

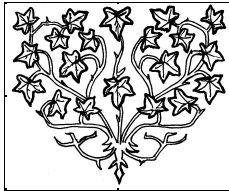
**ÉDOUARD LUCAS**

**Publications Scientifiques**

**Tome X**

**Revue : NAM**

**Nouvelles Annales de Mathématiques**



**1866 – 1885**

NOUVELLES ANNALES  
DE  
**MATHÉMATIQUES.**

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

PROUHET,  
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

---

PS  
DEUXIÈME SÉRIE.

TOME CINQUIÈME.

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM.

---

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

—  
1866.

**CONCOURS D'ADMISSION**  
**A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE EN 1865.**

COMPOSITION MATHÉMATIQUE,

PAR M. PAUL MOËSSARD.

*On donne dans un plan une parabole. On considère une circonférence passant par le foyer de cette parabole. On propose d'indiquer les régions du plan où doit se trouver le centre de la circonférence pour que cette courbe ait successivement avec cette parabole quatre points réels communs, quatre points imaginaires communs, deux points réels et deux points imaginaires communs. On étudiera la forme et les propriétés de la courbe qui sépare les deux premières régions de la troisième.*

Je prends pour origine des coordonnées le foyer de la parabole fixe; pour axe des  $x$  l'axe de cette parabole, et pour axe des  $y$  une perpendiculaire élevée au foyer.

Soit  $2p$  le paramètre de la parabole; son équation sera

$$y^2 - 2p \left( x + \frac{p}{2} \right) = 0.$$

L'équation d'un cercle ayant pour centre le point dont les coordonnées sont  $a$  et  $b$ , et passant à l'origine, est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par l'intersection des deux courbes est donc

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \lambda \left[ y^2 - 2p \left( x + \frac{p}{2} \right) \right] = 0,$$

ou bien

$$x^2 + y^2(1 + \lambda) - 2(a + p\lambda)x - 2by - p^2\lambda = 0.$$

Je vais exprimer que cette équation représente un système de deux droites qui seront alors les sécantes communes aux deux courbes. Pour cela j'exprime que le centre de cette conique est sur la courbe. J'écris les équations du centre, et ce que devient l'équation de la conique quand on tient compte des équations du centre; j'ai ainsi

$$\begin{aligned} x - a - p\lambda &= 0, \\ y(1 + \lambda) - b &= 0, \\ x(a + p\lambda) + by + \lambda p^2 &= 0. \end{aligned}$$

Il faut éliminer  $x$  et  $y$  entre ces équations; en remplaçant  $x$  et  $y$  par leurs valeurs dans la troisième, j'ai

$$(a + p\lambda)^2(1 + \lambda) + b^2 + \lambda p^2(1 + \lambda) = 0,$$

équation dont les trois racines me donneront des systèmes de sécantes communes.

Cherchons la condition pour que les racines de cette équation soient toutes trois réelles.

Je l'ordonne :

$$p^2\lambda^3 + 2p(p + a)\lambda^2 + (p + a)^2\lambda + a^2 + b^2 = 0.$$

Je fais maintenant disparaître le terme en  $\lambda^2$ . Pour cela je diminue toutes les racines de cette équation du tiers de la somme de ses racines, c'est-à-dire de la quantité toujours réelle  $-\frac{2p(p+a)}{3p^2}$  ou  $-\frac{2(p+a)}{3p}$ .

Je remplace donc  $\lambda$  par  $\mu - \frac{2(p+a)}{3p}$ .

Soit  $f(\lambda) = 0$  la première équation. J'y fais  $\lambda = \mu + h$ ,

et j'ai

$$f(\mu + h) = f(h) + \mu f'(h) + \mu^2 \frac{f''(h)}{1.2.} + \mu^3 \frac{f'''(h)}{1.2.3.}$$

Je calcule ces différents coefficients :

$$\begin{aligned} f(h) &= -\frac{8(p+a)^3}{27p} + \frac{8(p+a)^3}{9p} - \frac{2(p+a)^3}{3p} + a^2 + b^2 \\ &= \frac{-2(p+a)^3 + 27p(a^2 + b^2)}{27p}, \end{aligned}$$

$$f'(h) = -\frac{(p+a)^2}{3},$$

$$f''(h) = 0,$$

et

$$f'''(h) = +6p^2.$$

L'équation en  $\mu$  sera donc

$$p^2\mu^3 - \frac{(p+a)^2}{3}\mu - \frac{2(p+a)^3 - 27p(a^2 + b^2)}{27p} = 0.$$

Formons la condition de réalité des racines de cette équation ; c'est

$$-4 \cdot \frac{(p+a)^6}{27 \cdot p^6} + 27 \frac{[2(p+a)^3 - 27p(a^2 + b^2)]^2}{27^2 p^6} < 0,$$

ou

$$-4(p+a)^6 + [2(p+a)^3 - 27p(a^2 + b^2)]^2 < 0,$$

ou bien encore

$$[4(p+a)^3 - 27p(a^2 + b^2)][-27p(a^2 + b^2)] < 0.$$

Le second facteur est toujours négatif (\*); donc la

(\*) Plusieurs élèves ont remarqué qu'en égalant ce facteur à zéro, on obtient le foyer qui peut être considéré comme faisant *en quelque sorte* partie du lieu, en regardant ce point comme un cercle de rayon nul et doublement tangent à la parabole. Mais la suppression de ce facteur commun ne peut avoir ici aucune importance.

condition se réduit à

$$(1) \quad 4(p+a)^3 - 27p(a^2 + b^2) > 0.$$

Si l'on avait

$$4(p+a)^3 - 27p(a^2 + b^2) = 0,$$

la parabole et le cercle seraient tangents, puisque, l'équation en  $\lambda$  ayant deux racines égales, deux des systèmes de sécantes communes se réduiraient à un seul. Si donc nous construisons la courbe

$$4(p+x)^3 - 27p(x^2 + y^2) = 0,$$

elle séparera les deux régions du plan où doit se trouver le centre pour que les racines de l'équation en  $\lambda$  soient toutes réelles, ou qu'il n'y en ait qu'une de réelle.

Je résous l'équation par rapport à  $y$  :

$$y^2 = \frac{4(p+x)^3 - 27px^2}{27p} = \frac{4x^3 - 15px^2 + 12p^2x + 4p^3}{27p}.$$

Cherchons à décomposer le numérateur en facteurs du premier degré, si faire se peut.

Si j'égale à zéro la dérivée de ce numérateur,

$$2x^2 - 5px + 2p^2 = 0,$$

les racines de cette équation sont  $2p$  et  $\frac{p}{2}$ .

Or,  $2p$  annule le numérateur de la valeur de  $y^2$ ; donc  $x - 2p$  est facteur double de ce numérateur, et, en effectuant la division, on trouve comme troisième facteur  $4x + p$ .

Donc

$$y^2 = \frac{(4x+p)(x-2p)^2}{27p}.$$

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des  $x$ .

Pour  $x$  inférieur à  $-\frac{p}{4}$ ,  $y^2$  est négatif et  $y$  imaginaire; pour  $x = -\frac{p}{4}$ ,  $y = 0$ , et en ce point (C) la tangente est parallèle à l'axe des  $y$ .

$y$  augmente, et, pour  $x = 0$ ,  $y^3 = \frac{4}{27}p^3$ , et comme  $OA = p$ , je pose  $OB = \frac{2OA}{3\sqrt{3}}$ .

Puis, pour  $x = 2p$ ,  $y = 0$ , et la courbe a un point double; soit  $OD = 2p$ .

Les (coefficients angulaires des) tangentes en ce point sont

$$\pm \lim \frac{y}{x - 2p} \quad \text{pour } x = 2p,$$

c'est-à-dire  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Puis,  $x$  devenant infini,  $y$  devient aussi infini.

Comme, dans l'équation (de la courbe), les termes du plus haut degré se réduisent à  $x^3$ , les branches infinies tendent à devenir parallèles à l'axe des  $y$ . Du reste, leurs asymptotes sont transportées à l'infini; ce sont des branches paraboliques.

Voyons maintenant quelles sont les propriétés de cette courbe et des régions qu'elle sépare.

Nous savons que quand le centre du cercle sera sur cette courbe, le cercle sera tangent à la parabole. Pour le point C, il est manifeste que le cercle n'aura avec la courbe que deux points d'intersection réunis en un seul; donc tous les autres points des branches CD de la courbe seront centres de cercles tangents à la parabole et ne la coupant pas d'ailleurs. En D le cercle sera bitangent à la parabole, et, pour tous les autres points des branches infinies partant du point D, les cercles seront tangents

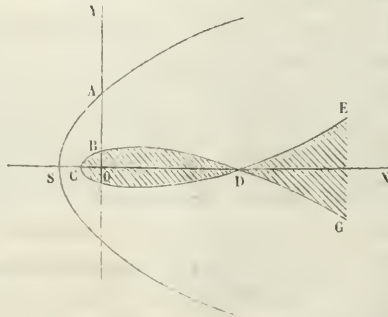
à la parabole et la couperont en deux autres points distincts.

Les points de cette courbe sont donc tels, que la longueur d'une normale menée de l'un d'eux à la parabole est égale à la distance de ce point au foyer, et en appelant la longueur de cette normale la distance du point à la parabole, cette courbe est le lieu des points également distants d'une parabole et de son foyer.

Voyons maintenant pour quelles parties du plan les racines de l'équation en  $\lambda$  seront réelles toutes trois.

Pour le point O,  $x = 0$ ,  $y = 0$ , la condition (1) est satisfaite; donc, pour ce point et pour tous ceux qui sont dans la région hachée, les trois racines de l'équation en  $\lambda$  sont réelles. Pour tous les points du plan compris dans cette région, les cercles auront donc quatre points réels ou quatre points imaginaires communs avec la courbe, et pour tous les points situés en dehors, les cercles auront seulement deux points réels communs avec la parabole.

Distinguons maintenant les parties de cette région qui correspondent à quatre points réels ou à quatre points imaginaires communs. Pour le point O, le cercle en question n'a aucun point réel commun avec la parabole; il en



est donc de même pour tous les points compris dans la



boucle CD. Au contraire, les points compris entre les deux branches infinies donneront des cercles ayant quatre points réels communs avec la parabole.

Donc, en résumé :

1° Pour les points compris dans la boucle CD, les cercles ne rencontreront pas la parabole.

2° Pour les points situés sur la boucle même, les cercles seront tangents et ne la couperont pas autrement.

3° Pour tous les points compris dans l'espace laissé en blanc, les cercles ne rencontreront la parabole qu'en deux points.

4° Pour les points situés sur les branches de courbe ED, DG, les cercles seront tangents à la parabole et la couperont en deux autres points.

5° Enfin, pour les points compris entre ces deux branches, dans l'angle curviligne EDG, les cercles couperont les paraboles en quatre points.

*Note du Rédacteur.* — Cette copie a mérité la note 19. Plusieurs autres élèves, sans avoir aussi bien fait dans l'ensemble, ont noté plusieurs choses dignes de remarque. Quelques-uns ont employé les coordonnées polaires, qui conduisaient plus immédiatement à une équation simple. Quant aux propriétés de la courbe, partie vague et mal limitée de la question, on en trouvera quelques-unes dans le travail suivant. P.

---

---

## PROPRIÉTÉS DE LA COURBE PRÉCÉDENTE;

PAR MM. BARBIER ET LUCAS,  
Astronomes de l'Observatoire de Paris (\*).

---

1. La perpendiculaire NP au milieu du rayon vecteur de la parabole touche la courbe au point P; en effet,

---

(\*) Nous supprimons les deux premières parties de ce travail qui font double emploi avec l'article précédent.



nées sur la normale  $NO$  à la parabole  $BN$ . Il résulte de là que la courbe est la caustique par réflexion de la parabole  $BN$  pour des rayons incidents perpendiculaires à l'axe de la parabole.

Cette courbe est étudiée à ce titre dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hôpital.

4. Le point  $O$  est le milieu du rayon de courbure de la parabole  $BN$  au point  $N$ .

Cette proposition n'est qu'un cas particulier d'une proposition connue : Si une courbe réfléchit des rayons parallèles, la projection du milieu du rayon de courbure de cette courbe sur le rayon réfléchi correspondant donne un point de la caustique.

5. Soit  $L$  la projection du point  $P$  sur l'axe  $AX$  et  $I$  la projection du point  $N$  sur le même axe; on a  $BL = 3 BI$ .

Pour démontrer cette proposition, remarquons que si l'on prend sur le prolongement  $NO'$  de la normale à la parabole  $BN$  une longueur  $NO'$  égale à la moitié du rayon de courbure au point  $N$ , le point  $O'$  est un point de la directrice  $AO'$  de cette parabole.

De l'égalité de  $NO$  et de  $NO'$  résulte celle des projections  $AI$  et  $IS$  de ces deux longueurs; on voit donc que  $FL$  est égal à  $3 FI + AF$  ou  $3 FI + 2 BF$ ; à ces deux quantités égales il suffit d'ajouter  $BF$  pour avoir l'égalité

$$BL = 3 (FI + BF)$$

qui devient évidemment celle que nous voulions démontrer.

6. L'arc de courbe  $BP$  a pour longueur le chemin  $INP$  parcouru par le rayon de lumière entre l'axe de la parabole et la caustique.

Cette proposition revient à la suivante : Si l'on prend.

sur le prolongement de PN,  $NI' = NI$ , le lieu du point I' est une développante de la courbe BP. Il suffit de faire voir que ce lieu de I' est normal à PI'.

Cette dernière proposition peut être démontrée ainsi : Appelons  $NI''$  une position de  $NI'$  infiniment voisine de  $NI'$ . L'élément de parabole  $NN'$  a des projections égales sur  $NI$  et sur  $NP$ , on verra facilement d'après cela que la projection de  $I''$  sur  $NI'$  doit tomber au point I pour que  $NI''$  puisse être regardé comme égal à sa projection sur  $NI'$ . Donc le lieu de I' est normal à  $PI'$ .

7. Les tangentes aux points où l'axe FY rencontre la courbe BP se coupent sous un angle de 60 degrés; nous avons déjà dit que les tangentes au point double se coupent sous le même angle de 60 degrés. Ces propositions sont des cas particuliers de la suivante :

Si l'on mène une droite par le point F, elle coupe la courbe en trois points; les tangentes en ces trois points forment un triangle équilatéral.

Cette élégante proposition est elle-même comprise dans le théorème suivant :

Les tangentes à la courbe BP aux extrémités de deux rayons vecteurs font un angle égal aux  $\frac{2}{3}$  de l'angle de ces rayons vecteurs.

Plus généralement, les tangentes aux extrémités de deux rayons vecteurs d'une courbe  $\rho \cos^p \frac{\omega}{p} = a$  se coupent sous un angle égal à la fraction  $\frac{p-1}{p}$  de l'angle de ces rayons vecteurs.

8. La polaire réciproque de la courbe par rapport à une circonférence dont le centre est au foyer F est une cardioïde. Cela résulte de cette proposition connue : La polaire réciproque d'une courbe par rapport à un cercle

est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire de la courbe, le pôle étant le centre du cercle.

9. Si l'on considère toutes les courbes obtenues en faisant varier le paramètre de la parabole, on obtient une série de courbes dont les trajectoires orthogonales sont des courbes égales aux premières. Il en est de même pour les trajectoires coupant chacune des courbes de la série sous un angle constant.

10. Remarquons enfin que la courbe étudiée rentre dans la famille des courbes dont l'équation est  $\rho^n = a^n \cos n\omega$ . Ces courbes se substituent les unes aux autres par la transformation  $\rho' = \rho^n$ ,  $\omega' = n\omega$ , et on sait que cette transformation n'altère point les angles; on peut donc déduire la plupart des propriétés précédentes des propriétés correspondantes de la droite, du cercle ou de la parabole, courbes de la famille considérée.

### REMARQUES

sur les compositions de Trigonométrie et de Mathématiques faites en 1865  
pour l'admission à l'École Polytechnique.

#### *Trigonométrie.*

On proposait de calculer les angles d'un triangle dont on donnait les trois côtés. Sur 320 candidats admissibles, 121 ont résolu la question sans faute ou avec une seule faute légère. La moyenne générale des notes a été 14,86 : la moyenne des candidats de Paris, 14,21; de province, 16,07. En somme, le résultat est satisfaisant. Il le serait

NOUVELLES ANNALES  
DE  
**MATHÉMATIQUES.**

JOURNAL DES CANDIDATS  
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

J. BOURGET,  
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,  
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME NEUVIÈME.

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM;  
CONTINUÉE, A PARTIR DE 1865, PAR MM. GERONO ET PROUHET.

---

PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,  
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,  
Quai des Augustins, n° 55.

1870.

**NOTE SUR LES SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES  
DES  $n$  PREMIERS NOMBRES ENTIERS;**

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Considérons le carré formé en plaçant les unes au-dessous des autres  $n$  rangées horizontales de  $n$  unités; on peut, comme on sait, grouper les  $n^2$  unités de ce carré de manière à représenter la série des nombres impairs, et l'on voit facilement ainsi que *la somme des  $n$  premiers nombres impairs est égale à  $n^2$ .*

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

On peut, de la façon précédente, déterminer un certain nombre de sommes, et trouver, en particulier, quelques relations simples entre les sommes des puissances semblables des  $n$  premiers nombres entiers.

2. Considérons le carré formé en répétant  $n$  fois la rangée horizontale des  $n$  premiers nombres et décomposons ce carré de la même façon que nous l'avons fait ci-dessus.

La somme de tous les nombres renfermés dans le carré

est égale à  $n$  fois la somme  $s_1$  des  $n$  premiers nombres, c'est-à-dire à

$$ns_1 = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

D'autre part, la somme des termes contenus dans le  $p^{\text{ième}}$  groupe se compose de deux parties : la partie horizontale,

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

qui est égale à la somme des  $p$  premiers nombres, et la partie verticale, qui est égale à  $(p-1)p$ . Donc la somme des termes du  $p^{\text{ième}}$  groupe est

$$p(p-1) + \frac{p(p+1)}{2} = \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p,$$

et, en additionnant tous les groupes, on obtient, en désignant par  $s_2$  la somme des carrés de  $n$  premiers nombres,

$$\frac{3}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_1 = \frac{n^2(n+1)}{2},$$

d'où l'on tire

$$s_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Considérons encore le carré formé par la table de Pythagore; la somme des termes renfermés dans cette



table est égale à la somme  $s_1$  des  $n$  premiers nombres multipliée par  $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$ , c'est-à-dire égale à  $s_1^2$ .

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

D'autre part, la somme des termes du  $p^{\text{ième}}$  groupe est égale à

$$2p(1 + 2 + \dots + p) - p^2 = p^3.$$

Donc, en additionnant tous les groupes, on a

$$s_3 = s_1^2;$$

et on retrouve ainsi ce théorème connu, que *la somme des cubes des  $n$  premiers nombres est égale au carré de la somme de ces  $n$  premiers nombres.*

4. En opérant de même sur le carré formé en prenant les carrés des termes de la table de Pythagore, on voit que la somme de tous les termes est égale à  $s_2^2$ , et que la somme des termes du  $p^{\text{ième}}$  groupe est égale à

$$2p^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + p^2) - p^4 = \frac{p^3}{3}(2p^2 + 1);$$

d'où l'on tire

$$2s_5 + s_3 = 3s_2^2.$$

5. En appliquant le même raisonnement au carré formé des cubes des termes de la table de Pythagore, on

trouverait encore

$$s_7 + s_5 = 2s_3^2.$$

6. Au lieu de la série des nombres entiers, on peut encore considérer celle des nombres triangulaires, pyramidaux, etc.: celle des sinus des multiples de l'arc  $x$ ; celle des puissances successives d'un nombre donné, etc.

Preons, par exemple, le carré formé de la manière suivante. On dispose sur une ligne horizontale les nombres

$$\frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{2.3}, \quad \frac{1}{3.4}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n(n+1)},$$

dont la somme est, comme on sait, égale à  $\frac{n}{n+1}$ , et on multiplie successivement tous les termes de cette ligne par chacun des termes  $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \dots$ , pour former les 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, ... lignes d'un carré de  $n^2$  termes, dont la somme totale est égale à  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ .

D'autre part, en décomposant ces groupes comme précédemment, on voit que la somme des termes du  $p^{\text{ième}}$  groupe est égale à

$$2 \cdot \frac{1}{p(p+1)} \left[ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{p(p+1)} \right] - \frac{1}{p^2(p+1)^2},$$

ou égale à

$$\frac{2}{(p+1)^2} - \frac{1}{p^2(p+1)^2};$$

et, en faisant la somme de tous les groupes, on a

$$2 \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{(p+1)^2} - \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^2(p+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2.$$

Si l'on fait, en particulier,  $n = \infty$ , on trouve

$$2 \left( \frac{\pi^2}{6} - 1 \right) - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^2 (p+1)^2} = 1 \quad (*),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} - 3.$$

## TRIANGLES ET CONIQUES COMBINÉS;

PAR M. NEUBERG,

Professeur à l'Athénée royal de Bruges (Belgique).

Seef. 257

M. Faure a énoncé dans les tomes XIX et XX des *Nouvelles Annales*, plusieurs propriétés très-intéressantes des coniques qui peuvent être considérées comme résolvant le problème de déterminer les axes de ces courbes, quand on en connaît le centre et un triangle inscrit, conjugué ou circonscrit. Je me propose ici le même problème en substituant au centre un foyer. Dans cette recherche je trouve quelques formules que je crois nouvelles, et j'arrive également aux deux théorèmes énoncés par M. Faure dans le tome XX des *Nouvelles Annales*, page 215.

En supposant des axes coordonnés rectangulaires passant par le foyer F, une conique peut être représentée par l'équation

$$(1) \quad x^2 + y^2 = (mx + ny + pz)^2 \quad (\text{où } z = 1).$$

(\* ) Puisque l'on a

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

(SERRET, *Traité de Trigonométrie*, p. 224.



et

$$(1 + \alpha^2)^{6n} = A + C\alpha + B\alpha^2,$$

et, par suite, en retranchant membre à membre, nous déduisons  $B = C$ .

D'autre part,  $(1 + \alpha)^{6n} - 1$  est divisible par  $(1 + \alpha)^3 + 1$ , ou par  $3(1 + \alpha + \alpha^2)$  : donc  $A - 1 + B(\alpha + \alpha^2)$  est divisible par  $1 + (\alpha + \alpha^2)$ , et, par suite,  $A - 1 = B$ . Donc :

*Les sommes des coefficients de la puissance  $6n$  du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales entre elles en retranchant l'unité de la première, et leur valeur est  $\frac{1}{3}(2^{6n} - 1)$ .*

*Deuxième cas.* — L'exposant de la puissance du binôme est égal à  $6n + 3$ .

On aura, comme précédemment,

$$(1 + \alpha)^{6n+3} = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

et aussi  $B = C$ ; et comme  $(1 + \alpha)^{6n+3} + 1$  est divisible par  $(1 + \alpha)^3 + 1$ ; on en déduira  $A + 1 = B$ . Donc :

*Les sommes des coefficients de la puissance  $6n + 3$  du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la première, et leur valeur est  $\frac{1}{3}(2^{6n+3} + 1)$ .*

*Troisième cas.* — L'exposant de la puissance du binôme est égale à  $6n + 1$ .

Nous avons en tout  $6n + 2$  coefficients, et le groupe C en contient  $n$ , les groupes A et B en contiennent  $n + 1$ ; alors

$$(1 + \alpha)^{6n+1} = A + B\alpha + C\alpha^2.$$

On peut faire voir que les groupes A et B contiennent les mêmes coefficients dans un ordre inverse; mais on peut aussi démontrer l'égalité de A et B de la façon sui-

vante. On a

$$(1 + \alpha)^{6n+1} = A + C\alpha + B\alpha^2,$$

et, en désignant  $(1 + \alpha)^{6n} = (1 + \alpha^2)^{6n}$  par M,

$$M(1 + \alpha) = A + B\alpha + C\alpha^2,$$

$$M(1 + \alpha^2) = A + C\alpha + B\alpha^2;$$

et en éliminant M entre ces équations, on déduit

$$(1 + \alpha^2)(A + B\alpha + C\alpha^2) - (1 + \alpha)(A + C\alpha + B\alpha^2) = 0,$$

ou bien

$$(B - A)(\alpha - \alpha^2) = 0,$$

et, par suite,

$$A = B.$$

D'autre part, on a

$$(1 + \alpha)^{6p+1} + \alpha^2 = A + B\alpha + (C\alpha + 1)\alpha^2;$$

mais le reste de la division de  $(1 + \alpha)^{6p} (1 + \alpha) + \alpha^2$  par  $(1 + \alpha)^3 + 1$  est égal au reste de la division de  $1 + \alpha + \alpha^2$  par  $(1 + \alpha)^3 + 1$ ; donc  $A + B\alpha + (C + 1)\alpha^2$  est divisible par  $1 + \alpha + \alpha^2$ , et l'on a

$$A = B = C + 1.$$

On a donc ce théorème :

*Les sommes des coefficients de la puissance  $6n + 1$  du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la dernière, et égales au tiers de  $2^{6n+1} + 1$ .*

*Quatrième cas.* — L'exposant de la puissance du binôme est égal à  $6n + 4$ .

On a alors le théorème suivant, analogue au précédent :

*Les sommes des coefficients de la puissance  $6n + 4$  du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en retranchant l'unité à la dernière, et égales au tiers de  $2^{6n+4} - 1$ .*

*Cinquième cas.* — L'exposant du binôme est égal à  $6n + 2$ .

Il y a alors  $6n + 3$  coefficients et  $n + 1$  par groupes, en tenant compte du dernier qui est l'unité ; on démontrerait, comme ci-dessus, le théorème suivant :

*Les sommes des coefficients de la puissance  $6n + 2$  du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en retranchant l'unité à la seconde, et égales au tiers de  $2^{6n+2} - 1$ .*

*Sixième cas.* — L'exposant du binôme est égal à  $6n + 5$ .

On a alors le théorème suivant :

*Les sommes des coefficients de la puissance  $6n + 5$  du binôme, pris de trois en trois, deviennent égales en ajoutant l'unité à la seconde, et égales au tiers de  $2^{6n+5} + 1$ .*

*Remarque.* — On aurait d'ailleurs, et par le même procédé, des théorèmes analogues pour les sommes des coefficients pris de quatre en quatre, de cinq en cinq, etc.

## NOTE SUR L'EXPRESSION DE LA DISTANCE ENTRE QUELQUES POINTS REMARQUABLES D'UN TRIANGLE ABC;

PAR M. E. LEMOINE,

Professeur.

$a, b, c$  sont les longueurs des trois côtés BC, AC, AB;  
 $R, r, r_a, r_b, r_c$  les rayons des cercles circonscrit, inscrit  
 et exinscrits;

$O, I, I_a, I_b, I_c$  les centres de ces mêmes cercles;

$M, N, H$  le centre de gravité du triangle, le centre

NOUVELLES ANNALES  
DE  
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS  
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,  
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME QUATORZIÈME.

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,  
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

---

PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,  
Quai des Augustins, n° 55.

1875.

576



le nombre positif  $\lambda$  prenant successivement les valeurs 0, 1, 2, ... jusqu'au plus grand nombre entier compris dans  $\frac{n}{2}$ . De sorte que

$$s_n = (-1)^n \left[ p^n - np^{n-2}q + \dots + (-1)^\lambda \frac{n(n-\lambda-1)\dots(n-2\lambda+1)}{1.2\dots\lambda} p^{n-2\lambda}q^\lambda + \dots \right].$$


---

## SUR LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES; ✓

PAR M. ÉDOUARD LUCAS,

Agrégé de l'Université, professeur de Mathématiques spéciales  
au lycée de Moulins.

---

Cette Note a pour but de donner des démonstrations analytiques fort simples de plusieurs théorèmes connus sur les sections coniques; ces démonstrations reposent sur l'emploi des coordonnées trilinéaires, mais on pourrait aussi se servir concurremment des coordonnées triponctuelles.

**THÉORÈME I.** — *Lorsque deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, les six sommets sont situés sur une conique (\*)*.

En prenant, en effet, l'un des triangles pour triangle de référence, la conique a pour équation

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0,$$

et, en désignant par  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  les trois sommets du second, la conique cherchée a pour équation

$$\frac{ax_1x_2x_3}{x} + \frac{a'y_1y_2y_3}{y} + \frac{a''z_1z_2z_3}{z} = 0;$$

---

(\*) CHASLES, *Traité des Sections coniques*, 1<sup>re</sup> Partie, p. 140; PAINVIN, *Principes de Géométrie analytique*, p. 288.

car, si l'on exprime que le point  $P_1$  est situé sur cette conique, on obtient la condition qui exprime que  $P_2$  et  $P_3$  sont conjugués par rapport à la conique donnée.

