiffre 7? — *R.* On écrit les compléments à 9 des chiffres de chacun des nombres donnés.

2427. Écrire les produits de 12 345 679 par 8 et par 9. Quel devrait être le multiplicateur pour que le produit fût formé de neuf chiffres 7? — *R.* 98 765 432; 111 111 111; 63.

2428. Si l'on multiplie par 9 les nombres 9, 98, 987, 9876, 98 765, 987 654, 9 876 543, 98 765 432, et qu'aux produits obtenus on ajoute respectivement 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, on aura pour sommes des nombres formés de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 chiffres 8. (LUCAS.)

2429. Si l'on multiplie par 9 les nombres 1, 12, 123, 1234, 12 345, 123 456, 1 234 567, 12 345 678, et qu'aux produits obtenus on ajoute respectivement 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on aura pour sommes des nombres formés de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 chiffres 1. (LUCAS.)

2430. Si l'on multiplie par 8 les nombres 1, 12, 123, 1234, 12 345, 123 456, 1 234 567, 12 345 678, 123 456 789, et qu'aux produits obtenus on ajoute respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on aura pour sommes les nombres 9, 98, 987, 9876, 98 765, 987 654, 9 876 543, 98 765 432, 987 654 321. (LUCAS.)

2431. Pour faire le produit d'un nombre formé de n chiffres 9 par un nombre formé de n chiffres 7, on écrit $n - 1$ chiffres 7, puis 6, puis $n - 1$ chiffres 2, puis 3. On a, par exemple, $9999 \times 7777 = 77\,762\,223$. (IBN ALBANNA.)

2432. Pour multiplier un nombre par 5, 25, 125, 625, on écrit un, deux, trois, quatre zéros à sa droite, et on divise par 2, 4, 8, 16 le nombre ainsi obtenu.

2433. Pour multiplier un nombre par 11, on écrit le premier chiffre à droite du nombre, puis, à gauche, successivement, la somme de chaque chiffre avec celui qui le précède. Former, d'après cette règle, le produit par 11 des nombres 1896 et 89 675 — *R.* 20 856; 986 425.

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences,
Professeur ordinaire à l'Université de Gand,
Membre de l'Académie royale
de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences,
Professeur ordinaire à l'Université de Liége,
Correspondant de l'Académie royale
de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VII. — ANNÉE 1897.

(TOME XVII DE LA COLLECTION.)

GAND
D. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS&FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1897

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 252.

(Voir *Mathesis*, (1), III, 143, et (2) I p. 28).

I. *Si q, r, s, sont des entiers plus grands que 2 et p un entier quelconque, démontrer que les nombres de Bernoulli déterminés par la relation symbolique*

$$(B+1)^q - B^q = 0$$

vérifient la relation

$$B^p(B+1)^q(B+2)^r(B+3)^s = B^s(B-1)^r(B-2)^q(B-3)^p.$$

II. *Démontrer, sans se servir des séries, la relation symbolique*

$$(2B+1)^p + 2^pB_p - 2B_p = 0.$$

(Ed. Lucas).

Solution par M. Stuyvaert (Gand). Les notions de calcul symbolique, la définition et les propriétés fondamentales des nombres de Bernoulli ont été exposées plusieurs fois ici-même, notamment par M. Cesàro(*) et par le regretté Ed. Lucas(**) qui a étudié aussi ces questions dans les C. R. t. LXXXIII, et dans un mémoire présenté au Congrès de Rouen en 1883(***). C'est sur une formule établie dans ce dernier travail que nous fonderons la démonstration exposée dans ce qui suit ; d'abord nous rappellerons, en quelques mots, les préliminaires indispensables pour l'intelligence du texte. Notons en passant qu'il a déjà paru une solution (autre que celle qui va suivre) de la 2e partie de la question ; cette solution due à M. Hermite a été publiée en supplément à *Mathesis* en 1895.

Aujourd'hui l'on définit d'habitude les nombres de Bernoulli B_0, B_1, B_2 ... par la relation *symbolique*

$$(B+1)^q - B^q = 0,$$

laquelle signifie que l'on doit effectuer les opérations indiquées, puis remplacer les exposants de B par des indices ; la relation précédente

---

(*) *Mathesis*, 1883, p. 10 ; le même auteur a publié également, dans les N. A. M., des applications de cette théorie.

(**) *Mathesis*, 1883 et 1886.