**THÉORÈME II.** — *Lorsque deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, les six côtés sont tangents à une même conique.*

En prenant les mêmes axes que dans le théorème corrélatif précédent, et en désignant par

$$D_i = u_i x + v_i y + w_i z = 0$$

les équations des trois côtés du second triangle, la conique cherchée a pour équation

$$\sqrt{\frac{u_1 u_2 u_3 x}{a}} + \sqrt{\frac{v_1 v_2 v_3 y}{a'}} + \sqrt{\frac{w_1 w_2 w_3 z}{a''}} = 0;$$

car, en exprimant que la droite  $D_1$ , par exemple, est tangente à cette conique, on obtient la condition qui exprime que  $D_2$  et  $D_3$  sont conjuguées par rapport à la conique donnée.

**THÉORÈME III.** — *Quand deux triangles ont leurs six sommets situés sur une conique, ces points forment deux systèmes de trois points conjugués par rapport à une même conique.*

En prenant l'un des triangles pour triangle de référence, la conique donnée a pour équation

$$\frac{b}{x} + \frac{b'}{y} + \frac{b''}{z} = 0,$$

et en désignant par  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  les trois sommets du second, la conique cherchée a pour équation

$$\frac{b x^2}{x_1 x_2 x_3} + \frac{b' y^2}{y_1 y_2 y_3} + \frac{b'' z^2}{z_1 z_2 z_3} = 0;$$

car, si l'on exprime que les deux points  $P_2$  et  $P_3$  sont conjugués par rapport à cette conique, on retrouve la condition qui exprime que le point  $P_1$  est situé sur la conique donnée.

THÉORÈME IV. — *Quand deux triangles sont circonscrits à une conique, leurs côtés forment deux systèmes de trois droites conjuguées par rapport à une même conique.*

En prenant pour axes les trois côtés du premier triangle, en désignant par  $D_i$ , comme précédemment, les équations des trois côtés du second, et par

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = 0$$

l'équation de la conique donnée, la conique cherchée a pour équation

$$\frac{ax^2}{u_1 u_2 u_3} + \frac{by^2}{v_1 v_2 v_3} + \frac{cz^2}{w_1 w_2 w_3} = 0.$$

Ces deux théorèmes sont les deux réciproques des deux précédents.

THÉORÈME V. — *Quand deux triangles sont inscrits à une conique, les six côtés sont tangents à une même conique.*

En prenant pour axes les côtés du premier et en désignant par

$$\frac{b}{x} + \frac{b'}{y} + \frac{b''}{z} = 0$$

l'équation de la conique donnée et par  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  les trois sommets du second, la droite  $P_1 P_2$  a pour équation

$$\frac{bx}{x_1 x_2} + \frac{b'y}{y_1 y_2} + \frac{b''z}{z_1 z_2} = 0,$$

puisque, si l'on exprime que cette droite passe par le point

$P_1$ , on retrouve la condition qui exprime que  $P_2$  est situé sur la conique donnée. La droite  $P_1P_2$  représente une tangente de la conique cherchée qui a pour équation

$$b \sqrt{\frac{x}{x_1 x_2 x_3}} + b' \sqrt{\frac{y}{y_1 y_2 y_3}} + b'' \sqrt{\frac{z}{z_1 z_2 z_3}} = 0,$$

puisque la condition de contact exprime que le point  $P_3$  est situé sur la conique donnée.

THÉORÈME VI. — *Quand deux triangles sont circonscrits à une conique, leurs six sommets sont situés sur une conique (\*)*.

En prenant pour axes les côtés du premier et en désignant par

$$\sqrt{bx} + \sqrt{b'y} + \sqrt{b''z} = 0$$

l'équation de la conique donnée, et par  $D_i(u_i, v_i, w_i)$  les trois côtés du second, le point d'intersection de  $D_1$  et  $D_2$  a ses coordonnées proportionnelles à

$$\frac{b}{u_1 u_2}, \quad \frac{b'}{v_1 v_2}, \quad \frac{b''}{w_1 w_2},$$

puisque, si l'on exprime que ce point est sur la droite  $D_1$ , on retrouve la condition qui exprime que  $D_2$  est tangente à la conique donnée. Le point d'intersection des droites  $D_1$  et  $D_2$  est situé sur la conique cherchée

$$\frac{b^2}{u_1 u_2 u_3 x} + \frac{b'^2}{v_1 v_2 v_3 y} + \frac{b''^2}{w_1 w_2 w_3 z} = 0,$$

puisque, si l'on exprime que ce point est sur cette conique, on retrouve la condition de contact de la droite  $D_3$  à la conique donnée.

THÉORÈME VII. — *Si des trois sommets d'un triangle on mène des tangentes à une conique quelconque, leurs*

---

(\*) CHASLES, *Traité des Sections coniques*, p. 53.

points d'intersection avec les côtés opposés sont six points situés sur une conique (\*).

En prenant le triangle donné pour triangle de référence et en désignant par

$$S = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

l'équation de cette conique, les tangentes menées du sommet opposé à l'axe des  $x$  ont pour équation

$$aS - (ax + b'y + b'z)^2 = 0,$$

ou, en développant et en désignant par  $A$  et  $B$  les expressions connues  $a'a'' - b^2$  et  $b'b'' - ab$  et par  $A'$ ,  $B'$ ,  $A''$ ,  $B''$  les expressions analogues,

$$A''y^2 + A'z^2 - 2Byz = 0.$$

En multipliant par  $A$ , on voit immédiatement, à cause de la symétrie, que la conique cherchée a pour équation

$$\begin{aligned} A'A''x^2 + A''Ay^2 + AA'z^2 - 2AByz \\ - 2A'B'zx - 2A''B''xy = 0. \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire les différents cas particuliers, et de démontrer les théorèmes corrélatifs.

#### REMARQUE SUR LA QUESTION 1129, RÉSOLUE PAGE 85 ;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Le rapport de la hauteur du triangle cherché à l'hypoténuse est  $\frac{4}{9}$ , ce qui donne un moyen fort simple de construire ce triangle par homothétie.

(\*) CHASLES, *Traité des Sections coniques*, p. 62.

---

---

QUESTIONS.

---

1178. Soient P un point pris sur l'axe d'une conique à centre, et MN une tangente quelconque limitée aux deux perpendiculaires élevées aux extrémités de cet axe : démontrer que la puissance du point P, par rapport à la circonférence de diamètre MN, est constante.

(LAISANT.)

1179. Soient MN une tangente quelconque à une parabole, limitée en M à la tangente au sommet et en N à une perpendiculaire fixe quelconque, élevée sur l'axe de la courbe; P un point fixe quelconque pris sur cet axe : démontrer que la puissance du point M, par rapport à la circonférence de diamètre NP, est constante.

(LAISANT.)

1180. Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient 24 sur le côté de la base.

(ÉDOUARD LUCAS.)

---

---

RECTIFICATIONS.

---

Tome XIV, page 75, ligne 5, en remontant :

au lieu de  $t = 8n \pm 1$ , lisez  $t = 8n \pm 3$ .

» page 239, ligne 4, en remontant :

au lieu de Leomare, lisez Lamaze.

---

---



---

**SUR LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES**

( voir même tome, p. 265 );

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

La méthode que nous avons employée précédemment permet de démontrer encore les théorèmes suivants :

**THÉORÈME.** — *Les arêtes de deux trièdres trirectangles ayant le même sommet forment six génératrices d'un même cône du second ordre.*

En prenant, en effet, pour axes des coordonnées les trois arêtes du premier, et en désignant par

$$\frac{x}{a_i} = \frac{y}{b_i} = \frac{z}{c_i},$$

pour  $i = 1, 2, 3$ , les équations des arêtes  $D_i$  du second, le cône cherché a pour équation

$$\frac{a_1 a_2 a_3}{x} + \frac{b_1 b_2 b_3}{y} + \frac{c_1 c_2 c_3}{z} = 0,$$

puisque, si l'on exprime que la droite  $D_1$ , par exemple, se trouve tout entière sur le cône, on retrouve la condition qui exprime que les droites  $D_2$  et  $D_3$  sont rectangulaires.

**THÉORÈME.** — *Deux systèmes de trois diamètres conjugués d'une surface du second ordre à centre unique forment six génératrices d'un même cône du second ordre.*

Désignons par

$$M.x^2 + N.y^2 + P.z^2 = 1$$

l'équation de la surface du second ordre rapportée au

premier système, et par

$$\frac{x}{a_i} = \frac{y}{b_i} = \frac{z}{c_i},$$

pour  $i = 1, 2, 3$ , les trois diamètres  $D_i$  formant le second système. Le cône cherché a pour équation

$$M \frac{a_1 a_2 a_3}{x} + N \frac{b_1 b_2 b_3}{y} + P \frac{c_1 c_2 c_3}{z} = 0,$$

puisque, si l'on exprime que la droite  $D_1$  est située sur ce cône, on retrouve la condition qui exprime que les droites  $D_2$  et  $D_3$  sont conjuguées par rapport à la surface donnée.

On démontre de la même manière les deux théorèmes suivants :

**THÉORÈME.** — *Les faces de deux trièdres trirectangles forment six plans tangents d'un même cône du second ordre.*

**THÉORÈME.** — *Deux systèmes de trois plans diamétraux conjugués d'une surface du second ordre à centre unique forment six plans tangents d'un même cône du second ordre.*

Si, en effet,

$$a_i x + b_i y + c_i z = 0,$$

pour  $i = 1, 2, 3$ , représente l'équation d'un plan diamétral du second système dans la surface

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = 1,$$

rapportée aux trois plans du premier, le cône cherché a pour équation

$$\sqrt{\frac{a_1 a_2 a_3 x}{M}} + \sqrt{\frac{b_1 b_2 b_3 y}{N}} + \sqrt{\frac{c_1 c_2 c_3 z}{P}} = 0.$$



L'avantage de ce genre de démonstration, qui rentre dans la méthode synthétique, consiste non-seulement dans la brièveté, mais dans l'établissement de l'équation de la courbe ou de la surface, ce qui permet de déduire aisément les propriétés métriques correspondantes.

THÉORÈME. — *Si, sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, on prend trois couples de points qui divisent harmoniquement ces trois diagonales, les six points seront situés sur une conique.*

En prenant pour triangle de référence le triangle diagonal du quadrilatère et les équations des côtés du quadrilatère sous la forme

$$\frac{x}{x_1} \pm \frac{y}{y_1} \pm \frac{z}{z_1} = 0,$$

les deux sommets du quadrilatère situés sur l'axe des  $z$  sont donnés avec  $z = 0$  par les équations

$$\frac{x}{x_1} \pm \frac{y}{y_1} = 0,$$

et l'équation d'un faisceau de deux droites conjuguées harmoniques des deux précédentes est, quelle que soit la valeur de  $\nu$ ,

$$\frac{x_2}{x_1^2} + \frac{y_2}{y_1^2} - 2\nu \frac{xy}{x_1 y_1} = 0,$$

et les traces de ces droites sur l'axe des  $z$  sont situées sur la conique ayant pour équation

$$\frac{x_2}{x_1^2} + \frac{y_2}{y_1^2} + \frac{z_2}{z_1^2} - 2\lambda \frac{xz}{y_1 z_1} - 2\mu \frac{zx}{z_1 x_1} - 2\nu \frac{xy}{x_1 y_1} = 0,$$

dont la forme symétrique démontre immédiatement le théorème proposé.

On en déduit la proposition suivante :

*Si une conique divise harmoniquement deux diagonales d'un quadrilatère complet, elle divise aussi harmoniquement la troisième.*

On dit, dans ce cas, que le quadrilatère et la conique sont conjugués, et l'équation précédente, qui représente l'équation générale des coniques conjuguées au quadrilatère, contient trois paramètres arbitraires (\*).

**THÉORÈME.** — *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle à deux points quelconques se coupent en de nouveaux points dont les projections sur les côtés correspondants forment six points situés sur une conique.*

Considérons deux points  $P_1$  et  $P_2$  dans le plan du triangle de référence  $ABC$ ; les droites  $BP_1$ ,  $CP_2$  et  $BP_2$ ,  $CP_1$  se coupent en deux points distincts de  $P_1$  et  $P_2$ , dont les projections sur l'axe des  $x$  sont données par l'équation

$$\frac{y^2}{y_1 y_2} + \frac{z^2}{z_1 z_2} - yz \left( \frac{x_1}{x_2 y_1 z_1} + \frac{x_2}{x_1 y_2 z_2} \right) = 0;$$

par conséquent, en opérant de même pour les autres sommets, on obtient six points situés sur la conique

$$\frac{x^2}{x_1 x_2} + \frac{y^2}{y_1 y_2} + \frac{z^2}{z_1 z_2} - yz \left( \frac{x_1}{x_2 y_1 z_1} + \frac{x_2}{x_1 y_2 z_2} \right) - \dots = 0.$$

En retranchant cette équation de celle de la conique

$$\frac{x^2}{x_1 x_2} + \frac{y^2}{y_1 y_2} + \frac{z^2}{z_1 z_2} - yz \left( \frac{1}{y_1 z_2} + \frac{1}{y_2 z_1} \right) - \dots = 0,$$

qui passe par les six projections de  $P_1$  et de  $P_2$ , on obtient l'équation d'une conique circonscrite au triangle de

---

(\*) CHASLES, *Traité des Sections coniques*, t. I, p. 96. — P. SERRET, *Géométrie de direction*, p. 261.

référence, et dont la position du centre d'homologie donne lieu à diverses propriétés métriques.

Cette conique passe par les points d'intersection des deux premières.

**THÉORÈME.** — *Si, par les trois points conjugués d'un point par rapport aux trois côtés d'un triangle pris pour axes de référence, on mène des tangentes à une conique, leurs traces sur les axes correspondants forment six points d'une conique.*

Nous appelons *points conjugués* d'un point donné par rapport à un triangle les trois points d'intersection des polaires de ce point par rapport à deux des angles de ce triangle.

Désignons par

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0$$

l'équation de la conique donnée, et par  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  le point donné. Le point conjugué de ce point par rapport à l'axe des  $z$  a pour coordonnées proportionnelles  $x_1, y_1, -z_1$ ; et les tangentes menées de ce point à la conique donnée ont pour traces sur l'axe des  $z$  les deux points fournis par les équations  $z = 0$  et

$$x^2(A''y_1^2 + A'z_1^2 + 2By_1z_1) + y^2(A''x_1^2 + Az_1^2 + 2B'z_1x_1) - 2xy[A''x_1y_1 + z_1(Bx_1 + B'y_1 + B''z_1)] = 0.$$

Ces deux points et les quatre analogues sont situés sur la conique

$$\begin{aligned} x^2(A''y_1^2 + A'z_1^2 + 2By_1z_1) + y^2(A''x_1^2 + Az_1^2 + 2B'z_1x_1) \\ + z^2(A'x_1^2 + Ay_1^2 + 2B''x_1y_1) \\ - 2Ay_1z_1yz - 2A'z_1x_1zx - 2A''x_1y_1xy \\ - z(Bx_1 + B'y_1 + B''z_1)(xyz_1 + yzx_1 + zxy_1) = 0. \end{aligned}$$

Ce théorème comporte un grand nombre de cas particuliers, ainsi qu'en corrélation.

THÉORÈME. — *Les droites qui joignent un point aux traces d'une droite sur les côtés du triangle de référence rencontrent les autres côtés en six points situés sur une conique.*

En désignant par  $P_1 (x_1, y_1, z_1)$  et par  $D_1 (u, v, w)$  le point et la droite donnés, la conique cherchée a pour équation

$$\frac{u}{x_1} (v y_1 + w z_1) x^2 + \dots \\ - \frac{y z}{y_1 z_1} [v w y_1 z_1 + (u x_1 + v y_1)(u x_1 + w z_1)] - \dots = 0.$$

Ce théorème est un cas particulier du suivant, généralisation du théorème de Pascal :

*Si deux cubiques ont trois points communs en ligne droite, les six autres points d'intersection sont situés sur une conique.*

Nous compléterons enfin le théorème de M. Chasles, démontré dans l'article précédent. Nous avons vu que, si, par les trois sommets d'un triangle, on mène des tangentes à une conique

$$f(x, y, z) = 0,$$

leurs traces sur les côtés opposés sont situées sur la conique

$$\Phi = \Lambda' \Lambda'' x^2 + \Lambda'' \Lambda y^2 + \Lambda \Lambda' z^2 \\ - 2 \Lambda B y z - 2 \Lambda' B' z x - 2 \Lambda'' B'' x y = 0.$$

L'équation de la conique  $\Phi$  peut s'écrire

$$B^2 x^2 + B'^2 y^2 + B''^2 z^2 - 2 B' B'' y z \\ - 2 B'' B z x - 2 B B' x y + \delta f(x, y, z) = 0,$$

$\delta$  désignant le discriminant de  $f$ , et, par conséquent, les

coniques  $f$  et  $\varphi$  ont leurs points d'intersection sur la conique

$$\sqrt{Bx} + \sqrt{B'y} + \sqrt{B''z} = 0,$$

inscrite dans le triangle de référence.

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

*Question 1171*

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIV, p. 240);

PAR M. L. MICHEL, au Puy.

*Soient M, A, B trois points d'une circonférence ; trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles tangentes en A, B aux droites MA, MB, lorsque le point M se déplace sur la circonférence.*

(LAISANT.)

Quand le point M se déplace sur la circonférence, l'angle en M reste constant. Or, on sait que l'angle de deux tangentes à la parabole est égal à la moitié de l'angle sous lequel on voit du foyer la corde de contact. Si donc on désigne par F un point du lieu, l'angle AFB est constant ; le lieu est par suite une circonférence de cercle facile à déterminer.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc ; G. Vandame ; A. Bertrand ; Gambey ; Lez ; Goulin et Nivelles, élèves du lycée de Rouen ; P. S., de Cherbourg ; A. Durel, répétiteur au lycée du Havre ; F. Pitois, élève du collège d'Annecy ; Chadu ; Gondelon, élève du lycée de Moulins ; Tourrettes ; A. Pellissier ; L. Arriu ; Launoy, à Lille ; Chabanel, à Reims.

Ou les déterminants  $K'_1, K'_2$  ne sont pas nuls tous deux : impossibilité ;

Ou ces deux déterminants sont nuls : les  $n$  équations se réduisent aux  $(n - 2)$  dernières ; on peut se donner  $x_1$  et  $x_2$  arbitrairement, et alors on a, pour les  $(n - 2)$  autres inconnues, un système unique de valeurs. Etc., etc.

---

## DE QUELQUES NOUVELLES FORMULES DE SOMMATION ;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

---

1. Considérons la série de  $x$  quantités

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_p, \dots, u_x,$$

et formons une table de multiplication en écrivant successivement les uns au-dessous des autres les produits des termes de la série par ceux de la série

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_p, \dots, v_x;$$

la somme des termes de la table sera égale au produit des sommes des deux séries que nous désignerons par  $U_x$  et  $V_x$ , ainsi qu'on le voit en faisant l'addition par lignes ou par colonnes.

D'autre part, en prenant seulement les  $p$  premiers termes de la table qui se trouvent dans la  $p^{\text{ième}}$  ligne et les  $p - 1$  premiers de la  $p^{\text{ième}}$  colonne, on a, pour expression de leur somme,

$$u_p V_p + v_p U_p - u_p v_p,$$

et, par suite, en faisant la somme de ces expressions de  $p = 1$  à  $p = x$ , on a la formule

$$(1) \quad U_x V_x - \sum_{p=1}^{p=x} (u_p V_p + v_p U_p) + \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p = 0.$$

En supposant, par exemple,

$$u_p = \frac{1}{p(p+1)}, \quad v_p = a^p,$$

on en déduit

$$\sum_{p=1}^{p=x} \frac{a^p}{p(p+1)} [1 + (a-1)p^2] = \frac{x}{x+1} a^{x+1},$$

et, en effectuant le quotient de  $1 + (a-1)p^2$  par  $p(p+1)$ , on a aussi

$$\sum_{p=1}^{p=x} \frac{1 - (a-1)^p}{p(p+1)} a^p = a - \frac{a^{x+1}}{x+1}.$$

En particulier, pour  $a = 2$  et  $2a = 1$ , on a les formules

$$\frac{1}{2.3} 2 + \frac{2}{3.4} 2^2 + \frac{3}{4.5} 2^3 + \dots + \frac{p}{(p+1)(p+2)} 2^p = \frac{2^{p+1}}{p+2} - 1,$$

$$\frac{3}{1.2} \frac{1}{2} + \frac{4}{2.3} \frac{1}{2^2} + \frac{5}{3.4} \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{p+2}{p(p+1)} \frac{1}{2^p} = 1 - \frac{1}{(p+1)2^p}.$$

## 2. Considérons une troisième série de quantités

$$w_1, w_2, w_3, \dots, w_p, \dots, w_x,$$

et plaçons les unes au-dessus des autres les tables obtenues en multipliant tous les termes de la première table successivement par tous les termes de la troisième série. Nous formerons ainsi un cube, sorte de Table de multiplication à trois entrées, et le compartiment ayant pour coordonnées  $p, q, r$  contiendra le produit  $u_p v_q w_r$ .

Cela posé, considérons successivement les cubes ayant, à partir de l'origine  $1, 2, 3, \dots, p$  unités de côté, et cherchons la somme des termes qu'il faut ajouter au  $(p-1)^{i^{\text{ème}}}$  cube pour obtenir le  $p^{\text{ième}}$ . Elle a pour ex-

pression

$$(u_p V_p + v_p U_p - u_p v_p)(W_p - \omega_p) + \omega_p U_p V_p,$$

et, puisque la somme des termes de toute la table est égale au produit des sommes des trois séries, on a

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} U_x V_x W_x - \sum_{p=1}^{p=x} u_p V_p W_p - \sum_{p=1}^{p=x} v_p W_p U_p - \sum_{p=1}^{p=x} \omega_p U_p V_p \\ + \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p W_p + \sum_{p=1}^{p=x} v_p \omega_p U_p + \sum_{p=1}^{p=x} \omega_p u_p V_p \\ - \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p \omega_p = 0. \end{array} \right.$$

Dans le cas où les trois séries sont identiques, on a

$$U_x^3 - 3 \sum_{p=1}^{p=x} u_p U_p^2 + 3 \sum_{p=1}^{p=x} u_p^2 U_p - \sum_{p=1}^{p=x} u_p^3 = 0.$$

On a, de même, par une voie analogue, la formule générale

$$(3) U_x^n - n_1 \sum_{p=1}^{p=x} u_p U_p^{n-1} + n_2 \sum_{p=1}^{p=x} u_p^2 U_p^{n-2} + \dots + (-1)^n \sum_{p=1}^{p=x} u_p^n = 0,$$

dans laquelle  $n_1, n_2, n_3, \dots$  représentent les coefficients de la puissance  $n$  du binôme.

Si l'on fait, dans cette formule,  $u_p = 1$ , on obtient, en désignant par  $S_m$  la somme des  $m^{\text{ièmes}}$  puissances des  $x$  premiers nombres,

$$x^n - n_1 S_{n-1} + n_2 S_{n-2} - \dots \pm S_0.$$

3. Considérons les trois développements de

$$(x+1)^m, \quad (x+1)^m + (x-1)^m, \quad (x+1)^m - (x-1)^m,$$



remplaçons-y successivement  $x$  par  $1, 2, 3, \dots, x$ , et ajoutons dans chaque cas les  $x$  égalités obtenues, nous trouvons les formules

$$(4) \begin{cases} (x+1)^m - 1 = m_1 S_{m-1} + m_2 S_{m-2} + \dots + m_1 S_1 + S_0, \\ (x+1)^m - x^m - 1 = 2(m_2 S_{m-2} + m_4 S_{m-4} + \dots), \\ (x+1)^m + x^m - 1 = 2(m_1 S_{m-1} + m_3 S_{m-3} + \dots), \end{cases}$$

qui permettent de calculer  $S_m$  lorsque l'on connaît  $S_{m-1}, S_{m-2}, S_{m-3}, \dots$ .

La première de ces formules nous montre, à l'aide des valeurs de  $S_0$  et de  $S_1$ , que  $S_m$  est toujours divisible par le produit  $x(x+1)$ . En retranchant  $2x$  du premier membre de la seconde des formules (4), et  $2S_0$  du second membre, on voit que le premier membre

$$f(x) = (x+1)^{2i} - x^{2i} - 2x - 1$$

s'annule pour  $x = -\frac{1}{2}$ , si  $m$  est pair et égal à  $2i$ ; donc  $S_{2i}$  est divisible par  $S_2$ . De même, en faisant passer dans le premier membre de la même formule le terme en  $S_1$ , dans le cas de  $m$  impair et égal à  $2i+1$ , on obtient

$$\varphi(x) = (x+1)^{2i+1} - x^{2i+1} - (2i+1)x(x+1) - 1,$$

et, puisque la dérivée de cette expression s'annule aussi pour  $x = 0$  et  $x = -1$ , on en conclut que  $S_{2i+1}$  est divisible par  $S_1^2$  ou  $S_3$ . On déduit de ce qui précède le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *La somme des  $m^{\text{ièmes}}$  puissances des  $x$  premiers nombres entiers est divisible par la somme des carrés ou des cubes des  $m$  premiers nombres, suivant que  $m$  est pair ou impair (\*).*

---

(\*) Ce théorème, que nous compléterons plus loin, se trouve énoncé par M. Prouhet dans la Note VI du *Cours d'Analyse* de Sturm, t. II, p. 375. Voir aussi le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, t. I, p. 352.

4. On a pour expression générale de  $S_m$

$$(5) \left\{ \begin{aligned} (2i+1)S_{2i} &= x^{2i+1} + \frac{2i+1}{2} x^{2i} + [2i+1]_2 B_1 x^{2i-1} + \dots \\ &\quad - (-1)^r [2i+1]_{2r} B_r x^{2i-2r+1} - \dots \\ &\quad - (-1)^i [2i+1]_{2i} B_i x, \\ (2i+2)S_{2i+1} &= x^{2i+2} + \frac{2i+2}{2} x^{2i+1} + [2i+2]_2 B_1 x^{2i} + \dots \\ &\quad - (-1)^r [2i+2]_{2r} B_r x^{2i-2r+2} - \dots \\ &\quad - (-1)^i [2i+2]_{2i} B_i x^2, \end{aligned} \right.$$

et l'on a aussi

$$\frac{dS_{2i+1}}{dx} = (2i+1)S_{2i}, \quad \frac{dS_{2i}}{dx} = 2i S_{2i-1} - (-1)^i B_i.$$

Les facteurs numériques  $B_r$  sont connus sous le nom de *nombre de Bernoulli*. Au lieu de les déterminer, ainsi qu'on le fait habituellement, à l'aide des développements en séries, on peut opérer comme il suit. En remarquant que  $S_m = 1$  pour  $x = 1$  et que  $S_{2i}$  s'annule pour  $x = -\frac{1}{2}$ , on obtient les trois formules suivantes :

$$(6) \left\{ \begin{aligned} i - \frac{1}{2} &= [2i+1]_2 B_1 - [2i+1]_4 B_2 + \dots - (-1)^i [2i+1]_{2i} B_i, \\ i &= [2i+2]_2 B_1 - [2i+2]_4 B_2 + \dots - (-1)^i [2i+2]_{2i} B_i, \\ 2i &= [2i+1]_2 2^2 B_1 - [2i+1]_4 2^4 B_2 + \dots \\ &\quad - (-1)^i [2i+1]_{2i} 2^{2i} B_i. \end{aligned} \right.$$

La substitution de  $x = 2$  dans les valeurs de  $S_{2i}$  et  $S_{2i+1}$  donne de même

$$\begin{aligned} \frac{2i+1}{2^{2i+1}} + \frac{2i-3}{4} &= [2i+1]_2 \frac{B_1}{2^2} - [2i+1]_4 \frac{B_2}{2^4} + \dots \\ &\quad - (-1)^i [2i+1]_{2i} \frac{B_i}{2^{2i}}, \\ \frac{2i+2}{2^{2i+2}} + \frac{2i-2}{4} &= [2i+2]_2 \frac{B_1}{2^2} - [2i+2]_4 \frac{B_2}{2^4} + \dots \\ &\quad - (-1)^i [2i+2]_{2i} \frac{B_i}{2^{2i}}. \end{aligned}$$

Et d'ailleurs, toutes ces formules se démontrent aisément par induction, en faisant voir : 1° que si, pour une valeur déterminée de  $x$ , elles sont vraies pour les sommes  $S_m, S_{m-1}, \dots$ , elles sont vérifiées pour  $S_m$ ; 2° que si, pour toute valeur déterminée de  $m$ , elles sont vraies pour toutes les valeurs 1, 2, 3, ...,  $x$  de  $x$ , elles sont encore vérifiées pour cette dernière valeur de  $x$  augmentée de l'unité.