(***) Les lecteurs de *Mathesis* trouveront un résumé de ce mémoire dans la *Notice historique* de M. Laisant publiée en supplément au présent journal, année 1888.

n'est vraie que pour $q > 0$; on *convient* en outre de la valeur initiale

$$B_0 = 1.$$

On démontre ensuite, sans grande difficulté, que, pour x entier et positif, on a symboliquement

$$(x + B + 1)^q - (x + B)^q = qx^{q-1}.$$

Par suite,

$$(n + B)^q - B^q = q[1^{q-1} + 2^{q-1} + 3^{q-1} + \cdots + (n-1)^{q-1}],$$

ou

$$\frac{1}{q}[n + B)^q - B^q] = \sum_{x=0}^{x=n-1} x^{q-1},$$

ou enfin

$$\int_B^{n+B} x^{q-1}dx = \sum_{x=0}^{x=n-1} x^{q-1}.$$

Si l'on a maintenant une fonction entière

$$\varphi(x) = Ax^m + A'x^{m'} + \cdots,$$

la formule précédente s'applique à chacun des termes, et l'on obtient par addition

$$\int_B^{n+B} \varphi(x)dx = \sum_{x=0}^{x=n-1} \varphi(x) \qquad (1)$$

C'est la formule de Lucas, à laquelle nous avons fait allusion.

I. Considérons la fonction

$$F(x) = (x-3)^p (x-2)^q (x-1)^r x^s.$$

Dérivons par rapport à x :

$$F'(x) = F(x)\left(\frac{p}{x-3} + \frac{q}{x-2} + \frac{r}{x-1} + \frac{s}{x}\right).$$

Appliquons la formule (1) à la fonction $F'(x)$; pour $n = 3$, nous aurons

$$\int_B^{3+B} F'(x)\,dx = \sum_{x=0}^{x=2} F(x)\left(\frac{p}{x-3} + \frac{q}{x-2} + \frac{r}{x-1} + \frac{s}{x}\right).$$

Or, si q, r, s, valent chacun au moins 2, la fonction sous le signe sommatoire Σ s'annule pour chacune des valeurs 0, 1, 2 de x ; donc le second membre est nul. Par conséquent,

$$\int_B^{3+B} F'(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \Big[F(x)\Big]_B^{3+B} = 0.$$

Ainsi la première partie de l'énoncé est démontrée, et l'on voit que la proposition doit être légèrement rectifiée : p est un entier quelconque, et q, r, s doivent être supérieurs ou *égaux* à 2. On pourra d'ailleurs vérifier directement la formule pour $q = r = s = 2$ et $p = 0$; les calculs ne sont pas fort longs.

La démonstration donnée ci-dessus fait voir immédiatement comment on pourrait généraliser le théorème pour plus de quatre facteurs.

II. Soit à présent la fonction $(2x+1)^p$; la formule (1) donne

$$2(p+1)\int_{B'}^{n+B}(2x+1)^p dx = 2(p+1)\sum_{x=0}^{x=n-1}(2x+1)^p,$$

d'où

$$(2B+2n+1)^{p+1} - (2B+1)^{p+1} = 2(p+1)[1^p+3^p+5^p+\cdots+(2n-1)^p] \qquad (2)$$

D'autre part, on a :

$$(B+n)^{p+1} - B^{p+1} = (p+1)[1^p+2^p+\cdots+(n-1)^p].$$

Multipliant par 2^{p+1}, nous trouvons

$$(2B+2n)^{p+1} - (2B)^{p+1} = 2(p+1)[2^p+4^p+\cdots+(2n-2)^p] \quad (3).$$

Les égalités (2) et (3) donnent, par addition,

$$(2B+2n+1)^{p+1} + (2B+2n)^{p+1} - [(2B+1)^{p+1} + (2B)^{p+1}] = 2(p+1)[1^p+2^p+3^p+4^p+\cdots+(2n-1)^p].$$

Mais le second membre de cette dernière est encore égal à

$$2[(B+2n)^{p+1} - B^{p+1}].$$

Donc l'égalité précédente se ramène à

$$(2B+2n+1)^{p+1} + (2B+2n)^{p+1} - [(2B+1)^{p+1} + (2B)^{p+1}] = 2[(B+2n)^{p+1} - B^{p+1}]$$

ou

$$(2B+2n+1)^{p+1} + (2B+2n)^{p+1} - 2(B+2n)^{p+1} = (2B+1)^{p+1} + (2B)^{p+1} - B^{p+1}.$$

Cette relation est vérifiée pour toute valeur de n; le premier membre a donc la même valeur quel que soit n; si on le développe, les coefficients des diverses puissances de n sont nuls ; en particulier le coefficient de la première puissance de n étant égal à zéro, on trouve

$$(2B+1)^p + (2B)^p - 2B^p = 0.$$

C'est l'égalité à démontrer, et le raisonnement ci-dessus prouve que l'on a en outre, quel que soit n,

$$(2B + 2n + 1)^p + (2B + 2n)^p - 2(B + 2n)^p = 0.$$

Question 1035.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 216).