5. En posant, dans la formule (1),

$$u_p = p^m, \quad v_p = p^n,$$

nous obtenons la formule suivante, dans laquelle il est important de tenir compte de la parité ou de l'imparité de  $m$  et de  $n$ ,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} S_m S_n &= \left( \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} \right) S_{m+n+1} + \frac{m+n}{2} B_1 S_{m+n-1} \\ &- \frac{m_3+n_3}{4} B_2 S_{m+n-3} + \frac{m_5+n_5}{6} B_4 S_{m+n-5} + \dots, \end{aligned} \right.$$

et, pour  $m = n$ ,

$$\frac{m+1}{2} S_m^2 = S_{2m+1} + [m+1]_2 B_1 S_{2m-1} \\ - [m+1]_4 B_2 S_{2m-3} + [m+1]_6 B_3 S_{2m-5} + \dots,$$

qui donne, comme cas particuliers (\*),

$$\begin{aligned} S_1^2 &= S_3, \\ S_2^2 &= \frac{2}{3} S_5 + \frac{1}{3} S_3, \\ S_3^2 &= \frac{1}{2} S_7 + \frac{1}{2} S_5, \\ S_4^2 &= \frac{2}{5} S_9 + \frac{2}{3} S_7 - \frac{1}{15} S_5, \\ &\dots \end{aligned}$$

---

(\*) Voir *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. IX, p. 49.

et inversement

$$\begin{aligned}
2S_3 &= 2S_1^2, \\
2S_5 &= 3S_2^2 - S_1^2, \\
2S_7 &= 4S_3^2 - 3S_2^2 + S_1^2, \\
2S_9 &= 5S_4^2 - \frac{20}{3}S_3^2 + \frac{11}{2}S_2^2 - \frac{11}{6}S_1^2, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

et il serait facile de trouver la loi générale des coefficients.

L'équation (7) fait voir : 1° en supposant  $m$  et  $n$  de même parité, que  $S_{2i+1}$  est algébriquement divisible par  $S_1^2$ , et que le quotient est une fonction entière de  $S_1$ ; 2° en supposant  $m$  et  $n$  de parité différente, que  $S_{2i}$  est algébriquement divisible par  $S_2$ , et que le quotient est encore une fonction entière de  $S_1$ . Ces propriétés permettent de calculer facilement les sommes  $S$ . En désignant par  $q_{2i+1}$  et par  $q_{2i}$  les quotients de  $S_{2i+1}$  par  $S_1^2$ , et de  $S_{2i}$  par  $S_2$ , et faisant successivement  $n = 1$  et  $n = 2$  dans cette formule, nous obtenons, en posant  $y = 2S_1 = x(x + 1)$ ,

$$\begin{aligned}
(i + 1)y q_{2i+1} &= (i + 2)q_{2i+3} + [2i + 2]_2 B_1 q_{2i+1} \\
&\quad - [2i + 2]_i B_2 q_{2i-1} + \dots - (-1)^i [2i + 2]_{2i} B_i, \\
\frac{i + 1}{2} y^2 q_{2i+1} &= \frac{2i + 5}{3} q_{2i+4} + [2i + 2]_2 B_1 q_{2i+2} \\
&\quad - [2i + 2]_4 B_2 q_{2i} + \dots - (-1)^i [2i + 2]_{2i} B_i.
\end{aligned}$$

Ces deux formules donnent successivement, pour  $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ , les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
q_3 &= 1, \\
q_5 &= \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}, \\
q_7 &= \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}, \\
q_9 &= \frac{2}{5}y^3 - \frac{3}{5}y^2 + \frac{6}{5}y - \frac{3}{5}, \\
q_{11} &= \frac{1}{3}y^4 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{17}{6}y^2 - \frac{10}{3}y + \frac{5}{3}, \\
q_{13} &= \frac{2}{7}y^5 - \frac{5}{3}y^4 + \frac{82}{15}y^3 - \frac{236}{21}y^2 + \frac{1382}{105}y - \frac{691}{105}, \\
q_{15} &= \frac{1}{4}y^6 - \frac{6}{3}y^5 + \frac{28}{3}y^4 - \frac{88}{3}y^3 + \frac{359}{5}y^2 - 70y + 35, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

et

$$3q_2 = 3,$$

$$5q_4 = 3y - 1,$$

$$7q_6 = 3y^2 - 3y + 1,$$

$$9q_8 = 3y^3 - 6y^2 + \frac{2^7}{3^2}y - \frac{9}{5},$$

$$11q_{10} = 3y^4 - 10y^3 + 17y^2 - 15y + 5,$$

$$13q_{12} = 3y^5 - 15y^4 + 41y^3 - \frac{4^7 \cdot 2}{7^2}y^2 + \frac{2^0 \cdot 7^3}{3^5}y - \frac{6 \cdot 9 \cdot 1}{3^5},$$

.....

Les coefficients des diverses puissances de  $y$  sont alternativement positifs et négatifs, comme cela résulte de la loi de sommation. On peut trouver aussi la loi des coefficients, en remarquant que pour  $y = 2$  on a  $q = 1$ . On observera que  $q_{10}$  est divisible par  $y - 1$ .

A l'aide des formules (2) et (3), on peut encore exprimer  $S_m S_n S_p$  et  $S_m^3$  en fonction linéaire des sommes  $S$ , et généraliser ces résultats. On retrouverait ainsi, comme cas particuliers, les formules

$$4S_1^3 = 3S_3 + S_3,$$

$$12S_2^3 = 16S_6 - 5S_4 + S_2,$$

.....

qui seraient les deux premières d'une série de formules analogues qui ont été indiquées par M. Éd. Amigues (\*).

### CONCOURS GÉNÉRAL DE 1874;

PAR M. MORET-BLANC.

#### *Mathématiques spéciales.* (Paris.)

Démontrer que la forme la plus générale d'un polynôme entier  $F(x)$ , satisfaisant aux relations

$$F(1-x) = F(x),$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{F(x)}{x^m},$$

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. X, p. 81 et 117.

connaissant  $R, r, r', r'', r'''$ , et, par les autres, on résout la question inverse.

*Seconde question.* — Si l'on suppose que les trois cercles de l'énoncé précédent soient remplacés par les trois cercles analogues, tangents extérieurement au cercle circonscrit à un triangle, et que l'on désigne par  $x_1, y_1, z_1$  les rayons des nouveaux cercles, on a

$$x_1 = \frac{4Rr'}{r'' + r'''}, \quad y_1 = \frac{4Rr''}{r' + r''}, \quad z_1 = \frac{4Rr'''}{r' + r''}, \quad x_1 y_1 z_1 = 16R^2 r,$$

$$32R^3 - 2R(y_1 z_1 + x_1 z_1 + x_1 y_1) - x_1 y_1 z_1 = 0,$$

$$4x_1 y_1 z_1 r^3 - [(y_1 z_1 + x_1 z_1 + x_1 y_1)r - x_1 y_1 z_1]^2 = 0,$$

et, si l'on pose

$$\frac{r + 4R}{2Rm} = \frac{1}{x_1 + 4R} + \frac{1}{y_1 + 4R} + \frac{1}{z_1 + 4R},$$

on a aussi

$$r' = \frac{m x_1}{x_1 + 4R}, \quad r'' = \frac{m y_1}{y_1 + 4R}, \quad r''' = \frac{m z_1}{z_1 + 4R}.$$

*Nota.* — Pour résoudre les questions précédentes, on pourra prendre pour point de départ les formules suivantes, faciles à démontrer :

$$x \cos^2 \frac{A}{2} = y \cos^2 \frac{B}{2} = z \cos^2 \frac{C}{2} = r,$$

$$x_1 \cos \frac{A}{2} = r', \quad y_1 \cos^2 \frac{B}{2} = r'', \quad z_1 \cos^2 \frac{C}{2} = r''.$$

## QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Trouver tous les systèmes de deux nombres entiers dont le quotient par leur somme de la somme de leurs cinquièmes puissances est un carré parfait.

Cette question, qui comprend comme cas particulier la question 1168, a, comme solutions simples,

$$(3, -1, 11), (8, 11, 2491), (123, 35, 13361), \\ (808, -627, 1169341), \dots$$

2. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^4 - 5x^2y^2 + 5y^4 = z^2.$$

3. Trouver tous les triangles rectangles ayant pour côtés des nombres entiers, et tels que le carré de l'hypoténuse, augmenté ou diminué du double de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.

4. Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que le carré de l'hypoténuse, augmenté ou diminué de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.

5. Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que l'aire du triangle augmentée des carrés construits sur les trois côtés soit égale à un carré parfait.

### BIBLIOGRAPHIE.

*Traité d'Arithmétique*, rédigé conformément aux programmes officiels; par H. SIGNOL, professeur de Mathématiques à Paris. Un vol. in-8, de 328 pages. Prix : 4 francs.

Ce Traité est divisé en cinq Livres.

Le Livre I<sup>er</sup> traite des quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers.

Le Livre II renferme les propriétés élémentaires des nombres.

*Le rayon de cette circonférence est la moitié du rayon du cercle circonscrit au quadrilatère  $A_2$ .*

Cette propriété présente une grande analogie avec le théorème des neuf points, démontré par Euler, pour le cas du triangle. Les huit points désignés dans l'énoncé correspondent aux milieux des trois côtés et aux pieds des trois hauteurs dans le cas du triangle. Les trois autres points, dans ce même cas, sont les milieux des droites qui joignent les sommets du triangle au point de rencontre des hauteurs. Dans le quadrilatère, ces trois derniers points ont pour correspondants les milieux des quatre droites qui joignent le centre perspectif, ou point de rencontre des hauteurs de  $A$ , aux sommets de  $A_2$ . Mais ces quatre points se confondent avec les pieds des quatre hauteurs de  $A$ .

THÉORÈME XXV. — *Le centre commun  $O$  des circonférences circonscrites aux quadrilatères  $A$  et  $A_2$  et le centre perspectif  $\alpha$  de  $A$  sont les foyers d'une ellipse qui a pour centre et pour grand axe le centre et le diamètre du cercle des douze points, pour tangentes les côtés du quadrilatère  $A$ , pour polaire focale la diagonale extérieure du même quadrilatère, et pour cercle directeur relatif au foyer  $\alpha$  le cercle circonscrit au quadrilatère  $A_2$ .*

---

## SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN FACTEURS

### PREMIERS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

---

Les opérations que l'on effectue habituellement pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers sont longues et pénibles, puisque l'on est obligé de faire



exactement les divisions de ce nombre, souvent très-grand, par une série de diviseurs que l'on essaye successivement. On peut, à l'aide de la remarque suivante, abrégér le calcul d'une manière notable. Considérons, par exemple, le nombre

$$\frac{2^{40} + 1}{2^8 + 1} = 4278255361,$$

dont tous les diviseurs sont de la forme  $80p + 1$ . Prenons les logarithmes des nombres de cette forme, compris entre 60 000 et 62 000, et retranchons-les du logarithme du nombre donné; nous pouvons déterminer exactement les cinq chiffres du quotient et former le tableau suivant :

Diviseurs.	631 2667		Quotients.
60 161	779 3150	851 9517	71 112
60 961	785 0521	846 2146	70 180
61 121	786 1905	845 0762	69 996
61 441	788 4583	842 8084	69 632
61 681	790 1514	841 1153	69 361

On rejettera d'abord tous les quotients non terminés par l'unité; puis, parmi ceux qui font exception, on rejettera tous ceux qui ne satisferont pas à la preuve par 9 ou par 11, en supposant la division exacte. Lorsque le calcul logarithmique ne donne pas un nombre suffisant de chiffres sur lesquels on peut compter, on peut obtenir le dernier, les deux ou les trois derniers, en déterminant, ce qui est facile, les trois derniers chiffres du quotient à l'aide des derniers chiffres du dividende et du diviseur, en supposant toujours la division exacte. J'ai ainsi démontré que le nombre pris pour exemple est premier. Il est plus grand que celui que Legendre considère, d'après Euler, comme le plus grand des nombres pre-

miers connus, à savoir :

$$2^{31} - 1 = 2147483647.$$

Nous remarquerons que le dernier nombre essayé dans le tableau donne le produit

$$61681 \times 69361 = 4278255841,$$

qui ne diffère que par deux chiffres du nombre donné.

J'observerai, à ce propos, qu'il serait bon, dans les Tables de logarithmes, d'indiquer par un signe placé à côté du dernier groupe, formant chacun des logarithmes de 10000 à 100000, le cas où le nombre considéré est premier. On aurait ainsi, sans plus d'espace et sans plus de frais, une Table des nombres premiers de 1 à 108000 avec le logarithme en regard, ce qui serait un véritable progrès dans l'étude de la théorie des nombres.

Nous indiquerons encore les décompositions suivantes :

$$30^{15} - 1 = 7^2 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 12211 \cdot 837931 \cdot 51941161,$$

$$30^{15} + 1 = 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 67 \cdot 271 \cdot 4831 \cdot 71261 \cdot 517831,$$

$$2^{41} + 1 = 3 \cdot 83 \cdot 8831418697.$$

J'ai essayé ce dernier nombre pour tous les facteurs premiers, inférieurs à 60000, et ainsi

$$57073 \times 154739 = 8831418947$$

ne diffère que par deux chiffres de ce nombre, et d'ailleurs le dernier facteur est divisible par 13. L'opération qui consiste à essayer les autres nombres premiers de 60000 à 95100, et qui comporterait une seule page de calculs, reste à faire; mais je n'ai pu continuer, n'ayant pas à ma disposition les Tables de Chernac. Il serait donc facile de s'assurer si ce nombre est premier, et, dans le cas de réussite, ce serait, je pense, le plus grand nombre premier connu actuellement.

---

---



---

**QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE ;**

 PAR M. ÉDOUARD LUCAS.
 

---

1. Si  $(x, y, z)$  représente une solution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = 0,$$

on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0,$$

$$AXx^2 + BYy^2 + CZz^2 = 0.$$

2. Si  $(x, y, z)$  et  $(x_1, y_1, z_1)$  désignent deux solutions distinctes de l'équation précédente, on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$AXxx_1 + BYyy_1 + CZzz_1 = 0.$$

3. L'équation biquadratique  $x^4 - 5y^4 = 1$  a pour solution, en nombres entiers,  $x = 3$ ,  $y = 2$ , et n'en a point d'autres.

4. La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais égale à un bicarré.

5. Trouver en nombres entiers toutes les solutions des deux progressions arithmétiques

$$\div x^2, 2y^2, 3z^2, 4u^2,$$

$$\div x^2, 3y^2, 5z^2, 7u^2,$$

et ainsi l'on a, pour la première,

$$\div 167^2 \cdot 2 \times 97^2 \cdot 3 \times 57^2 \cdot 4 \times 13^2, \text{ de raison } 9071$$

et, pour la seconde,

$$\div 607^2 \cdot 3 \times 303^2 \cdot 5 \times 191^2 \cdot 7 \times 113^2, \text{ de raison } 93022.$$

6. La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais égale à un bicarré.

7. Résoudre complètement l'équation

$$x^4 - 4x^2y^2 + y^4 = z^2,$$

dont Legendre a donné une solution incomplète (\*).

8. Trouver toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles la somme des cinquièmes puissances des  $x$  premiers nombres est un carré parfait.

## QUESTIONS

PROPOSÉES PAR M. C. MOREAU,

Capitaine d'Artillerie, à Calais.

1. Démontrer les formules

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right]^2 + \dots = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma^2(n+1)},$$

$$1 - \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 - \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right]^2 + \dots$$

$$= \cos \frac{n\pi}{2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)},$$

$$1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots = \frac{\sin n\pi}{n\pi},$$

et indiquer entre quelles limites elles sont exactes.

(\*) LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, t. II, p. 126.

NOUVELLES ANNALES  
DE  
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS  
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE.

REDIGÉ

PAR MM. GERONO,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,  
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME QUINZIÈME.

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,  
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET

---

PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
SUCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,  
Quai des Augustins, n° 55.

1876.

576-

# NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES.

---

---

## PROBLÈMES SUR L'ELLIPSE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

---

1. *Sur la construction géométrique des normales à une conique.*— Dans une Note ayant pour objet la solution du problème d'abaisser une normale sur l'ellipse, M. Painvin (\*) se sert d'un théorème extrait d'un Mémoire de M. Smith *Sur quelques problèmes cubiques et quadratiques*. L'emploi de ce théorème me paraît inutile, et je pense que la solution suivante est plus simple que la solution indiquée.

Soit  $P(\alpha, \beta)$  le point d'où l'on veut abaisser les normales à l'ellipse; si du sommet  $A$  on abaisse des perpendiculaires sur les normales, elles rencontrent la courbe en quatre points situés sur une circonférence, et la construction de celle-ci résout immédiatement la question proposée. On trouvera dans l'article cité la construction de l'axe radical de cette circonférence et du cercle homographique, et ainsi l'on déterminera une première droite contenant le centre. L'ordonnée  $\gamma_0$  du centre de cette circonférence a pour expression [voir la

---

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. IX, p. 348.

formule (II), p. 351 de l'endroit cité]

$$y_0 = 2 \frac{a\alpha\beta}{c^2}.$$

Soit D le centre de courbure du sommet A ; joignons le point D à la projection du point P sur l'axe des  $y$ , et, par la projection de ce point sur l'axe des  $x$ , menons une parallèle qui rencontre l'axe des  $y$  en Q ; l'ordonnée cherchée  $y_0$  sera le double de OQ.

2. *Sur la corde normale minima.* — Pour déterminer la position de la corde normale de longueur minima, on peut employer la remarque suivante, et j'ignore, en raison de sa simplicité, si cette remarque est nouvelle. Supposons une ellipse dont les dimensions sont telles que la développée la rencontre en des points réels ; on a  $a > b\sqrt{2}$ . Désignons par A l'un des points d'intersection, par AB la tangente à la développée normale à l'ellipse en B, par A'B' une tangente voisine, par A' le point de contact avec la développée, extérieur à l'ellipse et sur la même branche que A, par B' le pied de la normale, et par C l'autre point d'intersection de A'B' avec l'ellipse. On a

$$\text{arc } A'A + AB = A'C + CB',$$

et, puisque l'on a

$$\text{arc } A'A > A'C,$$

il en résulte, car la démonstration s'applique encore si A' est intérieur à l'ellipse,

$$B'C > AB,$$

et ainsi AB est la corde normale minima.

Le raisonnement s'applique d'ailleurs à la recherche de la longueur maxima ou minima de la normale à une courbe donnée C comptée de son pied jusqu'à son point d'intersection avec une courbe donnée C'. Les tangentes

à la développée de la courbe C en ses points d'intersection avec C' sont en général des normales maxima ou minima. On ne peut rien conclure par ce qui précède, lorsque la courbe C' coupe la développée de C à angle droit. On doit encore tenir compte des affections singulières que présentent ces trois courbes, et plus particulièrement des points de rebroussement de la développée.

### 3. Sur le triangle inscrit et concentrique à l'ellipse. —

En désignant par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les angles excentriques ou paramètres angulaires des sommets d'un triangle inscrit à l'ellipse, les coordonnées du centre du cercle circonscrit sont données par les équations (\*)

$$\frac{ax}{c^2} = + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2},$$

$$\frac{by}{c^2} = - \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

Si le triangle est concentrique à l'ellipse, on a

$$\gamma - \beta = \beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

Cela posé, la formule

$$\begin{aligned} & \cos^2 p \cos^2 q \cos^2 r + \sin^2 p \sin^2 q \sin^2 r \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} [\cos 2(p - q) + \cos 2(q - r) + \cos 2(r - p)] \\ &+ \frac{1}{8} [\cos 2(p + q) + \cos 2(q + r) + \cos 2(r + p)] \end{aligned}$$

---

(\*) SALMON, *Traité des sections coniques*, p. 306 de la traduction française. Nous ferons observer que cette dénomination d'*angle excentrique* est au moins bizarre. Cet angle porte, il est vrai, en Mécanique céleste, le nom d'*anomalie excentrique*, parce qu'il n'a point son sommet au foyer de l'orbite elliptique d'une planète, occupé par le centre du Soleil, mais cette dénomination n'a aucune raison d'être en Géométrie.



donne immédiatement

$$\left(\frac{4ax}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{4by}{c^2}\right)^2 = 1.$$

Le lieu du point d'intersection des hauteurs décrit un lieu homothétique (c'est la question 1173). On peut arriver plus simplement au résultat précédent; mais si j'ai opéré ainsi, c'est afin de donner une application de la formule trigonométrique employée ci-dessus.

*Remarque.* — La question de la corde normale minimum a été traitée (2<sup>e</sup> série, t. VII, p. 523, année 1868). Elle se trouve aussi traitée de même dans les *Problèmes* de M. Lonchampt.

## DE LA TRISECTION DE L'ANGLE A L'AIDE DU COMPAS SPHÉRIQUE

(voir 2<sup>e</sup> série, t. III, p. 222);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Dans une lettre de Descartes à Mersenne, en date du 8 octobre 1629, on trouve le passage suivant : « De diviser les cercles en 27 et 29, cela se peut mécaniquement, mais non point géométriquement; il est vrai qu'il se peut en 27, par le moyen d'un cylindre, encore que peu de gens en puissent trouver le moyen, mais non pas en 29, et, si l'on m'en veut envoyer la démonstration, j'ose vous promettre de faire voir que cela n'est pas exact. »

La construction des polygones réguliers de  $3^n$  côtés se déduit du principe suivant, qui résout le problème de la *trisection de l'angle* en se servant de figures décrites à l'aide d'un compas sur la surface d'un cylindre de révolution. Soient, en effet, ABC la base d'un cylindre de

rayon supposé égal à l'unité, A l'origine des arcs, B et C les extrémités de l'arc  $a$  donné et de l'arc supplémentaire. Du point B comme centre, on décrit sur la surface du cylindre une courbe sphérique passant par le point diamétralement opposé au point B; sur la génératrice passant par le point C, on prend un point D dont l'ordonnée est égale au cosinus de l'arc donné, et de ce point D, comme centre, on décrit sur la surface du cylindre une seconde courbe sphérique passant par le point diamétralement opposé au point C. Ces deux courbes se coupent en quatre points, situés dans un plan, dont les ordonnées sont égales à  $2 \cos a$  et aux trois valeurs de l'expression  $2 \cos \frac{a + 2k\pi}{3}$ , et dont les projections sur la circonférence de base sont les extrémités de quatre arcs respectivement égaux à  $2\pi - a$ , et aux trois valeurs cherchées de l'expression  $\frac{a + 2k\pi}{3}$ .

Telle est, je pense, l'interprétation que l'on doit donner du passage de Descartes, rapporté plus haut. La méthode employée permet aussi de construire les racines des équations du troisième et du quatrième degré.

*Vérification.* — En prenant pour axe des  $z$  l'axe du cylindre, et pour axe des  $x$  le rayon passant par le point A, les sphères décrites des points B et D ont pour équations

$$(x - r \cos a)^2 + (y - r \sin a)^2 + z^2 = 4r^2,$$

$$(x + r \cos a)^2 + (y - r \sin a)^2 + (z - r \cos a)^2 = 4r^2 + r^2 \cos^2 a;$$

ces équations sont simultanément vérifiées :

1<sup>o</sup> Pour

$$x = r \cos a, \quad y = -r \sin a, \quad z = 2r \cos a;$$

2<sup>o</sup> Pour

$$x = r \cos \frac{a + 2k\pi}{3}, \quad y = r \sin \frac{a + 2k\pi}{3}, \quad z = 2r \cos \frac{a + 2k\pi}{3}.$$


---

qui donne, pour  $\rho = 0$ ,

$$\begin{aligned} \Delta^{-m} f(x) &= \frac{(-1)^{m-1}}{h^{m-1} 1.2.3\dots(m-1)} \\ &\times \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^k [x-h, \dots, x-(m-1)h]_k \\ &\times \Delta^{-1} x^{m-1-k} f(x). \end{aligned}$$


---

## THÉORÈMES NOUVEAUX SUR LA PARABOLE ET L'HYPERBOLE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

En prenant l'équation de la parabole rapportée à des axes rectangulaires sous la forme

$$y = x^2,$$

l'aire d'un triangle inscrit  $P_1 P_2 P_3$  est, en désignant par  $x_1, x_2, x_3$  les abscisses des sommets, donnée par la formule

$$P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix},$$

et, d'après un théorème connu,

$$P_1 P_2 P_3 = -\frac{1}{2}(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2).$$

Les coordonnées du pôle  $Q_1$  de la corde  $P_2 P_3$  sont respectivement  $\frac{1}{2}(x_2 + x_3)$  et  $x_2 x_3$ , et, par suite, l'aire du triangle  $Q_1 Q_2 Q_3$ , correspondant au triangle inscrit  $P_1 P_2 P_3$ , est donnée par l'expression

$$Q_1 Q_2 Q_3 = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x_2 + x_3 & x_2 x_3 & 1 \\ x_3 + x_1 & x_3 x_1 & 1 \\ x_1 + x_2 & x_1 x_2 & 1 \end{vmatrix},$$

et l'on trouve aisément, en retranchant les deux dernières lignes de la première,

$$Q_1 Q_2 Q_3 = -\frac{1}{2} P_1 P_2 P_3.$$

On conclut de ce résultat le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *L'aire du triangle formé par trois tangentes à la parabole est égale à la moitié, prise en signe contraire, de l'aire du triangle formé par les trois points de contact.*

Désignons par  $R_i$  le point de contact de la tangente parallèle à  $P_2 P_3$  : l'abscisse  $x'$  de ce point est égale à  $\frac{1}{2}(x_2 + x_3)$ , et, en remplaçant  $x_i$  par  $x'_i$  dans l'expression de  $P_1 P_2 P_3$ , on en conclut la valeur de  $R_1 R_2 R_3$ , et par suite le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *L'aire du triangle formé par les points de contact des tangentes parallèles aux côtés d'un triangle inscrit à la parabole est égale au huitième, pris en signe contraire, de l'aire du triangle inscrit.*

Si, par le point  $P_1$ , on mène une parallèle à  $P_2 P_3$ , cette droite rencontre la parabole en un point  $S_1$  dont l'abscisse  $x''_1$  est égale à  $x_2 + x_3 - x_1$ , et en remplaçant, dans l'expression de  $P_1 P_2 P_3$ ,  $x_i$  par  $x''_i$ , on en conclut l'aire de  $S_1 S_2 S_3$ , et par suite le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si, par les sommets d'un triangle inscrit à la parabole, on mène des parallèles aux côtés opposés, ces droites rencontrent la parabole en trois points formant un triangle dont l'aire est égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle inscrit.*

Les coordonnées du pôle de  $P_1 S_1$  sont respectivement

$$x = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y = x_1(x_2 + x_3 - x_1).$$

et l'aire du triangle formé par les trois pôles a pour expression

$$\frac{1}{4} \begin{vmatrix} x_2 + x_3 & x_1(x_2 + x_3 - x_1) & 1 \\ x_3 + x_1 & x_2(x_3 + x_1 - x_2) & 1 \\ x_1 + x_2 & x_3(x_1 + x_2 - x_3) & 1 \end{vmatrix},$$

et, en retranchant les deux dernières lignes de la première, on obtient :

**THÉORÈME IV.** — *Si, par les sommets d'un triangle inscrit à la parabole, on mène des parallèles aux côtés opposés, les pôles de ces droites forment un triangle dont l'aire est égale à celle du triangle inscrit.*

En désignant par  $T_1$  et  $U_1$  les points de contact des tangentes parallèles à  $P_1 R_1$  et  $R_1 S_1$ , les triangles  $T_1 T_2 T_3$ ,  $U_1 U_2 U_3$ , les triangles formés par les pôles de  $P_1 R_1$ ,  $P_1 T_1$ ,  $P_1 U_1$ ,  $R_1 S_1, \dots$  et par les pôles analogues, ainsi que les triangles formés par les points de contact des tangentes parallèles à ces diverses droites et aux droites analogues, donnent lieu à un grand nombre de théorèmes semblables à ceux que nous avons indiqués, et dont les démonstrations fournissent ainsi des exercices curieux et variés sur la théorie des déterminants.

Considérons maintenant deux triangles  $A_1 A_2 A_3$  et  $P_1 P_2 P_3$  inscrits à la parabole, et désignons par  $a_1, a_2, a_3$  et  $x_1, x_2, x_3$  les abscisses de ces points. Menons par le point  $A_1$  une parallèle à  $P_2 P_3$ , et désignons par  $B_1$  son point d'intersection avec la parabole; l'abscisse de ce point est égale à  $x_2 + x_3 - a_1$ , et l'aire du triangle  $B_1 B_2 B_3$  a pour expression

$$\frac{1}{2} (a_2 + x_2 - a_3 - x_3)(a_3 + x_3 - a_1 - x_1)(a_1 + x_1 - a_2 - x_2).$$

Menons maintenant par le point  $P_1$  une parallèle à  $A_2 A_3$ , et désignons par  $C_1$  son point d'intersection avec la para-

bole; l'abscisse de ce point est égale à  $a_2 + a_3 - x_1$ , et l'aire du triangle  $C_1 C_2 C_3$  est égale à celle de  $B_1 B_2 B_3$ .

Désignons enfin par  $D_1$  le point de contact de la tangente parallèle à  $A_1 P_1$ ; l'abscisse de ce point est égale à  $\frac{1}{2}(a_1 + x_1)$ , et, par suite, l'aire du triangle  $D_1 D_2 D_3$  est égale au huitième, pris en signe contraire, de l'aire du triangle  $B_1 B_2 B_3$ ; de là le théorème suivant :

**THÉORÈME V.** — *Si deux triangles sont inscrits à la parabole, et si par les sommets de chacun d'eux on mène des parallèles aux côtés correspondants du second, ces parallèles rencontrent la parabole en six points formant deux triangles dont l'aire est la même et égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle formé par les points de contact des tangentes parallèles aux droites qui joignent les sommets correspondants des deux triangles donnés.*

Ce théorème comprend un très-grand nombre de cas particuliers, lorsqu'un ou plusieurs des sommets de ces triangles coïncident; si  $A_1, A_2, A_3$  coïncident, on a ainsi le théorème suivant :

**THÉORÈME VI.** — *Si, par un point de la parabole, on mène des parallèles aux côtés d'un triangle inscrit, et si par les sommets de ce triangle on mène des parallèles à la tangente au point donné, ces parallèles rencontrent la parabole en six nouveaux points formant deux triangles équivalents dont l'aire est égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle formé par les points de contact des tangentes parallèles aux droites qui joignent le point donné aux sommets du triangle donné.*

Le théorème précédent s'applique d'ailleurs facilement à un polygone concave ou convexe, d'un nombre

quelconque de côtés, et les aires des polygones formés sont en raison constante avec le polygone donné.

On peut trouver encore des théorèmes analogues sur les pôles des droites considérées dans les deux théorèmes précédents.

Considérons maintenant un quadrilatère inscrit  $P_1 P_2 P_3 P_4$ ; nous avons, par définition (\*),

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = P_1 P_2 P_3 + P_1 P_3 P_4,$$

et, en nous reportant à l'aire du triangle inscrit à la parabole,

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = -\frac{1}{2}(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4);$$

si nous remplaçons dans cette formule  $x_i$  par  $\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ , qui représente l'abscisse du point de contact de la tangente parallèle à  $P_i P_{i+1}$ , et si nous remarquons que le dernier facteur s'annule, nous obtenons le théorème suivant, qui contient un certain nombre de corollaires pour le trapèze et pour le triangle :

THÉORÈME VII. — *Le quadrilatère formé par les points de contact des tangentes parallèles aux côtés d'un quadrilatère inscrit à la parabole a une aire nulle.*

En calculant encore l'aire du quadrilatère formé par les pôles des côtés consécutifs du quadrilatère inscrit, on obtient la moitié, prise en signe contraire, de l'aire de ce quadrilatère, et, en appliquant ce résultat au théorème précédent, que nous allons généraliser :

THÉORÈME VIII. — *Le quadrilatère formé par les tangentes parallèles aux côtés d'un quadrilatère inscrit a une aire nulle.*

---

(\*) Voir mon Mémoire ayant pour titre : *Nouveaux théorèmes de Géométrie supérieure* (Extrait du *Bulletin de la Société d'émulation de l'Allier*, Moulins, 1875).

Considérons enfin un polygone de  $n$  côtés  $ABC\dots HKL$ , inscrit à la parabole ; désignons par  $a, b, c, \dots, h, k, l$  les pôles de  $AB, BC, \dots, KL, LA$ , et admettons la formule

$$abc\dots hkl = -\frac{1}{2} ABC\dots HKL.$$

Ajoutons un sommet  $M$  au polygone inscrit, et désignons par  $l'$  et  $m$  les pôles de  $LM$  et  $MA$  ; le triangle  $ALM$  nous donne

$$l'm = -\frac{1}{2} ALM.$$

L'addition des seconds membres des deux égalités précédentes donne  $-\frac{1}{2} ABC\dots HKLM$ , et celle des deux premiers nous donne l'aire du polygone  $abc\dots hkl'm$ , si l'on remarque, en effet, que les trois points  $k, l, l'$  sont en ligne droite, ainsi que les points  $a, l, m$ , comme pôles de droites concourantes. De là, la proposition suivante :

**THÉORÈME IX.** — *L'aire du polygone formé par  $n$  tangentes à la parabole est égale à la moitié de l'aire, prise en signe contraire, du polygone qui réunit les points de contact.*

Ce théorème comprend un grand nombre de cas particuliers, en supposant un ou plusieurs côtés du polygone infiniment petits. En supposant que le polygone inscrit se compose d'un arc de parabole et de sa corde, on retrouve ainsi l'aire du segment.

Nous ajouterons, sans démonstration, les deux théorèmes suivants, susceptibles de généralisation, ainsi que les précédents :

**THÉORÈME X.** — *Si l'on joint les milieux des côtés d'un triangle inscrit à la parabole, et si l'on prend les milieux des cordes interceptées dans la courbe, l'aire formée par ces trois points est égale à la moitié, prise en signe contraire, de celle du triangle inscrit.*



**THÉORÈME XI.** — *L'aire du triangle formé par les pôles des droites qui joignent les milieux des côtés d'un triangle inscrit à la parabole est égale au quart de celle du triangle inscrit.*

Nous prendrons l'équation de l'hyperbole sous la forme

$$xy = 1,$$

et nous supposerons les axes rectangulaires; mais les formules suivantes s'appliquent à une hyperbole quelconque, en multipliant chaque aire par le sinus de l'angle des asymptotes.

L'aire d'un triangle inscrit  $P_1 P_2 P_3$  a pour expression

$$P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} \frac{x_2 - x_3}{x_1} \frac{x_3 - x_1}{x_2} \frac{x_1 - x_2}{x_3}.$$

Les coordonnées du pôle  $Q_3$  de la corde  $P_1 P_2$  sont données par les formules

$$x = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}, \quad y = \frac{2}{x_1 + x_2},$$

et l'aire du triangle  $Q_1 Q_2 Q_3$  correspondant au triangle  $P_1 P_2 P_3$  est donnée par l'expression

$$Q_1 Q_2 Q_3 = -2 \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} \frac{x_3 - x_1}{x_3 + x_1} \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}.$$

Si le centre de gravité du triangle inscrit est situé sur l'une des asymptotes, on a, par exemple, pour l'axe des  $y$ ,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

et la comparaison des deux résultats obtenus ci-dessus nous donne immédiatement le théorème suivant :

**THÉORÈME XII.** — *Si sur une hyperbole on prend trois points formant un triangle dont le centre de gravité est situé sur l'une des asymptotes, l'aire du triangle des*

tangentes menées par ces trois points est égale à quatre fois l'aire du triangle inscrit.

Si le centre de gravité est situé sur la courbe, on a la relation

$$(x_1 + x_2 + x_3) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = 9,$$

ou, par une transformation facile,

$$\frac{x_2 + x_3}{x_1} \frac{x_3 + x_1}{x_2} \frac{x_1 + x_2}{x_3} = 8,$$

et la comparaison des deux résultats précédents nous donne encore :

**THÉORÈME XIII.** — *Si le centre de gravité d'un triangle inscrit à l'hyperbole est situé sur la courbe, l'aire du triangle des tangentes aux sommets est égale, en signe contraire, à la moitié de l'aire du triangle inscrit.*

Si nous exprimons que la corde  $PP_1$  est parallèle à la corde  $P_2P_3$ , nous obtenons la condition  $xx_1 = x_2x_3$ , et, pour le point de contact de la tangente  $PP$  parallèle à  $P_2P_3$ , nous avons  $x = \pm \sqrt{x_2x_3}$ , et ainsi il y a toujours deux solutions réelles si  $x_2$  et  $x_3$  sont de même signe, c'est-à-dire si  $P_2$  et  $P_3$  appartiennent à la même branche d'hyperbole.

Si, dans l'expression de  $P_1P_2P_3$ , nous remplaçons  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  respectivement par  $\frac{x_2x_3}{x_1}$ ,  $\frac{x_3x_1}{x_2}$ ,  $\frac{x_1x_2}{x_3}$ , nous obtenons

$$- P_1P_2P_3 \frac{x_2 + x_3}{x_1} \frac{x_3 + x_1}{x_2} \frac{x_1 + x_2}{x_3},$$

et, par suite, les deux théorèmes suivants :

**THÉORÈME XIV.** — *Si le centre de gravité d'un triangle inscrit à l'hyperbole est situé sur la courbe, et*

si l'on mène par les sommets de ce triangle des parallèles aux côtés opposés, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points formant un triangle dont l'aire est égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle inscrit.

THÉORÈME XV. — Si le centre de gravité d'un triangle inscrit à l'hyperbole est situé sur l'une des asymptotes, et si l'on mène par les sommets de ce triangle des parallèles aux côtés opposés, ces parallèles rencontrent la courbe en trois nouveaux points, formant un triangle dont l'aire est égale à celle du triangle inscrit.

Considérons maintenant un quadrilatère inscrit  $P_1 P_2 P_3 P_4$ ; l'aire de ce quadrilatère a pour expression, en opérant comme dans le cas de la parabole,

$$\frac{1}{2} (x_1 - x_3) (x_2 - x_4) \left( \frac{1}{x_1 x_3} - \frac{1}{x_2 x_4} \right).$$

Si nous remplaçons dans cette formule  $x_i$  par  $+\sqrt{x_i x_{i+1}}$ , qui représente l'abscisse du point de contact de la tangente parallèle à  $P_i P_{i+1}$ , en supposant tous les points situés sur la même branché d'hyperbole, et si nous remarquons que le dernier facteur du résultat précédent s'annule, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME XVI. — Le quadrilatère formé dans une même branche d'hyperbole par les points de contact des tangentes parallèles aux côtés d'un quadrilatère inscrit dans cette branche a une aire nulle.

Ce théorème, que nous avons déjà rencontré dans la parabole, est également vrai pour le cercle et, par suite, pour l'ellipse, en prenant tous les points de contact sur la même demi-circonférence, ainsi qu'on le démontre immédiatement pour le cercle en faisant voir que les deux triangles dont se compose le quadrilatère sont égaux.

Les théorèmes sur l'hyperbole paraissent moins nombreux que les théorèmes correspondants sur la parabole, à cause de la condition imposée au centre de gravité du triangle; mais, puisque l'une et l'autre des deux conditions sont homogènes et symétriques, on peut remplacer  $x_i$  par  $Kx_i$ , quelle que soit la valeur de  $K$ , et en particulier  $K = 2$ . On peut aussi augmenter le nombre des résultats précédents à l'aide des remarques suivantes.

Si, par un point  $x = a$  de l'hyperbole, on mène des parallèles aux côtés du triangle inscrit  $P_1 P_2 P_3$ , ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points ayant pour abscisses  $\frac{x_2 x_3}{a}$ ,  $\frac{x_3 x_1}{a}$ ,  $\frac{x_1 x_2}{a}$ , et, si l'on porte ces valeurs dans les expressions de  $P_1 P_2 P_3$  et de  $Q_1 Q_2 Q_3$ , on retrouve les aires des triangles avec des signes contraires. En portant ces valeurs dans la condition qui exprime que le centre de gravité du triangle  $P_1 P_2 P_3$  est situé sur la courbe, on retrouve cette même condition. Enfin il est facile de voir que, si le centre de gravité du triangle inscrit  $P_1 P_2 P_3$  est situé sur l'une des asymptotes, le centre de gravité du nouveau sera situé sur l'autre. Donc :

**THÉOREME XVII.** — *Si, par un point d'une hyperbole, on mène des parallèles aux côtés d'un triangle inscrit, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points formant un triangle dont l'aire est égale, en signe contraire, à l'aire du premier; il en est de même des triangles circonscrits correspondants. Enfin, si le centre de gravité du premier triangle inscrit est situé sur la courbe ou sur l'une des asymptotes, le centre de gravité du second sera situé sur la courbe ou sur l'autre asymptote.*

Les deux premières parties de ce théorème s'appliquent également à un polygone quelconque.

Nous énoncerons encore les propositions suivantes, dont nous laissons au lecteur la vérification :

THÉORÈME XVIII. — *L'aire du triangle obtenu en prenant les milieux des cordes interceptées dans une hyperbole passant par le centre du triangle inscrit, par les droites qui joignent les milieux des côtés de ce triangle, est égale à la moitié, prise en signe contraire, de l'aire du triangle inscrit.*

THÉORÈME XIX. — *Si, par les sommets d'un triangle inscrit dans une hyperbole passant par le centre du triangle, on mène des parallèles à la tangente passant au centre du triangle, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points formant un triangle dont l'aire est égale à moins vingt-sept fois l'aire du triangle inscrit.*

THÉORÈME XX. — *Si, par le centre d'un triangle inscrit dans une hyperbole passant en ce point, on mène des parallèles aux côtés du triangle, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois points formant un triangle dont l'aire est égale à moins vingt-sept fois l'aire du triangle inscrit.*

THÉORÈME XXI. — *Par le centre d'un triangle inscrit à une hyperbole passant en ce point, on mène des parallèles aux côtés du triangle inscrit, et, par les points d'intersection de ces parallèles avec l'hyperbole, on mène des tangentes à la courbe, l'aire du triangle formé par ces tangentes est égale, en signe contraire, à l'aire du triangle inscrit.*

Nous ferons remarquer que la plupart de ces théorèmes sont susceptibles d'une grande généralisation, et s'appliquent indistinctement à toutes les coniques, mais

en tenant compte de la restriction indiquée au théorème XVI pour le cas du cercle ; nous citerons notamment à ce sujet les théorèmes V et VI. On peut d'ailleurs arriver plus rapidement à ces résultats et déduire les théorèmes de l'hyperbole de ceux qui concernent la parabole, et réciproquement. Nous donnerons enfin, dans un prochain travail, les théorèmes correspondants dans la Géométrie à trois dimensions.

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

*Question 1070*

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XIII, p. 143 ),

PAR M. C. MOREAU,

Capitaine d'Artillerie, à Calais.

*L'équation  $\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + au^2 + bu^4}$  définit une fonction  $u$ , si l'on donne la condition  $u = 0$  pour  $x = 0$ .*

*C'est une fonction impaire de  $x$ , et, dans son développement suivant les puissances de  $x$ , le coefficient de*

*$\frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1)}$  est de la forme*

$$a^n + \lambda_1 a^{n-2} b + \lambda_2 a^{n-4} b^2 + \lambda_3 a^{n-6} b^3 + \dots$$

*On a*

$$\lambda_1 = \frac{3^{2n+1} - 3}{16} - \frac{3}{2} n,$$

$$\lambda_2 = \frac{5^{2n+1} - 5}{256} + \frac{3^{2n+3} - 3^3}{64} + \frac{9}{8} n^2 - \left( \frac{3^{2n+2}}{32} + \frac{39}{16} \right) n$$

*Tous ces nombres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  sont entiers. Démontrer les résultats précédents.* (F. DIDON.)

solutions en nombres entiers positifs sont

$$y = 0, \quad x \text{ arbitraire,}$$

$$y = 1, \quad x = 2,$$

$$y = 2, \quad x = 3.$$

### Question 1180

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIV, p. 230);

PAR M. MORET-BLANC.

*Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient 24 sur le côté de la base.*

(É. LUCAS.)

Il faut que l'on ait

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = m^2$$

ou

$$n(n+1)(2n+1) = 6m^2.$$

Les trois facteurs  $n$ ,  $n+1$ ,  $2n+1$  étant premiers entre eux, il faut que celui qui est pair soit le sextuple d'un carré, les deux autres étant des carrés impairs, ou bien que le nombre pair soit le double d'un carré, les deux nombres impairs étant l'un un carré, l'autre le triple d'un carré.

1<sup>o</sup> Soit  $n$  pair : il faut aussi qu'il soit divisible par 3, sans quoi l'un des deux autres facteurs serait de la forme  $3k+2$ , incompatible avec celle d'un carré ou d'un triple carré. On aura donc

$$n = 6q^2, \quad n+1 = p^2, \quad 2n+1 = r^2,$$

ou

$$p^2 - 6q^2 = 1,$$

$$r^2 - 12q^2 = 1.$$

Les solutions entières de ces deux équations s'obtien-

ment, comme on sait, en développant  $\sqrt{6}$  et  $\sqrt{12}$  en fractions continues et prenant les termes des réduites correspondant aux quotients complets dont le dénominateur est égal à 1. Ce sont, dans les deux cas, les réduites de rang impair : on obtient ainsi les séries de valeurs

$$p = 1, 5, 49, 485, 4801, 47525, \dots,$$

$$q = 0, 2, 20, 198, 1960, 19402, \dots,$$

$$r = 1, 7, 97, 1351, 18217, \dots,$$

$$q = 0, 2, 28, 390, 7432, \dots$$

$q$  devant avoir la même valeur dans les deux équations, et ne pouvant être zéro, on n'a pas d'autre solution commune que

$$q = 2, p = 5, r = 7,$$

d'où

$$n = 24 \quad \text{et} \quad m^2 = 4 \cdot 25 \cdot 49 = 4900.$$

2° Soit  $n$  impair :  $n + 1$  sera pair et de forme  $3k + 2$ , sans quoi l'un des nombres  $n, 2n + 1$  serait de cette forme, incompatible avec celle d'un carré ou d'un triple carré; on aura alors

$$n = p^2, \quad n + 1 = 2q^2, \quad 2n + 1 = 3r^2,$$

d'où

$$p^2 - 2q^2 = -1,$$

$$p'^2 - 6r^2 = -2,$$

en posant  $2p = p'$ .

Les solutions de ces équations sont données par les réduites de rang pair dans le développement de  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{6}$  en fractions continues. On obtient ainsi les séries de valeurs

$$p = 1, 7, 41, 239, 1393, 8119, \dots,$$

$$q = 1, 5, 29, 169, 985, 5741, \dots,$$

$$p' = 2p = 2, 22, 218, 1158, 12362,$$



d'où

$$p = 1, 11, 109, 579, 6181, \dots,$$

$$r = 1, 9, 89, 881, 8721, \dots$$

La seule valeur commune de  $p$  est  $p = 1$  :

$$p = 1, q = 1, r = 1, \text{ d'où } n = 1$$

Donc, en écartant le cas d'un seul boulet, le nombre des boulets de la pile ne sera un carré que lorsqu'elle en aura 24 sur le côté de la base.

### CORRESPONDANCE.

*Extrait d'une lettre de M. E. Rouché.* — « Dans le numéro des *Annales*, qui est relatif au mois de novembre, mais qui n'a paru qu'hier 6 décembre, je trouve un article sur la discussion des équations du premier degré. Je m'empresse de reconnaître que M. Fontené, dont j'approuve particulièrement le mérite, ne pouvait, quand il vous a remis son travail, avoir eu connaissance de celui que j'ai communiqué à l'Académie sur le même sujet; mais je tiens à constater que ma Note, ayant paru dans les *Comptes rendus du 29 novembre*, a été publiée avant l'article cité. C'est pourquoi je vous prie d'insérer ces quelques lignes dans votre prochain numéro. »

*Note de la Rédaction.* — La réclamation de M. Rouché est parfaitement fondée. A l'égard de M. Fontené, nous dirons que son article nous a été remis au mois de septembre dernier, que nous l'avons fait composer immédiatement, et que c'est à notre grand regret qu'il n'a pas paru plus tôt. Le travail de M. Rouché et celui de M. Fontené sont donc bien indépendants l'un de l'autre.

---



---

**QUESTIONS NOUVELLES D'ARITHMÉTIQUE SUPÉRIEURE**

PROPOSÉES PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

---

1. Déterminer le dernier chiffre du  $n^{\text{ième}}$  terme de la série de Lamé donnée par la loi de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

et les conditions initiales  $u_0 = 0, u_1 = 1$ .

2. Formuler les restes obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux termes donnés de la série  $u_p$  et  $u_q$  en fonction des rangs  $p$  et  $q$ .

3. Traiter les mêmes questions pour la série

$$0, 1, 2, 5, 12, \dots,$$

donnée par la loi de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n,$$

et plus généralement pour les séries récurrentes du premier genre données par la loi

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

dans laquelle  $a$  et  $b$  désignent des nombres premiers entre eux.

4. Trouver l'expression générale du terme de la série en supposant  $u_0 = 0, u_1 = 1$ , quelles que soient les valeurs de  $a$  et  $b$ .

5. Si  $p$  désigne un nombre premier, et  $u_p$  l'expression

$$u_p = \frac{(a + \sqrt{b})^{p+1} - (a - \sqrt{b})^{p+1}}{\sqrt{b}},$$

démontrer que  $u_{p+1}$  est divisible par  $p$ , si  $b$  désigne un non-résidu quadratique de  $p$ ; et que  $u_{p-1}$  est divisible par  $p$ , en exceptant les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $a^2 - b$  est divisible par  $p$ , si  $b$  désigne un résidu quadratique de  $p$ .

La première partie de ce théorème est due à Gauss.

#### 6. Résoudre complètement l'équation

$$x^3 + y^3 = 9z^3$$

en nombres entiers. Euler et Legendre n'ont pas donné toutes les solutions, et généralement celles pour lesquelles  $z$  est pair; ainsi, par exemple,

$$x = 919, \quad y = -271, \quad z = 438.$$

#### 7. Résoudre complètement l'équation

$$x^3 + y^3 = 7z^3$$

en nombres entiers. Fermat, qui avait particulièrement étudié cette équation, n'a pas donné les solutions pour lesquelles  $z$  est pair; ainsi

$$x = 73, \quad y = -17, \quad z = 38,$$

ce qui semble indiquer qu'il n'était point en possession de la méthode générale.

#### 8. Résoudre complètement l'équation

$$x^2 + (x+1)^2 + \dots + (x+n-1)^2 = y^2,$$

pour les valeurs de  $n$  égales à 2, 11, 23, 24.

9. Démontrer, sans se servir de la Table des nombres premiers, que  $2^{31} - 1$  est un nombre premier.

équation d'une parabole dont le sommet est à une distance égale à  $p$  de celui de la parabole donnée, qui a même axe qu'elle, et un paramètre quatre fois moindre.

### QUESTIONS.

1191. Les foyers de toutes les ellipses, qui ont leur cercle osculateur maximum commun en un point donné fixe, appartiennent à une même circonférence.

1192. Une ellipse a son centre sur une hyperbole donnée et touche les asymptotes de cette hyperbole; démontrer que la corde des contacts, correspondant au maximum de l'aire de l'ellipse, est tangente à une hyperbole semblable à l'hyperbole donnée.

1193. On donne deux tangentes et un foyer d'une conique; démontrer que la corde des contacts passe par un point fixe (\*).

1194. Une pile de boulets à base triangulaire ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient sur le côté de la base 1, 2 ou 48. (E. LUCAS.)

1195. Une pile de boulets à base carrée ou à base triangulaire ne contient jamais un nombre de boulets égal au cube ou à la cinquième puissance d'un nombre entier. (E. LUCAS.)

1196. Résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$(x + 1)^y = x^{y+1} + 1.$$

(\*) Les énoncés de ces trois questions sont extraits de l'Ouvrage intitulé: *Conic sections treated geometrically*, by W.-H. BESANT, M. A., F. R. S., Lecturer and late Fellow of St-John's College. Seconde édition; 1875.

substituant  $c_3 = 59$ , et tous les nombres qu'on vient de calculer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} P_3 C_{3,3} &= \frac{1}{3} 28.59 + 20.2 + 35.2 + 56.16 + 2.2 + 4.4 \\ &\quad + 3.2 + 6.6 + 2.2 + 8. \frac{11}{2} + 14.12 + 24.24 \\ &\quad + 7 + 4.8 + 8.10 \\ &= \frac{1}{3}.1652 + 40 + 70 + 896 + 4 + 16 + 6 + 36 \\ &\quad + 4 + 44 + 168 + 576 + 7 + 32 + 80 \\ &= \frac{1}{3}.1652 + 1979. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3,3} &= P_3(1652 + 3.1979) = P_3(1652 + 5937) = P_3.7589, \\ c_3 &= 7589, \end{aligned}$$

résultat que j'ai vérifié directement.

## SUR LA RELATION DE MÖBIUS, QUI EXPRIME QUE QUATRE POINTS D'UN PLAN SONT SITUÉS SUR UN CERCLE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Möbius a obtenu le premier, à l'aide des principes du calcul barycentrique (*Journal de Crelle*, t. 16, p. 26), la relation qui exprime que quatre points d'un plan sont situés sur un cercle. M. Cayley a obtenu le même résultat à l'aide de la théorie des déterminants; on peut interpréter et généraliser le théorème en question de la manière suivante.

Désignons par

$$X_i = x^2 + y^2 - 2a_i x - 2b_i y + c_i$$

le premier membre de l'équation d'un cercle en coordonnées rectangulaires; on sait que  $c_i$  et  $X_i$  représentent respectivement la puissance de l'origine et d'un point quelconque du plan dont les coordonnées sont  $x$  et  $y$ ,

par rapport à ce cercle. On déduit, des quatre équations

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 - X_1 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 - X_2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2a_3x - 2b_3y + c_3 - X_3 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2a_4x - 2b_4y + c_4 - X_4 = 0,$$

par l'élimination linéaire de  $x, y$  et de  $x^2 + y^2$ , l'identité

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 - X_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 - X_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 - X_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 - X_4 \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & X_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & X_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & X_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & X_4 \end{vmatrix}.$$

Cette dernière équation est l'expression analytique du théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Si par les centres de quatre cercles situés dans un plan on élève des perpendiculaires au plan, respectivement proportionnelles aux puissances d'un point quelconque du plan par rapport aux quatre cercles, le volume du tétraèdre formé par les extrémités de ces perpendiculaires est constant.*

Si les quatre cercles sont orthogonaux à un même cercle, le centre de ce cercle a la même puissance par rapport aux quatre cercles, et le tétraèdre correspondant a un volume nul, puisque ses sommets sont dans un plan parallèle au plan considéré. Donc :

**THÉORÈME.** — *Pour que quatre cercles soient orthogo-*

*naux à un même cercle, il faut que les extrémités des perpendiculaires, menées au plan par les centres de ces cercles, respectivement proportionnelles aux puissances d'un point quelconque du plan par rapport à ces quatre cercles, soient situées dans un même plan.*

On obtient la condition pour que quatre points d'un plan soient situés sur un cercle en supposant que les quatre cercles du théorème précédent se réduisent à leurs centres.

### SUR UN PROBLÈME DE HALLEY RELATIF A LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Le problème de Halley, qui consiste dans la détermination de l'orbite d'une planète connaissant trois positions héliocentriques, revient géométriquement à déterminer une conique connaissant un foyer et trois points. Il existe un grand nombre de solutions de ce problème, et notamment celle de *Nicollic*, qui est indiquée dans le *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique* de M. Catalan (t. I<sup>er</sup>, p. 470).

La méthode suivante nous paraît nouvelle et revient à ce problème bien connu de Géométrie descriptive : *Trouver la trace horizontale d'un plan dont on connaît les projections de trois points.*

Prenons, en effet, pour origine des coordonnées rectangulaires le foyer de la conique; désignons par  $r$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  les distances d'un point quelconque de la conique cherchée et des trois points donnés à ce foyer, et par

$$lx + my + n = 0$$

l'équation de la directrice.