On considère une cubique gauche équilatère. Il existe une infinité de plans rencontrant la cubique en trois points vus d'un point fixe M *de la courbe sous un angle trièdre trirectangle. Démontrer que tous ces plans sont parallèles au plan normal à la cubique au point* M.

Application. *Un plan quelconque parallèle au plan diamétral du diamètre passant par un point* P *de l'espace, dans une quadrique, rencontre la cubique des pieds des normales menées par le point* P *en trois points qui sont vus de* P *sous un angle trièdre trirectangle.*

(A. Cazamian).

Solution par M. E. Duporcq. Remarquons d'abord que le point de Frégier relatif à un point M d'un hyperboloïde équilatère est le point à l'infini de la normale au point M à cette quadrique, car les trièdres trirectangles de sommet M dont les arêtes sont parallèles à des génératrices de l'hyperboloïde montrent que ce point de Frégier est dans le plan de l'infini. — Considérons donc un des trièdres trirectangles dont est capable le cône de sommet M qui admet pour directrice la cubique considérée : ses arêtes coupent cette courbe en trois points, qui appartiennent à tous les hyperboloïdes équilatères passant par la cubique : leur plan passe donc par les points de Frégier relatifs au point M dans tous ces hyperboloïdes, c'est-à-dire par les points à l'infini des normales en M à ces quadriques : autrement dit, ce plan est perpendiculaire à la tangente à la cubique au point M.

Quant à l'application indiquée dans l'énoncé, elle résulte de ce que la tangente en P à la cubique considérée, est perpendiculaire au plan polaire de P par rapport à la quadrique : c'est une conséquence immédiate de la propriété bien connue de la cubique des pieds des normales d'être le lieu des points où les diamètres de la quadrique rencontrent les perpendiculaires abaissées de P sur leurs plans diamétraux conjugués, dans le cas où ces droites se coupent.

Ces équations prouvent que les deux arcs de grand cercle, qui se coupent une première fois en A, se coupent une seconde fois, sous le même angle en un point A′ et l'on a *arc* ABA′ = *arc* ACA′ = π. Par suite, comme on le voit assez aisément, tous les arcs de grand cercle qui passent par le point A, passent aussi par le point A′ et ne se rencontrent nulle part ailleurs. Deux points tels que A et A′ peuvent être appelés, par convention, *points opposés*, sans que cela implique la considération de la droite euclidienne AA′ qui les réunit.

D'après ce qui précède, les arcs de grand cercle définis comme nous venons de le faire présentent de grandes analogies avec la droite riemannienne. Ainsi, par exemple, ***deux arcs de grand cercle, suffisamment prolongés, renferment toujours un espace.***

Par suite, ils jouissent d'une propriété analogue au postulat des trois droites. En effet, il est clair que ***deux grands cercles qui font d'un même côté, avec un troisième, des angles dont la somme est inférieure à deux droits, se rencontrent de ce côté***, puisque deux pareils arcs se rencontrent toujours. Il y a plus, ils se rencontrent aussi de l'autre côté, comme nous l'avons vu tantôt. Ils se rencontrent d'ailleurs aussi des deux côtés, même si la somme des angles d'un côté et de l'autre du troisième grand cercle, est égale à deux droits. P. M

(*A continuer*).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 783.

(Voir *Mathesis*, X, p. 216).

De combien de manières un pion du jeu de dames, placé en un coin du damier, peut-il se rendre sur le bord opposé en progressant par cases consécutives parallèlement à l'une ou l'autre diagonale? (Ed. Lucas).

Solution par M. R. H. Van Dorsten. Supposons que le pion soit placé en haut dans le coin gauche d'un damier de $2n$ cases de côté.

C'est Ed. Lucas lui-même — le géomètre distingué, dont la mort a été une perte immense pour la science mathématique — qui, dans sa *Théorie des Nombres* (p. 90), a indiqué, dans les termes suivants, la méthode par laquelle la question proposée peut être résolue :

« Si l'on fait tourner le damier d'un demi-quart de tour dans le sens

« opposé aux aiguilles d'une montre, les déplacements du pion devien-
« nent parallèles aux directions ↓ et →, c'est-à-dire parallèles à ceux
« d'une tour, tandis que les bords verticaux deviennent parallèles à la
« diagonale ↘. On est ainsi ramené à la considération de l'hexagone
« arithmétique. »