On a, par définition, pour l'équation de la conique

$$x^2 + y^2 = (lx + my + n)^2,$$

et, par suite, les équations

$$\pm r = lx + my + n,$$

$$\pm r_1 = lx_1 + my_1 + n,$$

$$\pm r_2 = lx_2 + my_2 + n,$$

$$\pm r_3 = lx_3 + my_3 + n.$$

On obtient, par l'élimination de  $l, m, n$ , l'équation de la conique cherchée sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} \pm r & x & y & 1 \\ \pm r_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \pm r_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \pm r_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient  $O_1, O_2, O_3$  les trois points donnés,  $O$  un point quelconque de la conique, et  $F$  le foyer ; si l'on mène hors du plan des droites  $OP, O_1P_1, O_2P_2, O_3P_3$  parallèles à une direction quelconque prise pour axe des  $r$ , et respectivement proportionnelles à  $OF, O_1F, O_2F, O_3F$ , il résulte immédiatement de l'équation précédente que les points  $P, P_1, P_2, P_3$  sont situés dans un même plan ; de plus, on obtient l'équation de la directrice en remplaçant  $r$  par zéro ; on a ainsi la proposition suivante :

**THÉORÈME.** — *Si en chacun des points d'une conique on mène hors du plan des parallèles à une direction quelconque et dont les longueurs soient respectivement proportionnelles aux rayons focaux correspondants, les extrémités de ces parallèles seront situées (sur une conique) dans un plan passant par la directrice.*

Ce théorème, qu'il est facile de démontrer géométri-



quement, subsiste en remplaçant le foyer par un cercle focal, le rayon focal par la puissance du point par rapport à ce cercle et la directrice par la corde de contact.

Inversement, connaissant trois points et un cercle focal d'une conique, si l'on élève, en chacun de ses points et perpendiculairement au plan, des droites respectivement proportionnelles à la racine carrée de la puissance de ces points par rapport au cercle focal, le plan passant par les extrémités de ces droites rencontrera le plan du cercle focal suivant la corde de contact correspondante. L'indétermination du signe de la racine carrée donne ainsi quatre solutions et, dans le cas particulier du problème de Halley, trois hyperboles au moins.

Le théorème précédent permet encore de ramener la recherche des sécantes communes de deux coniques confocales (ayant un seul foyer commun) au problème de Géométrie descriptive relatif à l'intersection de deux plans donnés.

Soient, en effet,  $F, D, P$  le foyer, la directrice et un point de la première conique;  $D', P'$  la directrice et un point de la seconde.

Élevons en  $P$  une perpendiculaire au plan  $PQ$ , égale à  $PF$ , et en  $P'$  une perpendiculaire  $P'Q'$  égale à  $P'F$ ; la projection de l'intersection des deux plans menés par  $Q$  et  $D$  et par  $Q'$  et  $D'$  sur le plan des deux coniques représentera l'une des cordes communes; on obtiendra l'autre en portant les deux perpendiculaires dans des sens différents.

QUESTIONS.

---

1207. On joint les trois sommets d'un triangle  $ABC$  à un point  $P$ , et l'on prend les intersections  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  des lignes de jonction avec les côtés opposés; trouver le lieu du point  $P$ , de telle sorte que les perpendiculaires élevées sur les côtés aux points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  se rencontrent en un même point  $Q$ . Ce lieu est une cubique, dont il est facile de déterminer seize points et trois tangentes; déterminer les asymptotes, et trouver aussi le lieu du point  $Q$ .

(É. LUCAS.)

1208. Trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles doublement tangentes à une hyperbole équilatère donnée, de manière que les axes de ces paraboles conservent une direction constante et donnée. Lieu des sommets des mêmes paraboles.

(GAMBEY.)

1209. Deux ellipses sont concentriques; on leur mène une tangente commune, et l'on joint au centre les points de contact; ces deux droites et les cordes communes qui passent par le centre forment un faisceau harmonique.

(MANNHEIM.)

1210. Trouver l'enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe donnée et qui demeure tangente à un système de trois diamètres conjugués d'une surface à centre du second degré, également donnée.

(V. HIOUX.)

---

trois systèmes de droites qui passent par quatre points, les conjugués harmoniques des six points d'intersection, relativement aux sommets du quadrilatère, sont sur une conique circonscrite au triangle formé par les centres des systèmes de droites.

Comme cas particulier, lorsque la droite est à l'infini, on retrouve la conique des neuf points, lieu des centres des coniques circonscrites.

7. THÉORÈME. — Les polaires d'un point fixe concourent en un point qui est l'intersection des polaires du premier, prises relativement à chacun des trois systèmes de cordes communes.

Cette propriété fournit un moyen de construire les tangentes de la conique déterminée par cinq points.

## SOLUTION D'UN PROBLÈME DE BEHA-EDDIN SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE ;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

L'auteur arabe Behâ-Eddin, qui vécut de 1547 à 1622, a proposé à la fin de son *Traité de calcul*, intitulé *Khé-lasat al Hisâb*, la résolution du système des deux équations simultanées

$$x^2 + x + 2 = u^2,$$

$$x^2 - x - 2 = v^2,$$

en nombres rationnels. Nous remplacerons les inconnues rationnelles du système précédent par des inconnues entières, et nous considérerons par conséquent le système

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = u^2, \\ x^2 - xy - 2y^2 = v^2. \end{cases}$$

Le traducteur français de l'ouvrage en question (\*) avait trouvé seulement la solution  $x = 17, y = -16$ , et en avait conclu, comme le présumait l'auteur arabe, que ce problème est impossible à résoudre en nombres entiers et positifs. M. Genochi (\*\*), dans un remarquable commentaire des ouvrages de Léonard de Pise, a donné la solution  $x = 34, y = 15$  à l'aide d'un artifice particulier employé souvent par Diophante et par Fermat, mais il n'a point donné la solution complète du système (1). La méthode que nous proposons ici nous paraît conduire à la résolution complète du problème de Behà-Eddin.

On déduit du système (1), dans lequel on peut supposer que les indéterminées  $x, y, u, v$  représentent des nombres entiers premiers entre eux, l'équation

$$u^2 + v^2 = 2x^2,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = x^2.$$

On doit donc poser, d'après la formule connue de résolution des triangles rectangles dont les côtés sont entiers,

$$\frac{1}{2}(u-v) = 2rs,$$

$$\frac{1}{2}(u+v) = r^2 - s^2;$$

et par suite,

$$u = r^2 - s^2 + 2rs,$$

$$v = r^2 - s^2 - 2rs,$$

$$x = r^2 + s^2;$$

(\*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1<sup>re</sup> série, t. V, p. 323; année 1846.

(\*\*) *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano, pubblicati da Bal-tasare Boncompagni, Note analitiche di Angelo Genocchi*. Roma, 1855, p. 85 et 91.

en portant ces valeurs dans l'équation obtenue et retranchant membre à membre les deux équations du système proposé, on obtient

$$2y^2 + xy = 4rs(r^2 - s^2);$$

et, en résolvant cette équation par rapport à  $y$ , on a

$$y = \frac{-x \pm t}{4},$$

$t$  étant l'une des inconnues de l'équation biquadratique

$$(2) \quad (r^2 + s^2)^2 + 32rs(r^2 - s^2) = t^2.$$

Ainsi donc le système de Behà-Eddin est ramené à l'équation (2), qui représente la mise en équation du problème suivant :

PROBLÈME. — *Trouver en nombres entiers un triangle rectangle tel, que l'aire du carré de l'hypoténuse augmentée de trente-deux fois l'aire du triangle soit égale à un carré parfait.*

L'équation (2), peut être remplacée par la suivante :

$$(r^2 + 16rs - s^2)^2 - t^2 = 252r^2s^2;$$

mais, si l'on remarque que le premier membre est le produit de deux facteurs dont le plus grand commun diviseur est égal à 2, on en déduit, en supposant que l'inconnue  $t$  peut être positive ou négative,

$$r^2 + 16rs - s^2 + t = \pm 14(3p)^2,$$

$$r^2 + 16rs - s^2 - t = \pm 2q^2,$$

$$rs = pq.$$

L'addition des deux premières équations nous conduit au nouveau système

$$r^2 + 16rs - s^2 = \pm (63p^2 + q^2),$$

$$rs = pq.$$

Posons maintenant  $r = mp$ , et  $q = ms$ , nous obtenons l'une ou l'autre des deux équations

$$(3) \quad m^2 p^2 + 16 mps - s^2 = \pm (63p^2 + m^2 s^2).$$

PREMIER CAS. — Si nous exprimons que la valeur de  $m$ , tirée de l'équation précédente dont le second membre est pris avec le signe  $+$ , est rationnelle, nous obtenons

$$m = \frac{8ps \pm t}{s^2 - p^2}$$

avec la condition

$$(9p^2 - s^2)(7p^2 + s^2) = U^2.$$

Cette équation est immédiatement satisfaite par les valeurs

$$p = 1, \quad s = 1, \quad U = 8,$$

desquelles on tire, mais dans ce cas seulement par exception, puisque le dénominateur de  $m$  s'annule, à l'aide de l'équation en  $m$  qui devient linéaire,

$$m = 4,$$

et par suite les deux solutions du système (1) indiquées plus haut. On déduit de la dernière équation

$$(4) \quad \begin{cases} 9p^2 - s^2 = 8g^2, \\ 7p^2 + s^2 = 8h^2, \\ U = 8gh; \end{cases}$$

et, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned} 2p^2 &= g^2 + h^2, \\ p^2 - s^2 &= 4(g^2 - h^2). \end{aligned}$$

La première des deux équations précédentes est résolue par les formules

$$\begin{aligned} p &= a^2 + b^2, \\ g &= a^2 - b^2 - 2ab, \\ h &= a^2 - b^2 + 2ab, \end{aligned}$$

et, en portant ces valeurs dans la seconde, on trouve

$$(a^2 + b^2)^2 + 32ab(a^2 - b^2) = s^2;$$

c'est précisément l'équation (2) avec des indéterminées beaucoup plus petites. Ainsi donc, d'une solution quelconque  $(r, s, t)$  de l'équation

$$(2) \quad (r^2 + s^2)^2 + 32rs(r^2 - s^2) = t^2,$$

on déduit deux solutions nouvelles R, S, T à l'aide des formules

$$(A) \quad \begin{cases} m = t(r^2 + s^2) \pm (r^4 + s^4 - 6r^2s^2), \\ n = 4rs(r^2 - s^2), \\ R = m(r^2 + s^2), \\ S = nt, \\ T = 63n^2(r^2 + s^2)^2 - m^2t^2; \end{cases}$$

et l'on a ensuite pour le système proposé :

$$(B) \quad \begin{cases} x = r^2 + s^2, \\ 4y = -(r^2 + s^2) \pm t, \\ u = r^2 - s^2 - 2rs, \\ v = r^2 - s^2 + 2rs. \end{cases}$$

SECOND CAS. — Il reste à considérer le système déduit de l'équation (3) en prenant le signe inférieur. Pour que la valeur de  $m$  soit rationnelle, on doit avoir

$$m = \frac{-8ps \pm U}{s^2 + p^2},$$

avec l'équation de condition

$$(s^2 - 7p^2)(s^2 + 9p^2) = U^2,$$

de laquelle on déduit évidemment le système

$$\begin{aligned} s^2 - 7p^2 &= g^2, \\ s^2 + 9p^2 &= h^2, \\ U &= gh. \end{aligned}$$

On obtient aisément

$$16p^2 = h^2 - g^2,$$

et par suite

$$h + g = 2u^2,$$

$$h - g = 8v^2,$$

$$p = uv.$$

En portant ces valeurs dans l'une des équations du système précédent, nous avons

$$u^4 - u^2v^2 + 16v^4 = s^2,$$

ou encore

$$(u^2 + 4v^2)^2 - 9u^2v^2 = s^2.$$

La décomposition en facteurs donne

$$u^2 + 4v^2 \pm s = 9z^2,$$

$$u^2 + 4v^2 \mp s = w^2,$$

$$uv = wz,$$

et par suite le système

$$2u^2 + 8v^2 = 9z^2 + w^2,$$

$$uv = wz.$$

Posons, comme précédemment,  $u = mw$ ,  $z = mv$ ; il en résulte

$$m^2 = \frac{8v^2 - w^2}{9v^2 - 2w^2}.$$

Puisque la valeur de  $m$  doit être rationnelle, on doit avoir

$$9v^2 - 2w^2 = \alpha c^2,$$

$$8v^2 - w^2 = \alpha d^2,$$

$\alpha$  représentant le plus grand commun diviseur entre les deux premiers membres des équations précédentes. Mais si l'on suppose  $\alpha = \pm 1$  ou  $\alpha = -7$ , les équations sont impossibles suivant les modules 2 et 3; on doit donc poser  $\alpha = 7$ , et conséquemment

$$9v^2 - 2w^2 = 7c^2,$$

$$8v^2 - w^2 = 7d^2,$$



ou encore

$$9d^2 - a^2 = 8c^2,$$

$$7d^2 + a^2 = 8a^2.$$

Ce système est identique avec le système (4), mais contient des indéterminées plus petites. Et ainsi le problème de Behâ-Eddin se trouve complètement résolu, sauf erreur, pour la première fois (\*).

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL,  
ANNÉE 1875

( voir p. 88 et 89 );

PHILOSOPHIE.

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

*Deux triangles équilatéraux égaux ABC, A'B'C' sont disposés dans deux plans parallèles de façon que les sommets de l'un et les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du second sur le plan du premier soient les sommets d'un hexagone régulier. Les centres des deux triangles étant O et O', on demande de déterminer la figure du solide commun aux deux tétraèdres O'ABC, OA'B'C', et d'exprimer le volume de ce solide à l'aide du côté a des triangles équilatéraux et de la distance d de leurs plans.*

Menons les médianes AD, A'D' (\*\*), elles sont égales et parallèles. Les droites OD, O'D' étant égales et parallèles, le quadrilatère ODO'D' est un parallélogramme :

(\*) Extrait de recherches nouvelles sur les Ouvrages de Léonard de Pise, publiées par M. le prince B. Boncompagni.

(\*\*) Le lecteur est prié de faire la figure.

$z$  est la distance oblique du centre de gravité à l'une ou l'autre base. Cette formule de M. Resal, qu'on écrit sans aucun calcul, démontre les théorèmes suivants :

1° Si, par le centre de gravité du tronc, on mène une parallèle aux arêtes, terminée à ses deux bases, cette ligne sera divisée en deux parties égales par le centre de gravité ;

2° Les distances vraies du centre de gravité du tronc aux bases sont en raison des sinus des angles d'inclinaison des arêtes sur ces bases ;

3° Pour déterminer le centre de gravité, on divise le côté CA en parties proportionnelles à  $h$ ,  $h''$ , on joint le point de division avec le milieu de BC, et l'on compose en  $g$  les masses  $h + h''$ ,  $2(h + h')$ . Divisant ca en raison de  $h' : h''$  et joignant le point de division avec le milieu de ab, on détermine un second point  $g'$  sur la base abc ; le centre de gravité du tronc sera sur la droite  $gg'$ . Menant par ses extrémités des parallèles aux arêtes, on forme un plan qui coupe les bases suivant deux droites ; dans le trapèze ainsi construit, on trace une ligne parallèle aux arêtes et divisée par  $gg'$  en deux parties égales : l'intersection donne le centre de gravité du tronc.

## SUR LA RÉOLUTION DU SYSTÈME DES ÉQUATIONS

$$(1) \quad x^2 - 6y^2 = u^2, \quad x^2 + 6y^2 = v^2$$

EN NOMBRES ENTIERS ;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

On tire, de la seconde équation, en supposant  $v + x$  divisible par 3. ce qui ne nuit pas à la généralité de la

solution,

$$y = 2rs, \quad x = 3r^2 - 2s^2,$$

ou bien

$$y = 2rs, \quad x = 6r^2 - s^2.$$

En portant ces valeurs dans la première équation, on en déduit l'une des deux suivantes :

$$(2) \quad 9r^4 - 36r^2s^2 + 4s^4 = u^2,$$

$$(3) \quad 36r^4 - 36r^2s^2 + s^4 = v^2.$$

On peut écrire l'équation (3) sous la forme

$$(6r^2 - 3s^2)^2 - 8s^4 = u^2;$$

on en déduit

$$(4) \quad \begin{cases} 6r^2 - 3s^2 \pm u = \pm 2p^4, \\ 6r^2 - 3s^2 \mp u = \pm 4q^4, \\ s = pq. \end{cases}$$

PREMIER CAS. — En prenant les signes supérieurs dans les seconds membres des équations précédentes, on obtient, par addition,

$$(p^2 - q^2)(2q^2 - p^2) = 6r^2,$$

et, en ne tenant pas compte des décompositions impossibles suivant le module 3,

$$p^2 - q^2 = 6g^2, \quad 2q^2 - p^2 = h^2;$$

d'où l'on tire le système

$$q^2 - 6g^2 = h^2, \quad q^2 + 6g^2 = p^2,$$

identique au système proposé. Ainsi, d'une solution quelconque  $x, y, u, v$  du système (1), on déduit une série indéfinie de solutions nouvelles, au moyen des formules

$$(A) \quad \begin{cases} X = 6u^2y^2 - v^2x^2, & U = v^4 - 2x^4, \\ V = 6u^2y^2 + v^2x^2, & Y = 2xyuv. \end{cases}$$

*Exemples numériques.*

$$1^{\circ} \quad x = 5, \quad y = 2, \quad u = 1, \quad v = 7,$$

$$2^{\circ} \quad X = 1201, \quad Y = 140, \quad U = 1151, \quad V = 1249.$$

SECOND CAS. — En prenant les signes supérieurs dans les seconds membres des équations (4), on a

$$(p^2 + q^2)(p^2 + 2q^2) = 6r^2,$$

et, par suite,

$$(5) \quad p^2 + q^2 = 2g^2, \quad p^2 + 2q^2 = 3h^2, \quad r = gh.$$

On déduit, de la première des équations précédentes,

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = g^2,$$

et, par la formule de résolution des triangles rectangles en nombres,

$$p = a^2 - b^2 + 2ab,$$

$$q = a^2 - b^2 - 2ab,$$

$$g = a^2 + b^2.$$

En portant ces valeurs dans la seconde des équations (5), on a

$$3(a^4 + b^4 + 3a^2b^2) - 4ab(a^2 - b^2) = 3h^2,$$

et, en faisant  $b = 3\beta$ , il vient

$$(a^2 - 2a\beta - 9\beta^2)^2 + 32a^2\beta^2 = h^2.$$

Par la décomposition en facteurs, il résulte

$$h \pm (a^2 - 2a\beta - 9\beta^2) = \pm 2c^2,$$

$$h \mp (a^2 - 2a\beta - 9\beta^2) = \pm 16d^2,$$

$$a\beta = cd,$$

et, par soustraction,

$$a^2 - 2a\beta - 9\beta^2 = \pm (c^2 - 8d^2).$$

Posons  $c = ma$ , et  $\beta = md$ ; nous obtenons, par l'élimination de  $\beta$  et  $d$ , l'équation

$$a^2 - 2adm - 9d^2m^2 = \pm (m^2a^2 - 8d^2).$$

Nous exprimerons que la valeur de  $m$  tirée de ces équations est rationnelle, et nous aurons, en prenant le signe inférieur, la condition

$$18a^2d^2 - a^4 - 72d^4 = H^2,$$

impossible suivant le module 3. Au contraire, avec le signe supérieur, nous obtenons la valeur

$$m = \frac{ad \pm H}{a^2 + 9d^2},$$

avec la condition

$$(a^2 + 9d^2)^2 - 9d^4 = H^2.$$

La décomposition en facteurs nous donne

$$a^2 + 12d^2 = e^2, \quad a^2 + 6d^2 = f^2, \quad H = ef,$$

et, par suite, le système

$$f^2 - 6d^2 = a^2, \quad f^2 + 6d^2 = e^2,$$

identique au proposé; donc, d'une solution  $x, y, u, v$ , du système proposé, on déduit deux solutions nouvelles  $X, Y, U, V$ , au moyen des formules

$$(B) \begin{cases} m = uy \pm vx, \\ n = u^2 + 9y^2, \\ r = (9m^2y^2 + n^2z^2)(8n^2y^2 + m^2z^2), \\ s = (9m^2y^2 - n^2z^2)^2 - 36m^2n^2u^2y^2, \\ X = 6r^2 - s^2, \\ V = 6r^2 + s^2, \\ Y = 2rs, \\ U = (n^2u^2 - m^2y^2)^2 + 2mnu^2y^2 - 2(n^2u^2 - m^2y^2 - 2mnu^2y^2)^2. \end{cases}$$

*Exemples numériques.*

$$1^{\circ} \quad x=5, \quad y=2, \quad u=1, \quad v=7;$$

$$2^{\circ} \quad X=2639802, Y=7776485, U=4319999, V=10113607.$$

L'équation (2) est impossible ; en effet, on a aisément  
 $3r^2 - 6s^2 \pm u = \pm 2p^4, \quad 3r^2 - 6s^2 \mp u = \mp 2q^4, \quad s = pq,$   
 et, par addition,

$$3r^2 = 6p^2q^2 \pm (p^4 + 8q^4),$$

équation impossible suivant le module 8. Ainsi donc les formules (A) et (B) résolvent complètement le système proposé.

REMARQUE I. — Le système précédent conduit à la solution du problème : *Trouver trois carrés en progression arithmétique dont la raison est le sextuple d'un carré.*

REMARQUE II. — Le système considéré contient la résolution des équations biquadratiques

$$x^4 - 36y^4 = z^2 \quad \text{et} \quad x^4 - y^4 = 24z^2;$$

on en déduit aisément que les équations biquadratiques

$$x^4 - 36y^4 = z^4 \quad \text{et} \quad x^4 - y^4 = 24z^4$$

sont impossibles à résoudre en nombres entiers.

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
EN 1876.**

*Composition de Mathématiques (6 heures).*

On considère toutes les paraboles tangentes à deux droites rectangulaires OX, OY et telles que la droite PQ qui joint leurs points de contact P, Q avec les deux droites

**SUR LES RAPPORTS  
QUI EXISTENT ENTRE LE TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL  
ET LES NOMBRES DE BERNOULLI;**

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Si l'on désigne par  $S_n$  la somme des puissances  $n^{\text{ièmes}}$  des  $x$  premiers nombres entiers, on tire de la formule

$$(x - 1)^n = x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} - \dots,$$

en y faisant successivement  $x$  égal à 1, 2, 3, ...,  $x$ , et en additionnant, la formule symbolique

$$(1) \quad x^n = S^n - (S - 1)^n.$$

On a, en particulier,

$$\begin{aligned}
+ x &= S_0, \\
- x^2 &= S_0 - 2S_1, \\
+ x^3 &= S_0 - 3S_1 + 3S_2, \\
- x^4 &= S_0 - 4S_1 + 6S_2 - 4S_3, \\
+ x^5 &= S_0 - 5S_1 + 10S_2 - 10S_3 + 5S_4, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

On en déduit, par exemple,

$$(2) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot S_4 = \begin{vmatrix} +x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ +x^3 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ -x^4 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ +x^5 & 1 & 5 & 10 & 10 \end{vmatrix}.$$

Les coefficients du second membre sont entiers, et l'on voit que, en général,  $S_n$  est divisible par le produit  $x(x+1)$ .

En posant, symboliquement,

$$(3) \quad nS_{n-1} = (x+B)^n - B^n,$$

et en remplaçant dans le second membre les exposants de  $B$  par des indices, on obtient les nombres de Bernoulli. La comparaison de cette formule avec la précédente conduit immédiatement à l'expression générale du nombre  $B_n$ , sous la forme d'un déterminant d'ordre quelconque, égal ou supérieur à  $n$ , et formé au moyen du triangle arithmétique.

2. On peut exprimer les sommes  $S$ , et par suite les nombres  $B$ , au moyen de fonctions entières quelconques, de la manière suivante :

Soit la fonction

$$f_i(x+1) - f_i(x) = a_{i,0}x^n + a_{i,1}x^{n-1} + \dots + a_{i,n};$$

ou remplaçant successivement  $x$  par  $1, 2, 3, \dots, x$ , et en additionnant, il vient

$$f_i(x+1) - f_i(x) = a_{i,0}S_n + a_{i,1}S_{n-1} + \dots + a_{i,n}S_0.$$

En considérant  $n+1$  fonctions  $f_0, f_1, \dots, f_n$ , on en déduit  $S_{n-i}$  et, par suite,  $B_{n-i}$  au moyen de déterminants du  $n^{\text{ième}}$  ordre. On peut obtenir encore les expressions de  $S$  et de  $B$  par des déterminants d'ordre moitié moindre, en se servant des formules symboliques

$$\begin{aligned} (x+1)^n + x^n - 1 &= (S+1)^n - (S-1)^n, \\ (x+1)^n - x^n - 1 &= (S+1)^n + (S-1)^n - 2S^n, \\ (2x+1)^n - 1 &= (2S+1)^n - (2S-1)^n, \end{aligned}$$

qui permettent de calculer les sommes  $S$  de deux en



deux. On déduit, par exemple, de la dernière, en posant  $2x + 1 = y$ ,

$$2^{2n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n + 1) S_{2n}$$

$$= \begin{vmatrix} y^{2n+1} & 1 & C_{2n+1}^2 & C_{2n+1}^4 & \dots & C_{2n+1}^{2n-4} & C_{2n+1}^{2n-2} \\ y^{2n-1} & 1 & C_{2n-1}^2 & C_{2n-1}^4 & \dots & C_{2n-1}^{2n-4} & C_{2n-1}^{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^5 & 1 & C_3^2 & C_3^4 & \dots & 0 & 0 \\ y^3 & 1 & C_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On voit ainsi immédiatement que  $S_{2n}$  est divisible par  $2x + 1$ , et, par suite, par  $S_2$ ; de plus,  $S_{2n}$  est une fonction impaire de  $2x + 1$ .

3. Enfin, si l'on se sert de la formule symbolique

$$f(B + 1) - f(B) = f'(0),$$

ou même des formules plus générales que j'ai présentée à l'Académie des Sciences (\*), on peut obtenir très-facilement l'expression de  $B_n$  au moyen de coefficients quelconques, ou même au moyen de déterminants dont les différents termes contiennent les nombres de Bernoulli, ou leurs produits deux à deux, trois à trois, etc.

## NOTE SUR L'ORIGINE DE L'IDÉE DE LA CINÉMATIQUE;

PAR M. LIGUINE,

Professeur à l'Université d'Odessa.

Au sujet d'un article de M. Transon (\*\*), où ce savant tend à démontrer que la priorité de l'idée de la

(\*) Voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* séance du 4 septembre 1876.

(\*\*) Voir ce Journal, t. XIII de la 2<sup>e</sup> série, p. 305-318.

igitur in tractatu meo *De motu corporum rigidorum* hanc utramque investigationem simul suscepissem. unde tota tractatio non parum molesta et intricata est reddita : hoc loco solam partem geometricam accuratius evolvere constitui, quo deinceps pars mechanica faciliori negotio expediri possit. »

Ce passage, ainsi que le Mémoire même auquel il sert d'introduction, me paraissent montrer clairement que l'idée de pouvoir étudier certaines propriétés du mouvement indépendamment de ses causes remonte tout au moins jusqu'à Euler. Mais, en ce qui concerne le projet de fonder sur cette idée la création d'une branche indépendante de la Mécanique, je ne crois pas qu'on en puisse contester la priorité à Wronski, eu égard aux faits exposés dans l'article cité de M. Transon.

## QUESTIONS

### DE GÉOMÉTRIE TRICIRCULAIRE ET TÉTRASPHÉRIQUE ;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Si l'on désigne par  $x, y, z$  les puissances d'un point du plan par rapport à trois cercles, divisées respectivement par le diamètre de chaque cercle, et par  $A, B, C$  les angles de ces cercles entre eux, faire voir que le cercle orthogonal des cercles donnés a pour équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos C & \cos B & x \\ \cos C & 1 & \cos A & y \\ \cos B & \cos A & 1 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Si l'on désigne par  $S$  l'aire du triangle des cen-

tres des trois cercles, et par R le rayon du cercle orthogonal, on a

$$4R^2S^2 = -r_1^2 r_2^2 r_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & 1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix}.$$

3. L'ensemble des cercles passant par trois des six points d'intersection des trois cercles donnés a pour équation

$$\frac{\cos(B \pm C) - \cos A}{x} + \frac{\cos(C \pm A) - \cos B}{y} + \frac{\cos(A \pm B) - \cos C}{z} = 0.$$

Cette équation devient du *seizième* degré en coordonnées cartésiennes.

4. Le couple des cercles tangents à la fois, soit intérieurement, soit extérieurement, au tricycle de référence a pour équation

$$\sin \frac{A}{2} \sqrt{x} + \sin \frac{B}{2} \sqrt{y} + \sin \frac{C}{2} \sqrt{z} = 0.$$

5. Le carré du rayon du cercle orthogonal à trois cercles est la moyenne harmonique des produits des rayons des cercles tangents du même couple.

6. Quelles sont les conditions pour que l'équation

$$(1) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

représente un système de deux cercles. Faire voir que ces conditions sont identiques avec celles qui expriment que l'équation (1) représente un cône de révolution dans un système d'axes faisant entre eux les angles sous lesquels se coupent les trois cercles. Calculer les rayons et

l'angle des cercles du système, et la position des points limites.

7. Donner des résultats analogues pour la Géométrie de l'espace (\*).

**SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE  
AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1875 ;**

PAR M. GAMBÉY.

*On donne trois axes rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  et l'on imagine un conoïde ayant pour directrice rectiligne l'axe  $Oz$ , pour plan directeur le plan  $xOy$ , et pour directrice curviligne une courbe également donnée  $C$ . On demande de déterminer les projections, sur le plan des  $(x, y)$ , des lignes asymptotiques de la surface.*

*On appliquera les formules au cas particulier où la directrice curviligne  $C$  est définie par les équations*

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - a(x + y) &= 0, \\x + y - z - a &= 0.\end{aligned}$$

Définissons d'abord les lignes asymptotiques d'une surface. Ce sont des lignes tracées sur cette surface et telles qu'en chacun de leurs points elles aient pour tangente l'une des asymptotes de l'indicatrice correspondante.

Il en résulte qu'en chaque point d'une surface passent deux lignes asymptotiques de cette surface.

(\*) Extrait d'un Mémoire inédit : *Sur l'application des coordonnées tricirculaires et tétrasphériques à l'étude des figures anallagmatiques.*

L. Bourguet; C. Chadu; B. Launoy; Barbarin, élève de l'École Normale, Biard, élève du lycée de Lille.

Question 1207

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 240);

PAR M. DEWULF.

*On joint les trois sommets A, B, C d'un triangle à un point  $P_1$ , et l'on prend les intersections A', B', C' des lignes de jonction avec les côtés opposés; trouver le lieu des points  $P_1$  de telle sorte que les perpendiculaires élevées sur les côtés aux points A', B', C' se coupent en un même point  $P_2$ . Ce lieu est une cubique dont il est facile de déterminer seize points et trois tangentes; déterminer les asymptotes et trouver aussi le lieu des points  $P_2$ .*

(E. Lucas.)

Ne considérons d'abord que les sommets B, C du triangle avec leurs côtés opposés. D'après la construction indiquée, à tout point L du plan correspond un seul point L'. Si le point L parcourt une droite  $l$ , les perpendiculaires aux côtés  $b, c$  du triangle forment deux faisceaux projectifs (homographiques) et les rayons correspondants se coupent sur une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires, l'une à  $b$ , l'autre à  $c$ .

Ainsi à un point L du plan correspond un seul point L' et à une droite  $l$  correspond une conique.

On arrive à la même conclusion, si l'on ne considère que les sommets A et C avec leurs côtés opposés, ou les sommets A et B avec les côtés  $a$  et  $b$ .

Donc, à toute droite  $l$  du plan correspondent trois coniques que l'on obtient en employant successivement les trois combinaisons deux à deux des sommets du triangle donné avec leurs côtés opposés. Ces coniques ont leurs asymptotes perpendiculaires à  $b$  et  $c$ , à  $b$  et  $a$ ,

à  $c$  et  $a$ ; elles ont donc, deux à deux, un point commun à l'infini, et les trois autres points communs à deux d'entre elles appartiennent aussi à la troisième.

Sur toute droite  $l$ , il existe donc trois points qui satisfont à la question; en d'autres termes, le lieu des points  $P_1$  est une cubique.

On verrait de la même manière que le lieu des points  $P_2$  est aussi une cubique.

Avant de passer à la détermination de points particuliers, nous dirons quelques mots des coniques dont il vient d'être question.

Chaque combinaison de deux sommets du triangle donné avec leurs côtés opposés donne lieu à une transformation biquadratique (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 143). Ainsi, en n'employant que les sommets B et C avec leurs côtés opposés  $b$  et  $c$ , à tout point L du plan correspond un seul point L' et à toute droite  $l$  correspond une conique. Mais deux points déterminent une droite; donc deux points doivent suffire pour déterminer la conique correspondante, c'est-à-dire qu'à toutes les droites du plan correspondent toutes les coniques d'un réseau. Ces coniques ont trois points communs: ce sont les points *fondamentaux* de la transformation. Dans le cas qui nous occupe, ces points sont: le point  $H_2$ , intersection des perpendiculaires à AB au point B et à AC au point C, et les deux points à l'infini de ces perpendiculaires.

Les points doubles de cette transformation, c'est-à-dire les points L qui se confondent avec leur point correspondant, sont les sommets A, B, C du triangle donné et le point de rencontre D de ses hauteurs. Ces points doubles se trouvent de la manière suivante: aux droites qui passent par un point L correspondent les coniques qui passent par le point correspondant L'. Ces coniques forment un faisceau projectif au faisceau de droites L.

Le lieu des points d'intersection des rayons  $L$  avec leurs coniques correspondantes forme une cubique. De même le lieu des points d'intersection du rayon d'un faisceau  $M$  avec leurs coniques correspondantes forme une autre cubique. Ces deux cubiques se coupent en neuf points : les trois points fondamentaux et les deux points d'intersection du rayon  $LM$  commun aux deux faisceaux de droites avec la conique correspondante sont au nombre de ces neuf points, les quatre autres sont les points doubles cherchés (\*). Pour la détermination graphique de ces points doubles, il ne faut pas employer des points quelconques  $L$  et  $M$ , mais bien les deux points particuliers  $B$  et  $C$ ; les deux cubiques sont formées alors par les droites  $AC, BD, BH_2$  et  $AB, CD, CH_2$ .

Si l'on fait les transformations qui résultent de l'emploi des sommets  $B$  et  $A$ , ou  $C$  et  $A$ , on obtient encore les mêmes points doubles et les points fondamentaux des trois transformations sont les points  $H_2, M_2, L_2$  ( $H_2$  est l'intersection des perpendiculaires à  $AC$  en  $C$  et à  $AB$  en  $B$ ;  $M_2$  est l'intersection des perpendiculaires à  $CB$  en  $B$  et à  $CA$  en  $A$ , et  $L_2$  est l'intersection des perpendiculaires à  $BC$  en  $C$  et à  $BA$  en  $A$ ), avec les points à l'infini sur les perpendiculaires à  $a, b, c$ .

Si l'on fait la construction inverse, par laquelle on déduit  $P_1$  de  $P_2$ , on obtient encore trois transformations dont les points doubles sont aussi  $A, B, C, D$  et dont les points fondamentaux sont  $A, B, C, F_1, G_1, K_1$  ( $F_1, G_1, K_1$  sont les sommets du triangle que l'on obtient en menant par chacun des sommets de  $ABC$  une parallèle au côté opposé).

---

(\*) La démonstration est tout à fait analogue à celle que donne M. Chasles pour la détermination des points doubles de deux figures homographiques (*Géométrie supérieure*, n° 561).

Ces points fondamentaux et doubles appartiennent aux courbes  $P_1$  et  $P_2$ , comme nous allons le voir. La détermination de quelques points particuliers n'offrant pas de difficultés, nous allons les indiquer dans un tableau à deux colonnes qui donnera la correspondance des points des deux courbes.

*Courbe des points  $P_1$ .**Courbe des points  $P_2$ .*

Les sommets du triangle donné...	A	Les sommets du triangle donné...	A
Id.	B	Id.	B
Id.	C	Id.	C
Le point de rencontre des hauteurs.	D	Le point de rencontre des hauteurs..	D
Le point de rencontre des médianes.	$E_1$	Le centre du cercle circonscrit.....	$E_2$
Les sommets du triangle $G_1, F_1, K_1$ :	$G_1$	Le point à l'infini de la perpendiculaire à AC menée par $E_2$ (asymptote de $P_2$ ).	
	$F_1$	Le point à l'infini de la perpendiculaire à BC menée par $E_2$ (asymptote).	
	$K_1$	Le point à l'infini de la perpendiculaire à AB menée par $E_2$ (asymptote).	
Le pied de la perpendiculaire abaissée de			
$H_3$ sur BC	$H_1$	$H_2$	
$I_2$ sur AC	$I_1$	$I_3$	
$M_3$ sur AB	$M_1$	$M_2$	
Les points d'intersection des droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit ou avec un des cercles exinscrits :		Les centres des cercles inscrits et exinscrits.	
	$O_1$	$O_2$	
	$O'_1$	$O'_2$	
	$O''_1$	$O''_2$	
	$O'''_1$	$O'''_2$	

Les tangentes en  $F_1, G_1, K_1$  sont les droites  $AF_1, BG_1, CK_1$ .

Les asymptotes de la courbe  $P_1$  peuvent se trouver des deux manières suivantes :

1<sup>o</sup> Soit  $P_2$  un point de la courbe  $P_2$  qui correspond à un point à l'infini de  $P_1$  ; abaissons les perpendiculaires



$P_2 B'$  sur  $AC$  et  $P_2 C'$  sur  $AB$ . Les droites  $BB'$  et  $CC$  doivent être parallèles; donc

$$AB' \cdot AC' = AB \cdot AC = \text{const.}$$

La droite  $B'C'$  enveloppe donc une hyperbole tangente à  $BC$  et ayant  $AB$  et  $AC$  pour asymptotes; par suite  $P_2$  engendre une hyperbole déterminée par les deux faisceaux projectifs dont les rayons sont respectivement perpendiculaires à  $AB$  et à  $AC$ . Cette courbe passe donc par  $H_2$  et a pour asymptotes  $AI_2$ ,  $AM_2$ .

Si l'on employait la transformation  $A, C$ , on obtiendrait pour le lieu des points  $P_2$  une hyperbole ayant pour asymptotes  $BH_2$ ,  $BM_2$  et passant par  $I_2$ . Ces deux hyperboles ont un point commun à l'infini; elles se coupent en trois autres points qui sont les points de la courbe  $P_2$  qui correspondent aux points à l'infini de la courbe  $P_1$ .

2° Soit  $Cx$  une des trois directions cherchées. Traçons  $Bx$  parallèle à  $Cx$ ; par  $B'$  et  $C'$  élevons une perpendiculaire à  $AC$  et  $AB$ . Ces perpendiculaires se coupent en un point qui engendre une conique quand la direction  $Cx$  varie. Cette conique n'est autre que celle qui correspond à la droite de l'infini dans la transformation  $BC$ . Les transformations  $AC$  et  $AB$  donnent aussi chacune une conique. Ces trois coniques ont, deux à deux, un des sommets du triangle en commun; les trois autres points d'intersection sont communs aux trois coniques et donnent les trois directions cherchées.

*Remarque I.* — Les points  $H_2, I_2, M_2$  appartiennent à la circonférence circonscrite à  $ABC$ , et ces six points sont les intersections de la cubique  $P_2$  avec cette circonférence.

*Remarque II.* — Les points  $A, B, C, D$  sont communs aux deux courbes  $P_1, P_2$ .

*Remarque III.* — On peut généraliser le problème et opérer sur trois points A, B, C, et trois droites quelconques  $a, b, c$ .

*Note.* — Solutions analytiques par MM. Moret-Blanc; L. Bourguet; P. Sondat.

---

*Question 1209*

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 240);

PAR M. LOUIS THUILLIER,

Élève du lycée d'Amiens.

*Deux ellipses sont concentriques ; on leur mène une tangente commune, et l'on joint au centre les points de contact ; ces deux droites et les cordes communes qui passent par le centre forment un faisceau harmonique.*

(MANNHEIM.)

D'après le théorème de Desargues, les deux ellipses et le système des cordes communes passant par le centre déterminent sur la tangente commune aux deux ellipses une involution, dont les points doubles sont les points de contact. Les points doubles étant conjugués par rapport à deux points homologues quelconques, le faisceau formé des cordes communes et des droites allant du centre aux points de contact est harmonique.

*Remarque.* — Les deux autres systèmes de cordes communes parallèles rencontrent chacun la tangente commune en deux points conjugués par rapport aux points de contact. Chacun de ces systèmes forme donc, avec les parallèles qu'on lui mène des points de contact, un faisceau harmonique ayant son sommet à l'infini.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Barthe et Clautrier, élèves du lycée de Poitiers; P. Ponsart, élève du lycée de Reims; A. Tourettes; Joseph Narino, élève du lycée de Marseille; Moret-Blanc; L. Goulin, élève du lycée de Rouen; Portail et Biard, élèves du lycée de Lille; H. Lez; C. Chadu.

---

NOUVELLES ANNALES  
DE  
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS  
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,  
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

---

DEUXIÈME SÉRIE.  
TOME SEIZIÈME.

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,  
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET

---

PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,  
Quai des Augustins, n° 55.

—  
1877.

Indice du système de deux droites déterminées par deux de leurs points :

$cf. e'f'I_{e'f}$

$$= \sum \left| \begin{array}{cc} (e, A) & (f, A) \\ (e, B) & (f, B) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (e', A) & (f', A) \\ (e', B) & (f', B) \end{array} \right| \frac{1}{\lambda^2 \mu^2 \sin^2(\lambda, A) \sin^2(\mu, B)}$$

$$- \sum \left| \begin{array}{cc} (e, C) & (f, C) \\ \phantom{(e, C)} & \phantom{(f, C)} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} (e', C) & (f', C) \\ \phantom{(e', C)} & \phantom{(f', C)} \end{array} \right| \frac{1}{\nu^2 \sin^2(\nu, C)}.$$

Indice du système de deux droites déterminées par deux plans :

$\pi^2 \sin EF \sin E'F'I_{e'f}$

$$= - \sum \left| \begin{array}{cc} \sin \lambda E & \sin \lambda F \\ \sin \mu E & \sin \mu F \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \sin \lambda E' & \sin \lambda F' \\ \sin \mu E' & \sin \mu F' \end{array} \right| \lambda^2 \mu^2$$

$$+ \sum \left| \begin{array}{cc} \sin \nu E & \sin \nu F \\ (o, E) & (o, F) \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} \sin \nu E' & \sin \nu F' \\ (o, E') & (o, F') \end{array} \right| \nu^2.$$

## SUR LES SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Soit, en général, une fonction entière  $\Delta f(x)$  égale à la différence d'une fonction  $f(x)$ , pour une différence de l'argument égale à l'unité

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n;$$

en remplaçant successivement  $x$  par 1, 2, 3, ...,  $(x-1)$ , et en posant

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (x-1)^n,$$

on obtient par addition

$$f(x) - f(1) = a_0 S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \dots + a_n S_0,$$

ou, *symboliquement*,

$$(1) \quad f(x) - f(1) = \Delta f(S),$$

en ayant soin de ne pas oublier l'exposant zéro de S.

Faisons, dans la formule (1),  $f(x)$  égal à  $(x-1)^n$  ou à  $x^n$ , nous obtenons

$$(2) \quad (x-1)^n = S^n - (S-1)^n,$$

$$(3) \quad x^n - 1 = (S+1)^n - S^n,$$

et, par addition et soustraction, les deux formules

$$(4) \quad x^n + (x-1)^n - 1 = (S+1)^n - (S-1)^n,$$

$$(5) \quad x^n - (x-1)^n - 1 = (S+1)^n + (S-1)^n - 2S^n,$$

qui permettent de calculer les sommes S de deux en deux, par voie récurrente. Mais on peut, pour parvenir au même but, se servir de la formule suivante. En effet, faisons encore, dans la formule (1),  $f(x)$  égal à  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$ , nous obtenons l'équation

$$(6) \quad (2x-1)^n - 1 = (2S+1)^n - (2S-1)^n,$$

qui a été donnée par M. Gilbert, au moyen de l'analyse infinitésimale (*Nouvelles Annales de Mathématiques*).

Enfin, si, dans la formule (1), on suppose

$$f(x) = (x+z)(x+z+1) \dots (x+z+n-1),$$

on obtient

$$(7) \quad f(x) - f(1) = n(S+z+1)(S+z+2) \dots (S+z+n-1),$$

et plus particulièrement, pour  $z = 0$  et pour  $z = -1$ ,

$$(8) \quad \begin{cases} x(x+1) \dots (x+n-1) \\ = n(S+1)(S+2) \dots (S+n-1) + 1.2.3 \dots n, \\ (x-1)x \dots (x+n-2) = nS(S+1) \dots (S+n-2). \end{cases}$$

2.

2. On tire du système des  $n$  équations obtenues en remplaçant successivement  $n$  par  $1, 2, 3, \dots, n$ , dans la formule (3), le déterminant

$$(9) \quad 1.2.3\dots n.S_{n-1} = \begin{vmatrix} x^n & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \dots & C_n^1 & 1 \\ x^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ x^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \dots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^2 & 0 & 0 & \dots & C_2^1 & 1 \\ x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On obtient un déterminant plus simple au moyen de l'une des formules (4), (5) ou (6). Cette dernière donne, par exemple, pour des valeurs impaires de l'exposant

$$(10) \quad 1.3.5\dots(2n+1)2^{2n+1}S_{2n} = \begin{vmatrix} (2x-1)^{2n+1} & C_{2n+1}^{2n-2} & C_{2n+1}^{2n-3} & \dots & C_{2n+1}^2 & 1 \\ (2x-1)^{2n-1} & C_{2n-1}^{2n-2} & C_{2n-1}^{2n-3} & \dots & C_{2n-1}^2 & 1 \\ (2x-1)^{2n-3} & 0 & C_{2n-3}^{2n-3} & \dots & C_{2n-3}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2x-1)^3 & 0 & 0 & \dots & C_3^2 & 1 \\ (2x-1)^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Enfin on peut obtenir  $S_n$  en fonction d'un déterminant contenant au moins  $(n+1)$  fonctions arbitraires de  $x$ ; pour cela, il suffit de considérer  $(n+1)$  équations semblables à l'équation (1).

3. La formule (1) peut être généralisée par l'introduction de nouvelles variables. En effet, on peut écrire cette formule de la manière suivante :

$$\Delta_x f(1, j) = \Delta_s f(S, j),$$

en supposant l'accroissement de  $x$  égal à  $(x-1)$ , et ce-

lui de  $S$  à l'unité; on en déduit

$$(11) \quad \Delta_{x,y}^2 f(1,1) = \Delta_{S,S'}^2 f(S,S'),$$

et, de même,

$$(12) \quad \Delta_{x,y,z,\dots}^p f(1,1,1,\dots) = \Delta_{S,S',S'',\dots}^p f(S,S',S'',\dots),$$

$p$  désignant le nombre des variables; les accroissements du premier membre sont respectivement égaux à  $(x-1)$ ,  $(y-1)$ ,  $(z-1)$ ,  $\dots$ , et ceux du second membre à l'unité. On ne doit pas réduire les  $S$  avec les  $S'$  et les  $S''$ ; mais on remplacera, après le développement du second membre,  $S^n$ ,  $S'^n$ ,  $S''^n$  par  $S_n$ , et l'on obtiendra des relations entre les produits deux à deux, trois à trois, etc., des sommes  $S$ .

4. On peut poser, symboliquement, l'égalité

$$(13) \quad n S_{n-1} = (x+B)^n - B^n,$$

dans laquelle on remplace les exposants de  $B$  par des indices, et  $B_0$  par l'unité. Ces coefficients  $B$  sont appelés *nombre de Bernoulli*, parce que Jacques Bernoulli les a remarqués, le premier, comme formant le coefficient du dernier terme, dans les sommes des puissances paires. La comparaison des formules (9) et (13) donne

$$(14) \quad 1.2.3 \dots n. B_{n-1} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \dots & C_n^1 & 1 \\ C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ 0 & C_{n-2}^{n-3} & \dots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_2^1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il serait facile de trouver ainsi un grand nombre de formules semblables, mais on peut aussi calculer les coefficients  $B$  de la manière suivante. En changeant  $x$

en  $x + 1$ , dans la relation (13), on obtient, par différence, l'identité

$$(15) \quad n x^{n-1} = (x + B + 1)^n - (x + B)^n,$$

qui a lieu pour toutes les valeurs entières et positives de  $x$  et, par suite, quelle que soit la valeur de  $x$ . En particulier, pour  $x = 0$ ,  $x = \pm 1$ ,  $x = -\frac{1}{2}$ , et, par addition et par soustraction, on a les relations récurrentes

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} (B + 1)^n - B^n = 0, \\ B^n - (B - 1)^n = n(-1)^{n-1}, \\ (B + 1)^n + (B - 1)^n = n(-1)^{n-1}, \\ (B + 2)^n - (B + 1)^n = n, \\ (2B + 1)^n - (2B - 1)^n = 2n(-1)^{n-1}, \\ \dots \end{array} \right.$$

La première de ces relations a été indiquée par Moivre.

On peut encore obtenir les nombres  $B$  au moyen de déterminants déduits des équations (15) et (16); le calcul donne, pour les premiers coefficients,

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = -\frac{1}{30}, \\ B_4 = \frac{1}{42}, \quad B_5 = -\frac{1}{30}, \quad \dots$$

Les coefficients d'indice impair sont nuls, à l'exception de  $B_1$ , ainsi que cela résulte de la troisième et de la cinquième des formules (16); d'autre part, l'équation (14) fait voir que le produit  $1.2.3 \dots n B_{n-1}$  est entier.

Enfin on déduit encore de la formule (13) l'égalité

$$(17) \quad \frac{dS_n}{dx} = nS_{n-1} + B_n,$$

qui permet de calculer rapidement  $S_n$  par voie d'intégra-



tion, en calculant chaque fois la constante par l'une des conditions

$$S_n = 1 \text{ pour } x = 2 \text{ et } S_n = 0 \text{ pour } x = 1.$$

5. Si l'on observe que le premier membre de la formule (15) est la dérivée de  $x^n$ , et le second, la différence de  $(x + B)^n$ , on a, plus généralement,

$$(18) \quad f(x + B + 1) - f(x + B) = f'(x).$$

Posons, par exemple,

$$f(x) = x(x + 1) \dots (x + n - 1),$$

nous obtenons

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{n}{x} &= \frac{B + x + 1}{x + 1} \frac{B + x + 2}{x + 2} \dots \frac{B + x + n - 1}{x + n - 1} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} + \dots + \frac{1}{x + n - 1}. \end{aligned} \right.$$

Dans l'hypothèse  $x = 1$ , nous avons

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{n}{1} &= \frac{B + 2}{2} \frac{B + 3}{3} \dots \frac{B + n}{n} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \end{aligned} \right.$$

et, pour  $x = 0$ , en augmentant  $n$  d'une unité,

$$(21) \quad (B + 1)(B + 2) \dots (B + n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{n + 1}.$$

La formule (18) donne, pour  $x = 0$ ,

$$(22) \quad f(B + 1) - f(B) = f'(0);$$

faisons maintenant  $f(x) = e^{xz}$ , il vient

$$e^{Bz}(e^z - 1) = z,$$

et, par suite,

$$(23) \quad e^{Ez} = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Cette formule, souvent employée en Analyse, subsiste pour toutes les valeurs de  $z$  dont le module est inférieur à  $2\pi$ .

Faisons encore, dans la formule (22),

$$f(x) = \sin \left( x - \frac{1}{2} \right) z,$$

nous obtenons

$$(24) \quad \cos Ez = \frac{z}{2} \cot \frac{z}{2}.$$

6. Si l'on introduit une seconde variable  $\gamma$  dans la formule (18), on a

$$\Delta_x f(x + B, \gamma) = \frac{df(x, \gamma)}{dx},$$

en supposant  $\Delta x = 1$ ; si l'on applique ce résultat à la fonction  $\frac{df(x, \gamma)}{dx}$  de  $\gamma$ , on aura

$$(25) \quad \Delta_{x, \gamma} f(x + B, \gamma + B') = \frac{d^2 f(x, \gamma)}{dx d\gamma},$$

et, en général,

$$(26) \quad \Delta_{x, \gamma, z, \dots}^p f(x + B, \gamma + B', z + B'', \dots) = \frac{d^p f(x, \gamma, z, \dots)}{dx d\gamma dz \dots},$$

en supposant  $\Delta x = \Delta \gamma = \Delta z = \dots = 1$ . On ne réduira pas les  $B$  avec les  $B'$  et les  $B''$ ; mais, lorsque le développement symbolique du premier membre sera effectué, on remplacera  $B^n, B'^n, B''^n, \dots$  par  $B_n$ . On aura ainsi les relations contenant les produits deux à deux, trois à trois, etc., des nombres de Bernoulli.

7. On a, d'après les résultats obtenus dans un article

précédent (*Nouvelles Annales*, novembre 1875), la formule

$$(27) \quad S_n S_m - S_{m+n} = S^n \frac{(S+B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} + S^m \frac{(S+B)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1};$$

pour  $m = n$ ,

$$(28) \quad \frac{n+1}{2} S_n^2 = S^n (S+B)^{n+1} - S^n B^{n+1},$$

en remplaçant  $B_1$  par zéro. On déduit, inversement,

$$(29) \quad 2 S_{2n+1} = \begin{vmatrix} (n+1) S_n^2 & C_{n+1}^2 B_2 & C_{n+1}^1 B_4 & \dots & 0 & 0 \\ n S_{n-1}^2 & 1 & C_n^2 B_2 & \dots & 0 & 0 \\ (n-1) S_{n-2}^2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4 S_3^2 & 0 & 0 & \dots & C_4^2 B_2 & 0 \\ 3 S_2^2 & 0 & 0 & \dots & 1 & C_3^2 B_2 \\ 2 S_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il résulte immédiatement de la formule (13) que les rapports

$$\frac{S_n}{x} \quad \text{et} \quad \frac{S_{n+1}}{x^2}$$

ont respectivement pour valeurs

$$B_n \quad \text{et} \quad \frac{2n+1}{2} B_{2n},$$

lorsque  $x$  tend vers zéro. Si l'on introduit ces hypothèses dans les relations précédentes, dans les relations (27) et (29), par exemple, on trouve

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{m+n} = B^m \frac{(B+B')^{n+1} - B'^{n+1}}{n+1} \\ \quad \quad \quad + B^n \frac{(B+B')^{m+1} - B'^{m+1}}{m+1}, \end{array} \right.$$

et

$$(31) \quad (2n+1)B_{2n} = \begin{vmatrix} (n+1)B_n^2 & C_{n+1}^2 B_2 & C_{n+1}^4 B_4 & \dots & 0 & 0 \\ nB_{n-1}^2 & 1 & C_n^2 B_2 & \dots & 0 & 0 \\ (n-1)B_{n-2}^2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4B_3^2 & 0 & 0 & \dots & C_4^2 B_2 & 0 \\ 3B_2^2 & 0 & 0 & \dots & 1 & C_3^2 B_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

### NOTE SUR UN THÉORÈME FONDAMENTAL DANS LA THÉORIE DES COURBES ;

PAR M. H. LAURENT.

On sait que, lorsque deux courbes variables de forme et de position ont ensemble  $n + 1$  points communs et que ces points, dans une position particulière de la figure, viennent à se confondre, elles ont un contact d'une nature particulière, et que l'on appelle *contact d'ordre  $n$*  ; au point de contact les ordonnées des deux courbes sont égales, ainsi que leurs  $n$  premières dérivées. Cette proposition n'est pas démontrée d'habitude avec toute la rigueur désirable. Je me propose d'en donner ici une démonstration que je crois irréprochable.

Soient  $f(x)$  et  $\varphi(x)$  les ordonnées des deux courbes correspondant à l'abscisse  $x$  ; si les courbes ont  $n + 1$  points communs, on pourra représenter leurs abscisses par

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1},$$

et leurs ordonnées par

$$f(x_1) = \varphi(x_1), \quad \dots, \quad f(x_{n+1}) = \varphi(x_{n+1}).$$

---



---

**SUR LES THÉORÈMES DE BINET ET DE STAUDT**

CONCERNANT LES NOMBRES DE BERNOULLI;

 PAR M. ÉDOUARD LUCAS.
 