En effet, il y a deux transversales formées de zéros. Dans l'une de ces transversales le premier zéro se trouve à la 1^{re} ligne et à la $2n+1^{ième}$ colonne, dans l'autre à la $2^{ième}$ ligne et à la 1^{re} colonne; de sorte que $a=1$ et $b=2n$. Si l'on désigne le terme qui est placé dans la case, dont les coordonnées sont x et y (c'est-à-dire dans la $(x+1)^{ième}$ ligne et la $(y+1)^{ième}$ colonne) par $Z_{x,y}$ le nombre cherché devient

$$Z = Z_{n-1,n} + Z_{n-2,n+1} + Z_{n-3,n+2} \cdots + Z_{0,2n-1}.$$

L'expression générale de $Z_{x,y}$ est :

$$\sum_{h=0} [C_{x+y,x-h(a+b)} - C_{x+y,y-h(a+b)-b} - C_{x+y,x-y(a+b)-a} + C_{x+y,y-(h+1)(a+b)}].$$

Comme on a $x < a+b$, c'est-à-dire $< 2n+1$ et $y < b$, c'est-à-dire $< 2n$, le deuxième et le quatrième terme de l'expression entre les parenthèses peuvent être supprimés; et la seule valeur de h qui ne rend pas négatifs les indices supérieurs est $h=0$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} Z_{n-1,n} &= C_{2n-1,n-1} - C_{2n-1,n-2}, \\ Z_{n-2,n+1} &= C_{2n-1,n-2} - C_{2n-1,n-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_{1,2n-2} &= C_{2n-1,1} - C_{2n-1,0}, \\ Z_{0,2n-1} &= C_{2n-1,0}. \end{aligned}$$

L'addition de ces égalités nous fournit le nombre cherché

$$Z = C_{2n-1,n-1}.$$

Si le damier a $2n+1$ cases de côté, on a :

$$a=1, \quad b=2n+1, \quad Z = Z_{n,n} + Z_{n-1,n+1} + \cdots + Z_{0,2n}.$$

Dans ce cas on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Z_{n,n} &= C_{2n,n} - C_{2n,n-1}, \\ Z_{n-1,n+1} &= C_{2n,n-1} - C_{2n,n-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_{1,2n-1} &= C_{2n,1} - C_{2n,0}, \\ Z_{0,2n} &= C_{2n,0}, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut :

$$Z = C_{2n,\,n}.$$

Une autre solution de la question a été donnée par M. D. André (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 43). Cette solution n'est pas aussi simple que celle qui est donnée ci-dessus, mais elle doit être considérée comme une application fort intéressante d'une méthode générale, indiquée par M. André pour la solution des questions diverses qui se rattachent à l'*analyse combinatoire*.

×Question 948.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 151).

On divise les côtés AB, BC, CD, DA ***d'un quadrilatère*** ABCD ***dans un même rapport*** $(p : q)$ ***aux points*** X, Y, Z, U ***et dans le rapport inverse*** $(q : p)$ ***aux points*** X′, Y′, Z′ ,U′. ***Soient*** L, M, N, P ***les points d'intersection des côtés homologues des deux quadrilatères*** XYZU, X′Y′Z′U. ***Démontrer que les droites*** LM ***et*** NP ***sont parallèles et proportionnelles aux diagonales du quadrilatère primitif*** ABCD. (J. N.).

Solution par M. Bastin. Il est aisé de voir que X′Y, XY′, U′Z et UZ′ sont parallèles à la diagonale AC, de même que Y′Z, YZ′, X′U et XU′ sont parallèles à la diagonale BD.

On a, N et P étant les points de rencontre XU avec X′U′ et de YZ avec Y′Z′,

$$\frac{X'N}{NU'} = \frac{X'U}{XU'} = \frac{AU}{AU'} = \frac{q}{p}, \quad \frac{YP}{PZ} = \frac{YZ'}{Y'Z} = \frac{CZ'}{CZ} = \frac{q}{p};$$

on conclut de là que NP est parallèle à AC.

On prouverait d'une manière analogue que LM est parallèle à BD.

Des relations

$$(p+q)\,NP = p.\,X'Y + q.\,U'Z,$$

$$\frac{X'Y}{AC} = \frac{BY}{BC} = \frac{p}{p+q}, \quad \frac{U'Z}{AC} = \frac{DZ}{CD} = \frac{q}{p+q},$$

on déduit

$$\frac{NP}{AC} = \frac{p^2+q^2}{(p+q)^2}.$$

La même question a été résolue par MM. Droz Farny, Dépbez, Fairon (Seraing) et J. Jonesco au moyen des équipollences). M. Fairon observe que la proposition s'applique à un quadrilatère gauche.