---

1. MM. Clausen et Staudt ont découvert, en même temps, sur les nombres de Bernoulli, un théorème fort remarquable dont la démonstration a été donnée par ce dernier, dans le *Journal de Crelle* (t. 21, p. 372). En conservant les notations que nous avons adoptées précédemment (*Nouvelles Annales*, même tome, p. 21), ce théorème s'énonce ainsi : *Le coefficient  $B_n$  de Bernoulli a pour expression*

$$(1) \quad B_n = A_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} - \dots - \frac{1}{\lambda},$$

$2, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$  désignant des nombres premiers tels que  $\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1, \dots, \lambda - 1$  soient des diviseurs de  $n$ , et  $A_n$  un nombre entier. On a, pour les nombres  $A_n$ , les valeurs suivantes :

$$A_0 = A_2 = A_4 = \dots = A_{12} = 1,$$

$$A_1 = A_3 = A_5 = \dots = A_{2n+1} = 0,$$

$$\begin{array}{lll} A_{14} = 2, & A_{16} = -6, & A_{18} = 56, \\ A_{20} = -528, & A_{22} = 6193, & A_{24} = -86576, \\ A_{26} = 142558, & A_{28} = -27298230, & A_{30} = 601580875, \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

2. On déduit immédiatement du *théorème de Staudt* que l'expression  $a(a^n - 1)B_n$  est toujours un nombre

entier, quel que soit l'entier  $a$ . En effet, le binôme  $a^n - 1$  est divisible par  $a^{\alpha-1} - 1$ , lorsque  $\alpha - 1$  désigne un diviseur de  $n$ , et le produit  $a(a^{\alpha-1} - 1)$  est divisible par  $\alpha$ , si  $\alpha$  est un nombre premier, d'après le théorème de Fermat. Pour  $a = 2$ , on retrouve un résultat indiqué par M. Genocchi, qui en a déduit des conséquences importantes relatives au fameux problème de Fermat sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$x^p + y^p = z^p \quad (*).$$

3. M. Hermite a indiqué une méthode de calcul des nombres entiers  $A_n$ , dont nous allons simplifier la démonstration en lui laissant une forme générale (\*\*). Cette méthode conduit à la connaissance d'un grand nombre de fonctions numériques, venant se joindre à toutes celles dont la théorie des fonctions elliptiques a donné l'origine et les propriétés. Soit  $f(x)$  une fonction quelconque de degré  $2n$ , telle que chacune des puissances de  $x$  ait un coefficient égal au produit du coefficient binomial correspondant par un nombre entier, et posons

$$(2) \quad \varphi_r(x) = \frac{1}{1.2.3\dots r} [f^{(r)}(x+1) - f^{(r)}x].$$

L'application du développement de Taylor et de la formule symbolique [voir p. 23, formule (18)]

$$(3) \quad f(x+B+1) - f(x+B) = f'(x)$$

nous donne

$$(4) \quad f'(x) = B_0 \varphi_0 + B_1 \varphi_1 + B_2 \varphi_2 + B_3 \varphi_3 + \dots + B_{2n} \varphi_{2n}.$$

(\*) A. GENOCCHI, *Sur les nombres de Bernoulli* (Annales de Tortolini; 1852).

(\*\*) *Journal de Crelle*, t. 51. — Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Borchardt; 1875.

En remplaçant les valeurs des coefficients B, d'après (1), on a, après avoir posé ( $p$  désigne un nombre premier)

$$(5) \begin{cases} \Sigma_1(x) = A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + \dots + A_{2n}\varphi_{2n} - f'(x), \\ p\Sigma_p(x) = \varphi_{p-1} + \varphi_{2p-2} + \varphi_{3p-3} + \varphi_{4p-4} + \dots, \end{cases}$$

la formule suivante pour le calcul des nombres A :

$$(6) \Sigma_1(x) = \Sigma_2(x) + \Sigma_3(x) + \Sigma_5(x) + \Sigma_7(x) + \Sigma_{11}(x) + \dots,$$

où les  $\Sigma$  se rapportent à tous les nombres premiers jusqu'à  $2n + 1$ . D'ailleurs,  $\Sigma_p(x)$  est entier pour toutes les valeurs entières de  $x$ , puisque, si la somme des fractions

$$\frac{a_0}{2} + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \dots + \frac{l}{\lambda}$$

désigne un nombre entier, chacune des fractions qui composent cette somme est toujours un nombre entier, lorsque tous les dénominateurs sont premiers entre eux.

4. La somme des puissances semblables des nombres inférieurs et premiers à un nombre donné a été obtenue par Binet, au moyen du calcul symbolique (*Comptes rendus*, t. XXXIII, p. 920; 1851). Voici une formule plus simple. Les sommes des puissances  $n^{\text{ièmes}}$  des  $(x - 1)$  premiers nombres, et des  $\left(\frac{x}{d} - 1\right)$  premiers multiples de  $d$ , en désignant par  $d$  un diviseur quelconque de  $x$ , ont respectivement pour expressions

$$\frac{(x + B)^{n+1} - B^{n+1}}{n + 1} \quad \text{et} \quad \frac{(x + dB)^{n+1} - (dB)^{n+1}}{d(n + 1)}.$$

On a donc, par un procédé analogue à celui qui conduit à l'évaluation du nombre des entiers inférieurs et premiers au nombre

$$x = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots,$$

la formule symbolique suivante, dans laquelle  $\Sigma_n$  désigne

la somme des puissances  $n^{\text{ièmes}}$  des entiers inférieurs et premiers à  $x$ ,

$$(7) \quad (n + 1)\Sigma_n = (x + Q)^{n+1} - Q^{n+1};$$

et l'on a

$$(8) \quad \begin{cases} Q_n = B_n(1 - a^{n-1})(1 - b^{n-1})(1 - c^{n-1}) \dots, \\ Q_0 = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots \end{cases}$$

## THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (\*).]

86. Comme application immédiate de notre théorie, nous donnons les formules fondamentales de la géométrie polyédrique, distance de deux points, surface d'un triangle, volume d'un tétraèdre, angle de deux droites et de deux plans, axes principaux d'une surface du second degré, etc., les figures étant rapportées au système de huit plans, déterminant les tétraèdres de référence  $abcd$ ,  $a'b'c'd'$ .

Comme on le verra, nos formules, à cause de leur parfaite symétrie, sont simples, malgré le grand nombre de termes qu'elles contiennent.

Nous donnons ensuite la théorie des surfaces homofocales, des rayons de courbure, des lignes géodésiques et de certains systèmes de surfaces. Comme nous n'avons ici en vue que les surfaces du second degré, nous

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5.



l'égalité (A) devient

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) \left( \frac{1}{9 \cdot 25 \cdot 81} \right) \\ & + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \left( \frac{1}{9 \cdot 4 \cdot 36} \right) \\ & + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{25 \cdot 4 \cdot 16} \right) \\ & + \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{81 \cdot 36 \cdot 16} \right) = 0. \end{aligned}$$

(CATALAN.)

1247. Dans les surfaces du second ordre à centre unique, ce centre pouvant d'ailleurs être situé à distance finie ou infinie, le lieu des points tels que les génératrices rectilignes, réelles ou imaginaires, soient orthogonales, est donné par l'intersection, réelle ou imaginaire, de la surface considérée, avec la sphère de Monge, relative à cette même surface. (ESCARY.)

1248. Démontrer que  $\sqrt{5}$  est égal à la limite du rapport des deux séries

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots, \quad \text{et} \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{29} + \dots,$$

dans lesquelles chacun des dénominateurs est donné par la relation  $D_{n+2} = 3D_{n+1} - D_n$ . (E. LUCAS.)

*Rectifications.* — Page 219, ligne 13 : au lieu de l'axe des paraboles, lisez l'une des paraboles.

Page 222, ligne 2 : au lieu de  $\frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}$ , il faut  $\frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A}$ .

2° Toute droite qui passe par deux points d'inflexion d'une courbe du troisième degré rencontre la courbe en un autre point d'inflexion.

---

### QUESTIONS.

---

1249. On a la série rapidement convergente

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 47} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 2207} + \dots,$$

dans laquelle chacun des facteurs du dénominateur est égal au carré du précédent diminué de deux unités.

(E. LUCAS.)

1250. Recherche des lignes telles que la corde qui sous-tend leurs intersections avec les côtés d'un angle droit pivotant sur un point fixe enveloppe un cercle autour de ce point.

On sait que l'ellipse, rapportée à son centre, forme un cas particulier de cette catégorie de courbes.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

1251. L'expression

$$6xy(3x^4 + y^4),$$

dans laquelle  $x$  et  $y$  sont des entiers différents de zéro, ne peut jamais représenter un cube, ni le quadruple d'un cube.

(S. REALIS.)

---

de telle sorte que les triangles AOB, BOC, COD, . . . , soient équivalents.

Le point H sera évidemment à la limite le centre de gravité de la circonférence de l'ellipse, la répartition de la densité en chaque point résultant de la distribution des points A, B, C, . . . . Le point G ne sera autre que le centre de l'ellipse, à la limite, et nous aurons toujours

$$OG \simeq \frac{2}{3} OH;$$

d'où

$$OH \simeq \frac{3}{2} OG,$$

c'est-à-dire que le point H est à moitié distance entre le centre de l'ellipse et le second foyer O'.

Il est aisé de reconnaître que le problème que nous venons de résoudre ainsi n'est autre que celui-ci :

*Une planète, dans sa révolution autour du Soleil, abandonne uniformément une quantité de matière qui se fixe sur la trajectoire. Quel est le centre de gravité de cette trajectoire matérielle, une fois la révolution accomplie?*

## SUR LA RÉOLUTION DU SYSTÈME DES ÉQUATIONS

$$2v^2 - u^2 = a^2 \quad \text{et} \quad 2v^2 + u^2 = 3z^2$$

EN NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Nous observerons d'abord qu'il est facile de ramener au système proposé la résolution de l'une des équations biquadratiques

$$4v^4 - u^4 = 3W^2 \quad \text{ou} \quad 9z^4 - u^4 = 8V^2,$$

et l'on a

$$W = wz \quad \text{et} \quad V = uv.$$

Nous supposons  $u, v, w, z$  entiers et premiers entre eux; nous tirons de la première équation du système proposé

$$\left(\frac{w+u}{2}\right)^2 + \left(\frac{w-u}{2}\right)^2 = v^2,$$

et, par les formules de résolution des triangles rectangles en nombres entiers,

$$(A) \quad u = a^2 - b^2 + 2ab, \quad w = a^2 - b^2 - 2ab, \quad v = a^2 + b^2;$$

les nombres  $a$  et  $b$  sont entiers et premiers entre eux, et  $u, w$  ont des signes arbitraires, afin de ne pas nuire à la généralité de la solution. En portant ces valeurs dans la seconde équation du système proposé, nous obtenons

$$(1) \quad 3(a^2 + b^2)^2 + 4ab(a^2 - b^2) = 3z^2.$$

Cette égalité montre que le produit

$$ab(a+b)(a-b)$$

est divisible par 3; mais, puisque  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, on peut, à cause de la symétrie, puisque la forme de l'équation ne change pas en remplaçant respectivement  $a$  et  $b$  par  $a+b$  et  $a-b$ , supposer

$$b = 3b'.$$

Alors l'équation (1) devient

$$(a^2 - 2ab' + 3b'^2)(a^2 + 6ab' + 27b'^2) = z^2;$$

mais  $z$  est impair, et les deux facteurs de  $z^2$  sont premiers entre eux; on a donc

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab' + 3b'^2 &= z_1^2, \\ a^2 + 6ab' + 27b'^2 &= z_2^2, \\ z &= z_1 z_2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}(a - b')^2 + 2b'^2 &= z_1^2, \\ (a + 3b')^2 + 2(3b')^2 &= z_2^2.\end{aligned}$$

La décomposition en facteurs donne, pour la première équation,

$$(2) \quad a - b' = \pm (r^2 - 2s^2), \quad b' = 2rs,$$

et pour la seconde

$$(3) \quad a + 3b' = \pm (r'^2 - 2s'^2), \quad 3b' = 2r's'.$$

Il nous reste à identifier les valeurs de  $a$  et de  $b'$  tirées de chacune de ces équations, ce qui conduit aux quatre cas suivants :

*Premier cas.* — En prenant le signe  $+$  dans l'équation (2) et le signe  $-$  dans l'équation (3), on a

$$\begin{aligned}r^2 + 2rs - 2s^2 &= 2s'^2 - 2r's' - r'^2, \\ 3rs &= r's' .\end{aligned}$$

Posons

$$r' = 3mr \quad \text{et} \quad s = ms',$$

nous obtenons, par l'élimination de  $r'$  et de  $s$ , l'équation quadratique

$$m^2(9r^2 - 2s'^2) + 8rs'm + r^2 - 2s'^2 = 0.$$

Si nous exprimons que la valeur de  $m$  est rationnelle, il vient

$$36r^2s'^2 - 9r^4 - 4s'^4 = H^2,$$

équation impossible suivant le module 3.

*Deuxième cas.* — En prenant le signe  $-$  dans l'équation (2), et le signe  $+$  dans l'équation (3), on se trouve encore conduit à l'impossibilité précédente.

*Troisième et quatrième cas.* — En prenant, en même

temps, les signes supérieurs ou inférieurs dans les équations (2) et (3), nous arrivons aux relations

$$\begin{aligned} r^2 + 2rs - 2s^2 &= r'^2 - 2r's' - 2s'^2, \\ 3rs &= r's'. \end{aligned}$$

En posant encore

$$r' = 3mr \quad \text{et} \quad s = ms',$$

nous obtenons, comme ci-dessus, l'équation

$$m^2(9r^2 + 2s'^2) - 8rs'm = r^2 + 2s'^2.$$

Pour que la valeur de  $m$  tirée de cette équation soit rationnelle, on doit avoir

$$(3r^2 + 6s'^2)^2 - 32s'^4 = K^2,$$

et alors

$$m = \frac{-4rs' \pm K}{9r^2 + 2s'^2}.$$

On déduit, par la décomposition en facteurs,

$$\begin{aligned} 3r^2 + 6s'^2 \pm K &= 2p^4, \\ 3r^2 + 6s'^2 \mp K &= 16q^4, \\ s' &= pq; \end{aligned}$$

les nombres  $p$  et  $q$  sont entiers et premiers entre eux; on obtient ensuite, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned} p^4 + 8q^4 &= 3r^2 + 6s'^2, \\ p^4 - 8q^4 &= \pm K. \end{aligned}$$

La première des équations précédentes peut être mise sous la forme

$$(p^2 - 3q^2)^2 - q^4 = 3r^2,$$

et, par une nouvelle décomposition en facteurs,

$$\left. \begin{aligned} p^2 - 2q^2 &= g^2, \\ p^2 - 4q^2 &= 3h^2, \\ r &= gh, \end{aligned} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{aligned} p^2 - 2q^2 &= -g^2, \\ p^2 - 4q^2 &= -3h^2, \\ r &= gh; \end{aligned} \right.$$

la première décomposition est impossible suivant le module 4, et la seconde conduit au système

$$\begin{aligned} 2q^2 - g^2 &= p^2, \\ 2q^2 + g^2 &= 3h^2, \end{aligned}$$

identique au système proposé.

Par conséquent, *on résout complètement le système des équations*

$$\begin{aligned} 2v^2 - u^2 &= w^2, \\ 2v^2 + u^2 &= 3z^2 \end{aligned}$$

par les formules

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (r^2 + 8rs - 2s^2)^2 - 72r^2s^2, \\ \mathbf{V} &= (r^2 + 2rs - 2s^2)^2 + 36r^2s^2, \\ \mathbf{W} &= (r^2 - 4rs - 2s^2)^2 - 72r^2s^2, \\ \mathbf{Z} &= (r^2 + 2s^2)(2r^2 + 9s^2), \end{aligned}$$

dans lesquelles

$$\begin{aligned} r &= uz(2v^2w^2 + 9u^2z^2), \\ s &= vw[4uvwz \pm (w^4 - 8u^4)]. \end{aligned}$$

Ainsi la solution immédiate

$$u_0 = v_0 = w_0 = z_0 = \pm 1$$

donne ainsi

$$v_1 = 37, \quad w_1 = 47, \quad u_1 = 23, \quad z_1 = 3 \times 11;$$

en prenant le signe inférieur dans la valeur de  $s$ , on a ensuite

$$\begin{aligned} v_2 &= 40573, & w_2 &= 23183, \\ u_2 &= 52487, & z_2 &= 139 \times 323; \end{aligned}$$

puis la solution

$$\begin{aligned} v &= 2\,536\,422\,0918\,55129, \\ u &= 3\,586\,470\,3316\,69969, \\ w &= 6406\,72783\,29889, \\ z &= (9 \times 45\,97777)(11 \times 64\,33883), \end{aligned}$$

qui a été calculée et vérifiée par M. Alphonse Fiquet; on observera que ces solutions croissent très-rapidement.

On peut aussi résoudre le système proposé, par l'équation (1), d'une autre manière, au moyen de la décomposition que nous avons employée autrefois (1).

La solution précédente conduit encore à la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Le système des équations*

$$2v^2 - u^2 = w^4 \quad \text{et} \quad 2v^2 + u^2 = 3z^2,$$

a pour solution unique  $u = v = w = z = \pm 1$ .

En effet, l'équation (A) donne, en remplaçant  $w$  par  $w^2$ ,

$$a^2 - 6ab' - 9b'^2 = w^2;$$

car on ne peut supposer le second membre égal à un carré négatif. On tire de l'équation précédente

$$(4) \quad a - 3b' = \pm (e^2 + 2f^2), \quad 3b' = 2ef;$$

identifions les valeurs de  $a$  et de  $b'$  tirées des équations (2) et (4), nous obtenons, en prenant en même temps les signes supérieurs,

$$\begin{aligned} e^2 + 2ef + 2f^2 &= r^2 + 2rs - 2s^2, \\ ef &= 3rs. \end{aligned}$$

Posons encore

$$e = 3mr \quad \text{et} \quad s = mf,$$

nous arrivons à l'équation

$$m^2(9r^2 + 2f^2) - 4frm + 2f^2 - r^2 = 0.$$

Pour que la valeur de  $m$  soit rationnelle, on doit avoir l'équation

$$9r^4 - 12r^2f^2 - 4f^4 = R^2,$$

---

(\*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 468; 1876.



dans laquelle on peut supposer  $r$  et  $f$  premiers entre eux.

On en tire

$$3r^2 - 2f^2 \pm R = \pm 2g^4,$$

$$3r^2 - 2f^2 \mp R = \mp 4h^4,$$

$$f = gh;$$

puis, par addition,

$$3r^2 = \pm (g^4 + 2h^4) + 2g^2h^2,$$

c'est-à-dire

$$3r^2 = (g^2 + h^2)^2 + h^4,$$

ou bien

$$-3r^2 = (g^2 - h^2)^2 + h^4;$$

ces deux dernières équations sont impossibles suivant le module 3; donc  $g = h = 0$ ; puis  $f = b' = 0$  et  $w = \pm 1$ .

En prenant les signes inférieurs dans les équations (2) et (4), on arrive aux mêmes conclusions; d'autre part, en prenant le signe  $-$  dans l'équation (2) et le signe  $+$  dans l'équation (4), on obtient

$$e^2 + 2f^2 = 2s^2 + 4rs - r^2,$$

et, comme précédemment,

$$4f^4 - 12f^2r^2 - 9r^4 = R^2,$$

équation impossible suivant le module 4, puisque  $r$  ne peut être pair; car, s'il en était autrement,  $a$  et  $b$  ne seraient pas premiers entre eux, comme l'équation (2) le fait voir.

Enfin, en prenant le signe  $+$  dans l'équation (2) et le signe  $-$  dans l'équation (4), on arrive aux mêmes résultats.

*Remarque I.* — Les équations

$$4v^4 - u^4 = 3w^4 \quad \text{et} \quad 9z^4 - v^4 = 8v^4$$

ne peuvent être vérifiées séparément que pour des valeurs égales des indéterminées.

*Remarque II.* — Le système des équations

$$x = u^2, \quad x + 1 = 2v^2, \quad 2x + 1 = 3z^2$$

a pour solution unique  $x = 1$ ; en effet, ce système donne

$$2v^2 - u^2 = 1^4 \quad \text{et} \quad 2v^2 + u^2 = 3z^2.$$

## SUR UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. BOURGUET ;

PAR M. CATALAN.

La solution donnée par M. Muffat, dans le numéro de juillet des *Nouvelles Annales*, a reporté mon attention sur l'énoncé suivant :

*Trouver les racines de l'équation*

$$(1) \quad 0 = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} - \dots,$$

au sujet duquel je vais présenter quelques remarques.

### I.

Quand on propose de résoudre une équation

$$\varphi(x) = 0,$$

il est sous-entendu que  $\varphi(x)$  est une fonction, sinon bien déterminée, au moins bien définie. En est-il ainsi dans le cas actuel? Autrement dit, la série (1) est-elle convergente pour toutes les valeurs positives de  $x$ ? C'est là une question préliminaire sur laquelle je ne me prononce pas, faute de temps, mais que M. Bourguet doit avoir examinée et résolue. Je me bornerai à cette seule indication : si  $x$  croît indéfiniment, l'équation (1)

*berts*. Extracted from *Proceedings of the London mathematical Society*, vol. VI, n<sup>os</sup> 89 et 90.

15. *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie d'ordine n con un punto (n — 1)-plo*, per R. de Paolis. Estratto dal volume XIII del *Giornale di Matematiche*.

16. *Recherches sur les développoides des divers ordres*, par M. J.-N. Haton de la Goupillière. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 2<sup>e</sup> année, 1877.

17. *Sui centri di gravità*, per Achille Minozzi. Estratto dal volume XV del *Giornale di Matematiche*.

18. *Sulla teoria del movimento d'una figura piana nel suo piano*, per Achille Minozzi. Naples, 1877. In-4<sup>o</sup>.

SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1180

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIV, p. 336);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

*Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient vingt-quatre sur le côté de la base.* (ÉDOUARD LUCAS.)

On sait, en effet, que la somme des carrés des  $x$  premiers nombres entiers a pour expression

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6};$$

on doit donc poser

$$x(x+1)(2x+1) = 6y^2;$$

mais les facteurs  $x$ ,  $x+1$  et  $2x+1$  sont premiers entre eux, et l'équation précédente donne les neuf décompositions suivantes :

I. . . .	$x = 6u^2,$	$x + 1 = v^2,$	$2x + 1 = w^2;$
II. . . .	$x = 3u^2,$	$x + 1 = 2v^2,$	$2x + 1 = w^2;$
III. . . .	$x = 3u^2,$	$x + 1 = v^2,$	$2x + 1 = 2w^2;$
IV. . . .	$x = 2u^2,$	$x + 1 = 3v^2,$	$2x + 1 = w^2;$
V. . . . .	$x = 2u^2,$	$x + 1 = v^2,$	$2x + 1 = 3w^2;$
VI. . . .	$x = u^2,$	$x + 1 = 6v^2,$	$2x + 1 = w^2;$
VII. . .	$x = u^2,$	$x + 1 = 3v^2,$	$2x + 1 = 2w^2;$
VIII. . .	$x = u^2,$	$x + 1 = 2v^2,$	$2x + 1 = 3w^2;$
IX. . . .	$x = u^2,$	$x + 1 = v^2,$	$2x + 1 = 6w^2.$

Nous allons examiner successivement ces neuf hypothèses.

I. On a

$$(1) \quad w^2 - 1 = 12u^2,$$

et, par suite, puisque les facteurs  $w+1$  et  $w-1$  ont leur plus grand commun diviseur égal à 2, on en déduit, en admettant les valeurs négatives de  $w$ ,

$$(2) \quad w + 1 = 2\alpha^2;$$

mais, d'autre part,

$$(3) \quad w^2 + 1 = 2v^2.$$

Les équations (2) et (3) doivent être vérifiées en même temps. Le système de ces deux équations a été traité complètement par M. Gerono (\*); il n'admet pour solu-

---

(\*) Voir même tome, p. 231.

tions entières que les valeurs  $w = \pm 1$  et  $w = \pm 7$ . Ces valeurs vérifient d'ailleurs l'équation (1); on en déduit  $x = 0$  et  $x = 24$ . Ainsi

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 24^2 = \frac{24 \cdot 25 \cdot 49}{6} = 4900.$$

II. Cette hypothèse conduit à l'équation

$$2v^2 - 3u^2 = 1,$$

impossible suivant le module 3.

III. On déduit de cette décomposition l'équation

$$2v^2 - 6u^2 = 1,$$

impossible suivant le module 2.

IV. On obtient aisément

$$v^2 + 1 = 6v^2,$$

équation impossible suivant le module 3.

V. Cette hypothèse donne l'équation

$$4u^2 + 1 = 3v^2,$$

impossible suivant le module 3 ou le module 4.

VI. On trouve l'équation, impossible suivant le module 3,

$$6v^2 = u^2 + 1.$$

VII. On trouve de même l'impossibilité

$$3v^2 = u^2 + 1.$$

VIII. Cette hypothèse ne donne que la solution  $x = 1$ , d'après la remarque qui termine l'article précédent.

IX. On est conduit à l'impossibilité

$$2u^2 + 1 = 6v^2.$$

Ainsi, en résumé, la somme des carrés des  $x$  premiers nombres entiers n'est jamais égale à un carré parfait, excepté pour  $x = 24$ .

### QUESTIONS.

1252. Soient O et XY un point et une droite fixes. Du point O, on mène jusqu'à la droite :

OA quelconque ;

OB perpendiculaire à OA ;

OC bissectrice de l'angle droit AOB ;

OD perpendiculaire à OC.

Déterminer le minimum de la somme  $AB + CD$  des deux hypoténuses.

1253. On propose de résoudre les équations

$$\begin{aligned} zy - r^2 &= A, & xz - s^2 &= B, & xy - t^2 &= C, \\ st - rx &= D, & tr - sy &= E, & rs - zt &= F. \end{aligned}$$

(J.-CH. DUPAIN).

1254. Démontrer la formule suivante, où  $C_m^n$  est le nombre des combinaisons de  $m$  objets  $n$  à  $n$  :

$$k C_a^k + (k-1) C_a^{k-1} C_b^1 + (k-2) C_a^{k-2} C_b^2 + \dots = \frac{a}{a+b} C_{a+b}^k \cdot k.$$

(H. LAURENT).

### ERRATA.

Page 262, ligne 6, au lieu de  $= \frac{a^2 \nu}{a^2 \mu}$ , lisez  $= \frac{a^2 \nu}{b^2 \mu}$ .

Page 335, ligne 11, au lieu de  $pn \cos \frac{\Lambda}{2}$ , lisez  $mn \cos \frac{\Lambda}{2}$ .

NOUVELLES ANNALES  
DE  
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS  
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,  
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

*TOME DIX-SEPTIÈME.*

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEN,  
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

---

PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,  
Quai des Augustins, n° 55.

1878.

Les formules d'addition [19] sont les premières que l'on ait trouvées sur les fonctions directes. Elles sont analogues aux formules fondamentales de la Trigonométrie; mais ce n'est pas comme nous venons de le montrer qu'elles ont été trouvées.

C'est en intégrant l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \mp \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0,$$

que l'on est arrivé à la découverte des formules d'addition. La méthode la plus simple qui ait été donnée pour l'intégration de cette formule est due à Lagrange. D'autres méthodes, plus simples en apparence, ont l'inconvénient de s'appuyer sur des artifices qui supposent évidemment que l'on connaît d'avance l'intégrale.

( *A suivre.* )

## THÉORÈME SUR LA GÉOMÉTRIE DES QUINCONCES ;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

*Les sommets ou les centres d'un échiquier quelconque ne sont jamais situés aux sommets d'un triangle équilatéral.*

En effet, si l'on prend l'un des sommets pour origine des coordonnées rectangulaires, et si l'on désigne par  $(a, b)$  et  $(c, d)$  les coordonnées des deux autres sommets, on devrait avoir

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2,$$



ou

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2ac + bd,$$

et, par suite,

$$3(a^2 + b^2) = (a + c)^2 + (b + d)^2.$$

Donc le nombre 3 diviserait une somme de deux carrés, que l'on peut supposer premiers entre eux; ce qui est impossible.

### SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

#### Question 1232

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 250 );

PAR M. H. LEZ.

*En un point M d'une conique, on construit la parabole osculatrice et l'on prend le symétrique P du foyer de cette parabole par rapport à la tangente en M : démontrer que le point M et son symétrique N par rapport à P sont réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.*

( LAGUERRE. )

Prenant pour axe des  $x$  la normale au point M et pour axe des  $y$  la tangente au même point, on pourra écrire, pour l'équation de la conique,

$$ax^2 + 2hxy + y^2 - 2px = 0;$$

le centre de cette conique a pour coordonnées

$$x = \frac{p}{a - h^2}, \quad y = -\frac{ph}{a - h^2}.$$

*Note.* — Solutions analogues par MM. F. Pisani, professeur à Girgenti; Ch. Brunot, élève du lycée de Dijon; H. Dessoudeix, élève du lycée de Bordeaux; Moret-Blanc; V. Jamet, professeur au lycée de Saint-Brieuc; E. Dunoyer, élève du lycée de Marseille; Cl. Talon, élève au lycée de Moulins; P. Barbarin, élève de l'École normale.

### Question 1248

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 336 );

PAR M. C. MOREAU,  
Capitaine d'Artillerie.

Démontrer que  $\sqrt{5}$  est égal à la limite du rapport des deux séries

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \dots \quad \text{et} \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{29} + \dots,$$

dans lesquelles chacun des dénominateurs est donné par la relation

$$D_{n+2} = 3D_{n+1} - D_n.$$

( E. LUCAS. )

Lorsqu'une fonction de  $n$  est déterminée par l'équation

$$y_{n+2} = xy_{n+1} - y_n,$$

et par les conditions initiales

$$y_0 = 1, \quad y_1 = x + a,$$

on peut représenter cette fonction par l'expression

$$y_n = \frac{1 + az - (a + z)z^{2n+1}}{z^n(1 - z^2)},$$

où  $z$  est l'une des deux racines de l'équation

$$z^2 - xz + 1 = 0.$$

Pour la première des deux séries proposées, on a

$$a = -1;$$

les dénominateurs successifs sont donc donnés par la formule

$$D_n = \frac{1 + z^{2n+1}}{z^n(1+z)},$$

et le terme général de la série est

$$\left(1 + z \frac{z^n}{1 + z^{2n+1}}\right).$$

Pour la seconde série,  $a = 1$ ; on a

$$D_n = \frac{1 - z^{2n+1}}{z^n(1-z)},$$

et, comme les signes sont alternés, le terme général est

$$(1 - z) \frac{(-1)^n z^n}{1 - z^{2n+1}}.$$

Il résulte de cela que le rapport des deux séries proposées est

$$\frac{1 + z \left( \frac{1}{1+z} + \frac{z}{1+z^3} + \frac{z^2}{1+z^5} + \dots \right)}{1 - z \left( \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z^3} + \frac{z^2}{1-z^5} - \dots \right)} = \frac{1 + z f(z)}{1 - z \varphi(z)}.$$

Supposons maintenant que  $x$  soit plus grand que 2, et que l'on choisisse, pour  $z$ , celle des deux racines de l'équation donnée plus haut, qui est plus petite que l'unité; tous les termes de  $f(z)$  et de  $\varphi(z)$  pourront se développer en séries convergentes. Développons, par exemple,  $f(z)$ ; on aura

$$f(z) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots \\ + z - z + z^3 - z^{10} + z^{13} - \dots \\ + z^2 - z^7 + z^{12} - z^{17} + z^{22} - \dots \\ + z^3 - z^{10} + z^{17} - z^{24} + z^{31} - \dots \\ + z^4 - z^{13} + z^{22} - z^{31} + z^{40} - \dots \\ + \dots \end{array} \right\},$$

et, en faisant les sommes des colonnes verticales, on retrouve les termes successifs de  $\varphi(z)$ . Ainsi  $f(z) = \varphi(z)$ , ce qui montre, en passant, que la fonction  $f(z)$  est paire, puisque  $\varphi(z)$  n'est autre chose que  $f(-z)$ ; il s'ensuit, d'autre part, que le rapport des deux séries considérées se réduit à

$$\frac{1+z}{1-z} = \sqrt{\frac{1+z^2+2z}{1+z^2-2z}} = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}.$$

Dans le cas particulier de la question 1248, on a  $x = 3$ , et le rapport des deux séries est bien égal à  $\sqrt{5}$ .

*Note.* — La même question a été résolue par MM. J. de Virieu, professeur à Lyon; H.-J. Krantz, à Brèda.

### Question 1249

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 384 );

PAR M. C. MOREAU,  
Capitaine d'Artillerie.

*On a la série rapidement convergente*

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 47} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 2207} + \dots,$$

*dans laquelle chacun des facteurs du dénominateur est égal au carré du précédent diminué de deux unités.*

( E. LUCAS. )

Soit posé

$$y_0 = 3, \quad y_1 = 7, \quad y_2 = 47, \quad \dots,$$

et, en général,

$$y_n = y_{n-1}^2 - 2.$$

On peut évidemment représenter  $y_n$  par l'expression

$$y_n = x^{2^n} + \frac{1}{x^{2^n}},$$

où  $x$  est l'une quelconque des deux racines de l'équation

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

On déduit de là

$$y_0 = \frac{1+x^2}{x}, \quad y_1 = \frac{1+x^4}{x^2}, \quad y_2 = \frac{1+x^8}{x^4}, \quad \dots,$$

et la série proposée devient

$$\frac{1}{x} \left[ \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^4}{(1+x^2)(1+x^4)} + \frac{x^8}{(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)} + \dots \right].$$

Or la série écrite entre crochets est connue : c'est un cas particulier de celle qui a fait l'objet de la question 1181 (*voir* t. XV, 2<sup>e</sup> série, p. 135 et 180), et l'on sait qu'elle a pour limite 1 ou  $x^2$ , suivant que  $x$  est plus grand ou plus petit que l'unité.

Il résulte de cela que la somme de la série proposée est égale à la plus petite racine de l'équation

$$x^3 - 3x + 1 = 0, \text{ c'est-à-dire à } \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

*Autrement.* — On peut toujours poser

$$\frac{y_0 - \alpha}{2} = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \frac{1}{y_0 y_1 y_2} + \dots,$$

et chercher à déterminer  $\alpha$ .

Or, si l'on élimine successivement du second membre  $y_0, y_1, y_2, \dots$ , on obtient

$$\frac{y_1 - \alpha y_0}{2} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_1 y_2} + \dots,$$

$$\frac{y_2 - \alpha y_0 y_1}{2} = \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_2 y_3} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{y_n - \alpha y_0 y_1 \dots y_{n-1}}{2} = \frac{1}{y_n} + \frac{1}{y_n y_{n+1}} + \dots$$

Lorsque  $n$  augmente indéfiniment, le second membre de la dernière de ces égalités tend vers zéro; on a donc

$$\alpha = \lim \frac{y_n}{y_0 y_1 \dots y_{n-1}}.$$

Cela posé, la relation générale

$$y_n = y_{n-1}^2 - 2$$

donne, par son élévation au carré,

$$y_n^2 - 4 = y_{n-1}^2 (y_{n-1}^2 - 4).$$

On en déduit facilement

$$y_n^2 - 4 = y_0^2 y_1^2 y_2^2 \dots y_{n-1}^2 (y_0^2 - 4),$$

et l'on voit que

$$\lim \frac{y_n}{y_0 y_1 \dots y_{n-1}} = \sqrt{y_0^2 - 4} = \alpha = \sqrt{5}.$$

*Remarque.* — On peut remarquer que l'on a, en général,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{y_n} + \frac{1}{y_n y_{n+1}} + \frac{1}{y_n y_{n+1} y_{n+2}} + \dots \right) \\ &= \left( \frac{1}{y_{n-1}} + \frac{1}{y_{n-1} y_n} + \dots \right)^2. \end{aligned}$$

Il est facile de voir également que

$$\left( 1 - \frac{1}{y_0} \right) \left( 1 - \frac{1}{y_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{y_2} \right) \dots = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Vladimir Habbé, Moret-Blanc et J. de Virieu.

---

La dernière égalité montre bien que les points M, N sont réciproques par rapport au cercle  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ . C'est ce qu'il fallait démontrer.

*Note du rédacteur.* — Dans le *Traité des sections coniques* de M. Salmon, il est démontré (p. 206, 3<sup>e</sup> édit., 1855) qu'en désignant par  $x^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = 0$ , l'équation d'une conique, rapportée à une tangente et à la normale au point de contact, la parabole osculatrice en ce point a pour équation

$$x^2 + Bxy + \frac{B^2}{4}y^2 + Ey = 0;$$

il en résulte évidemment qu'au point de contact les deux courbes ont le même diamètre.

Les expressions  $\frac{b^2}{a' \sin \theta}$ ,  $\frac{p'}{2 \sin \theta}$  des rayons de courbure se trouvent aussi dans le même ouvrage (p. 207 et 208).

L'égalité  $OM \times ON = a^2 + b^2$  indique un moyen très-simple de déterminer la parabole osculatrice en un point M d'une ellipse donnée; car cette égalité donne immédiatement le point N, et en prenant le symétrique F du milieu P de MN, par rapport à la tangente en M, on a le foyer de la parabole. La directrice de cette courbe s'obtient en menant au point P une perpendiculaire à la direction du diamètre OM. (G.)

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

### Question 1239

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 288);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

*L'équation  $x^3 - 6\alpha\epsilon x - 3\alpha\epsilon(\alpha + \epsilon) = 0$ , dans laquelle  $\alpha$  et  $\epsilon$  sont des entiers quelconques qui n'annulent pas le dernier terme, n'a pas de racines entières.*

(S. REALIS.)

En effet, l'équation peut être écrite ainsi :

$$(x + \alpha)^3 + (x + \beta)^3 = (x + \alpha + \beta)^3,$$

et l'on sait qu'Euler a démontré que jamais un cube entier ou fractionnaire n'est égal à la somme de deux cubes rationnels (\*).

*Note.* — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

### Question 1240

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 288) ;

PAR M. MORET-BLANC.

*L'équation*

$$x^3 - (\beta - \gamma)x + \alpha\gamma = 0,$$

dans laquelle  $\alpha$  et  $\gamma$  sont des entiers plus grands que zéro, et  $\beta$  est un entier satisfaisant à la condition

$$\alpha^2 > \beta \geq (\alpha - 1)^2,$$

ou bien à la condition

$$\alpha^2 < \beta \leq (\alpha + 1)^2,$$

a au moins une racine réelle incommensurable.

(S. REALIS.)

Le coefficient du premier terme étant 1, l'équation n'admet pour racines commensurables que des racines entières ; de plus, elle a une racine réelle de signe contraire à  $\alpha\gamma$ , c'est-à-dire négative.

Substituant à  $x$  dans le premier membre successivement  $-(\alpha - 1)$ ,  $-\alpha$  et  $-(\alpha + 1)$ , on a les trois ré-

---

(\*) Voir l'*Algèbre* d'EULER, ou la *Théorie des nombres* de LEGENDRE.



même orientation, les deux transversales qui joignent respectivement les trois sommets d'angles issus de M, et les trois sommets d'angles issus de N, se coupent en un point P sous un angle constant.

2° Déterminer le lieu du point P, quand on fait varier l'angle  $\alpha$ .  
(P. TERRIER.)

1264. On donne une droite dont le coefficient d'inclinaison est  $\tan\alpha$  (axes rectangulaires). Indiquer une construction graphique qui donne directement  $\tan^3\alpha$ . Application à la construction graphique d'une tangente à la cissoïde et à la strophoïde, parallèlement à une direction donnée.

(H. BROCARD.)

1265. Le centre d'un cercle O de rayon constant se déplace dans son plan sur la circonférence d'un cercle fixe O'. Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe P, par rapport au cercle O.

(LAISANT.)

1266. Si, par le pôle de l'orthogénide

$$\rho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \sin\left(-\frac{1}{3}\omega\right),$$

on mène une droite quelconque, les tangentes aux points d'intersection de cette droite avec l'orthogénide forment un triangle équilatéral (\*). Trouver le lieu du centre de ce triangle et l'enveloppe du cercle circonscrit, lorsque la droite oscille autour du pôle.

(E. LUCAS.)

---

(\*) Voir 2<sup>e</sup> série, t. V, p. 30, et t. XV, p. 101.

SUR L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE  $X^3 + Y^3 = AZ^3$ ;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

On a le théorème suivant :

*Pour que l'équation proposée soit vérifiée par des valeurs entières de X, Y, Z, A, il faut et il suffit que A appartienne à la forme  $xy(x+y)$  préalablement débarrassée de ses facteurs cubiques.*

En effet, on a l'identité

$$[x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2]^3 + [y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2]^3 \\ = xy(x+y) \cdot 3^3 [x^2 + xy + y^2]^3,$$

et l'on résout l'équation proposée, par les valeurs

$$X = x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2,$$

$$Y = y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2,$$

$$Z = 3(x^2 + xy + y^2),$$

$$A = xy(x+y).$$

Réciproquement, si l'équation est vérifiée pour les valeurs  $x_0, y_0, z_0$  des variables, et si l'on pose

$$x = x_0^3, \quad y = y_0^3,$$

on a

$$xy(x+y) = A(x_0y_0z_0)^3.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Il résulte encore de l'identité précédente que toute solution de l'équation proposée conduit à une série indéfinie de solutions nouvelles, en supposant A constant. Il faut excepter le cas de  $x = \pm y$ .

*Exemple.* — Pour  $x = 1, y = 2$ , on a la solution

$$17^3 + 37^3 = 6 \cdot 21^3;$$

de laquelle on déduit une série indéfinie d'autres solutions. On observera ainsi que l'équation

$$x^3 + y^3 = 6z^3$$

a une infinité de solutions, bien que Legendre ait affirmé le contraire. On peut aussi trouver d'autres identités, en nombre illimité, et ainsi la suivante :

$$\begin{aligned} & [x^3 + 3x^2y - y^3]^3 + [3xy(x + y)]^3 \\ & = [x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - y^3][x^2 + xy + y^2]^3, \end{aligned}$$

de laquelle il résulte que le polynôme

$$x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - y^3$$

n'est jamais égal au cube d'un nombre entier, ni à son double, à son triple, à son quadruple ou à son quintuple.

#### CORRESPONDANCE.

1. *Lettre de M. Hilaire, Professeur à Douai.* — Permettez-moi de vous communiquer quelques observations sur le problème donné en Mathématiques élémentaires au Concours général de 1877, et dont je trouve une solution (p. 213) (\*).

Je remarque d'abord que le centre de l'ellipse est évidemment le point du plan bissecteur qui a le point  $p$  pour projection orthogonale sur le plan  $P$  : donc ce point ne se confond avec le point  $a$  que quand la droite  $Aa$  est perpendiculaire à la fois au plan bissecteur et au

(\*) La seconde solution (page 268) n'était pas encore publiée lorsque nous avons reçu la lettre de M. Hilaire.

et

$$y^2 = \overline{15^2} + 10.\overline{20^2} = \overline{65^2},$$

où les conditions  $x = u - 3$  et  $u = z + 5$  sont observées.

Pour  $t = 5$  et  $u = -7$ , dans la seconde suite, on a de même

$$y = (-10)^2 + 5.(-7)^2 = 345$$

et

$$y^2 = \overline{145^3} + 5.\overline{140^2} = \overline{345^2},$$

où  $x = u - 3$  et  $v = z - 5$ .

Dans cet exemple, comme dans plusieurs de ceux qui précèdent, on évite l'apparence des solutions négatives, en admettant que les conditions  $u = x + \alpha$ ,  $v = z + \beta$  signifient simplement que la différence entre  $x$  et  $u$  et entre  $z$  et  $v$  soit respectivement  $\alpha$  et  $\beta$  en valeur absolue, sans impliquer que  $u > x$ , ni  $v > z$ . La dernière solution, par exemple, devient ainsi

$$y = 10^2 + 5.7^2, \quad y^2 = \overline{145^3} + 5.\overline{140^2}.$$

Le sujet que je viens de traiter dans cette Étude comporte beaucoup d'autres développements, mais je dois me borner pour le moment à en avoir indiqué les traits caractéristiques.

NOTA. Page 424, ligne 9, au lieu de « les deux solutions », lisez « deux des quatre solutions. »

## SUR LE SYSTÈME DES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES

$$x^2 - Ay^2 = u^2, \quad x^2 + Ay^2 = v^2;$$

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

On a tout d'abord le théorème suivant :

*Pour que le système indéterminé*

$$(1) \quad x^2 - Ay^2 = u^2, \quad x^2 + Ay^2 = v^2$$

soit vérifié par une série indéfinie de valeurs entières des inconnues  $x, y, u, v$ , il faut et il suffit que  $A$  appartienne à la forme

$$(2) \quad A = \lambda_0 \mu_0 (\lambda_0 + \mu_0) (\lambda_0 - \mu_0),$$

que l'on peut supposer débarrassée de ses facteurs quadratiques.

En effet, en ajoutant membre à membre les deux équations du système (1), on a

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = x^2,$$

et l'on doit poser

$$\frac{u+v}{2} = \lambda_0^2 - \mu_0^2, \quad \frac{u-v}{2} = 2\lambda_0\mu_0, \quad x = \lambda_0^2 + \mu_0^2,$$

$\lambda_0$  et  $\mu_0$  désignant deux nombres quelconques, premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair; on en déduit la solution initiale

$$(3) \quad \begin{cases} x_0 = \lambda_0^2 + \mu_0^2, \\ u_0 = \lambda_0^2 - \mu_0^2 + 2\lambda_0\mu_0, \\ v_0 = \lambda_0^2 - \mu_0^2 - 2\lambda_0\mu_0, \end{cases}$$

et, par suite,

$$A = \lambda_0 \mu_0 (\lambda_0 + \mu_0) (\lambda_0 - \mu_0), \quad \gamma_0 = 2.$$

Ainsi le théorème est démontré; on sait d'ailleurs que le nombre  $A$  est dit *congruent*, et représente l'aire d'un triangle rectangle, dont les côtés entiers ont pour longueurs

$$\lambda_0^2 - \mu_0^2, \quad 2\lambda_0\mu_0, \quad \lambda_0^2 + \mu_0^2 \text{ (*)}.$$

Notre but est d'indiquer comment on peut parvenir à résoudre complètement le système proposé, pour les va-

---

(\*) *Recherches sur les ouvrages de Léonard de Pise*, Ch. II.

leurs de  $A$  données par la formule (2). Nous observerons, à ce sujet, qu'il est nécessaire, pour traiter généralement la question, de connaître la décomposition de  $A$  en ses facteurs premiers. On sait, en effet, que Lagrange a ramené la résolution des équations quadratiques indéterminées à des équations de la forme

$$x^2 - y^2 = Az^2,$$

et que cette résolution est liée à la connaissance des facteurs premiers de  $A$ . Inversement, nous montrerons ultérieurement que la décomposition d'un nombre donné  $A$ , en ses facteurs premiers, se trouve notablement simplifiée par l'essai direct de la résolution de l'équation

$$x^2 - y^2 = A,$$

au moyen de la considération des résidus quadratiques. Nous ferons voir que, par cette méthode, imaginée par Aurifeuille, et que nous avons perfectionnée, il est possible d'arriver plus rapidement à la décomposition de nombres de seize et de dix-huit chiffres qu'à celle des nombres de huit et de dix chiffres, par l'application des anciennes méthodes.

Par conséquent, on ne doit voir dans la présente Note que l'indication de la marche à suivre, pour résoudre complètement, pour toutes les valeurs numériques de  $A$ , décomposé en ses facteurs premiers, le système des équations proposées. On tire de la seconde des équations (1)

$$(v + x)(v - x) = Ay^2;$$

donc, en désignant par  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres entiers dont le produit égale  $A$ , et par  $e$  et  $f$  deux indéterminées, on aura

$$v + x = 2\alpha c^2, \quad v - x = 2\beta f^2, \quad y = 2cf,$$

et, par suite,

$$x = \alpha e^2 - \beta f^2, \quad v = \alpha e^2 + \beta f^2, \quad \gamma = 2ef.$$

En portant ces valeurs dans la première des équations proposées, on arrive à la condition

$$(\alpha e^2 - 3\beta f^2)^2 - u^2 = 8\beta^2 f^4.$$

Désignons par  $\beta_1$  et  $\beta_2$  deux nombres positifs ou négatifs, dont le produit est égal à  $\beta$ , par  $g$  et  $h$  deux nouvelles indéterminées, nous tirerons de la condition précédente

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha e^2 - 3\beta f^2 + u = \pm 2\beta_1^2 g^4, \\ \alpha e^2 - 3\beta f^2 - u = \pm 4\beta_2^2 h^4, \\ f = gh. \end{cases}$$

*Premier cas.* — Si l'on prend, en même temps, les signes supérieurs dans les équations (4), on en déduit, par addition, après avoir remplacé  $f$  par  $gh$  et  $\beta$  par  $\beta_1\beta_2$ ,

$$(\beta_1 g^2 + \beta_2 h^2)(\beta_1 g^2 + 2\beta_2 h^2) = \alpha e^2;$$

désignons par  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux nombres entiers dont le produit égale  $\alpha$ , et par  $p$  et  $q$  deux nouvelles indéterminées; nous poserons

$$\beta_1 g^2 + \beta_2 h^2 = \alpha_1 p^2,$$

$$\beta_1 g^2 + 2\beta_2 h^2 = \alpha_2 q^2,$$

$$e = pq;$$

et, par suite,

$$(5) \quad \alpha_1 p^2 - \beta_2 h^2 = \beta_1 g^2, \quad \alpha_1 p^2 + \beta_2 h^2 = \alpha_2 q^2.$$

Ce système est vérifié pour des valeurs égales des indéterminées  $g, h, p, q$ , lorsque l'on suppose

$$\alpha_1 = \lambda_0, \quad \beta_2 = \mu_0, \quad \beta_1 = \lambda_0 - \mu_0, \quad \alpha_2 = \lambda_0 + \mu_0;$$

il est facile de déduire de ces valeurs la solution initiale

(3). En général, une solution quelconque du système (5) donnera une solution du système proposé, et, par suite, une série indéfinie, comme nous allons le montrer.

Si l'on fait, dans le système (5),

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = \lambda_0 \mu_0 (\lambda_0^2 - \mu_0^2),$$

le système (5) coïncide avec le système proposé; par conséquent, d'une première solution  $(x, y, u, v)$  du système (1), on déduit une série indéfinie de solutions nouvelles  $(X, Y, U, V)$  par les formules

$$(6) \quad \begin{cases} X = u^2 x^2 - \lambda_0 \mu_0 (\lambda_0^2 - \mu_0^2) v^2 y^2, & Y = 2xyuv, \\ V = u^2 x^2 + \lambda_0 \mu_0 (\lambda_0^2 - \mu_0^2) v^2 y^2, & U = u^4 - 2x^4. \end{cases}$$

En désignant par  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  les valeurs successives de  $x$ , on voit que ces valeurs sont des polynômes en  $\lambda$  de degré 2, 8, 32,  $\dots, 2^{2n+1}$ .

*Second cas.* — Le système (4) donne de même, avec les signes inférieurs,

$$\begin{aligned} \beta_1 g^2 - \beta_2 h^2 &= \alpha_1 p^2, \\ 2\beta_2 h^2 - \beta_1 g^2 &= \alpha_2 q^2, \\ e &= p'q, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\beta_2 h^2 - \alpha_1 p^2 = \alpha_2 q^2, \quad \beta_2 h^2 + \alpha_1 p^2 = \beta_1 g^2.$$

On arrive ainsi à un système analogue au système (5). Par conséquent, on décomposera  $A$  en un produit de quatre facteurs, de toutes les manières possibles, et l'on aura un certain nombre d'équations de la forme (5); plusieurs d'entre elles seront reconnues impossibles, par non-congruence; d'autres seront possibles. Soit

$$M p^2 - N h^2 = P g^2, \quad M p^2 + N h^2 = Q q^2,$$

un tel système admettant la solution  $(g_0, h_0, p_0, q_0)$ ; on



posera

$$Mp_0^2 = \lambda, \quad Nh_0^2 = \mu, \quad Pg_0^2 = \lambda - \mu, \quad Qq_0^2 = \lambda + \mu,$$

et l'on aura

$$\lambda\mu(\lambda + \mu)(\lambda - \mu) = \Lambda z^2.$$

Il nous reste donc à considérer le système général

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda p^2 - \mu h^2 = \rho g^2, \\ \lambda p^2 + \mu h^2 = \sigma q^2, \end{cases}$$

dans lequel nous désignons, pour abrégér,  $\lambda - \mu$  par  $\rho$  et  $\lambda + \mu$  par  $\sigma$ . On résout la première équation du système (7), mise sous la forme

$$p^2 - \left( \frac{\rho g + \mu h}{\rho + \mu} \right)^2 = \rho \mu \left( \frac{h - g}{\rho + \mu} \right)^2,$$

par les formules

$$\begin{aligned} p &= \mu_1 r^2 + \rho_1 s^2, \\ h &= \mu_1 r^2 - \rho_1 s^2 + 2\rho_1 r s, \\ g &= \mu_1 r^2 - \rho_1 s^2 - 2\mu_1 r s, \end{aligned}$$

dans lesquelles  $\rho, \mu_1 = \rho_1 \mu$ . En portant ces valeurs dans la seconde des équations (7), on obtient la condition

$$\lambda(\mu_1 r^2 + \rho_1 s^2)^2 + \mu(\mu_1 r^2 - \rho_1 s^2 + 2\rho_1 r s)^2 = \sigma q^2,$$

ou bien

$$\sigma(\mu_1 r^2 + \rho_1 s^2)^2 + 4\rho\mu_1 r s(\mu_1 r^2 - \rho_1 s^2) + 4\rho\mu_1 r^2 s^2(\rho - \mu) = \sigma q^2,$$

ou, en posant  $s = \sigma s'$ ,

$$(\mu_1 r^2 + 2\rho\mu_1 r s' - \rho_1 \sigma^2 s'^2)^2 + 8\lambda^2 \mu_1 r^2 s'^2 = q^2.$$

On déduit de l'équation précédente

$$\begin{aligned} q \pm (\mu_1 r^2 + 2\rho\mu_1 r s' - \rho_1 \sigma^2 s'^2) &= 2\rho_2 \alpha^2, \\ q \mp (\mu_1 r^2 + 2\rho\mu_1 r s' - \rho_1 \sigma^2 s'^2) &= 4\mu_2 \lambda^2 t^2, \\ r s' &= \alpha t, \end{aligned}$$

en désignant par  $\rho_2$  et  $\mu_2$  deux nombres tels que

$$\rho_2 \mu_2 = \rho_1 \mu_1,$$

et par  $w$  et  $t$  deux nouvelles indéterminées; on en tire

$$(8) \quad \mu_1 r^2 + 2\rho_1 \mu_1 r s' - \rho_1 \sigma^2 s'^2 = \pm (\rho_2 \alpha^2 - 2\mu_2 \lambda^2 t^2).$$

Posons  $w = mr$ ,  $s' = mt$ , il vient, en prenant le signe +,

$$m^2(\rho_2 r^2 + \rho_1 \sigma^2 t^2) - 2\rho_1 \mu_1 r t m = \mu_1 r^2 + 2\mu_2 \lambda^2 t^2;$$

pour que la valeur de  $m$  soit rationnelle, on doit faire

$$\rho_2 \mu_1 r^4 + 3\lambda^2 \rho_1 \mu_1 \sigma r^2 t^2 + 2\rho_1 \mu_2 \sigma^2 \lambda^2 t^4 = H^2,$$

et l'on a

$$m = \frac{\rho_1 \mu_1 r t \pm H}{\rho_2 r^2 + \rho_1 \sigma^2 t^2}.$$

On peut écrire l'équation de condition sous la forme

$$(\rho_2 \mu_1 r^2 + A t^2)(\rho_2 \mu_1 r^2 + 2A t^2) = \rho_2 \mu_1 H^2,$$

et la séparer, de diverses manières, en deux autres formant un système analogue au système (5); on traitera ces différents systèmes de la même façon que précédemment. En faisant plus particulièrement  $\rho_2 = \mu_1 = 1$ , on a, en désignant par  $a$  et  $b$  deux nouvelles indéterminées,

$$\begin{aligned} r^2 + A t^2 &= a^2, \\ r^2 + 2A t^2 &= b^2, \\ ab &= H. \end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$a^2 - A t^2 = r^2, \quad a^2 + A t^2 = b^2;$$

c'est un système identique au système proposé. Par conséquent, d'une solution  $x, y, u, v$  du système

$$x^2 - A y^2 = u^2, \quad x^2 + A y^2 = v^2,$$

on déduit deux nouvelles solutions X, Y, U, V, par les formules

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} m = \mu\rho u y \pm v x, \\ n = u^2 + \mu\rho\sigma^2 y^2, \\ p = n^2 u^2 + \mu\rho\sigma^2 m^2 y^2, \\ q = m^2 u^2 + 2\mu\rho\lambda^2 n^2 y^2, \\ g = u^2 u^2 - \mu\rho\sigma^2 m^2 y^2 - 2\rho\sigma mn uy, \\ h = n^2 u^2 - \mu\rho\sigma^2 m^2 y^2 + 2\rho\sigma mn uy; \\ X = \lambda\sigma p^2 q^2 - \mu\rho g^2 h^2, \quad Y = 2ghpq, \\ V = \lambda\sigma p^2 q^2 + \mu\rho g^2 h^2, \quad U = \rho^2 g^4 - 2\mu^2 h^4. \end{array} \right.$$

Ces formules donnent des solutions distinctes de celles qui sont fournies par les équations (6); d'ailleurs le second cas conduirait aux mêmes formules.

Pour certaines valeurs de A, les formules (6) et (9) résolvent complètement le système (1), et par exemple pour A = 6. On traite ainsi complètement ce problème de Fermat :

*Trouver tous les triangles rectangles dont l'aire soit six fois celle d'un carré.*

Ces formules résolvent aussi complètement le système (7), pour le problème de Beha-Eddin, que l'on ramène au système

$$8x^2 - y^2 = 7u^2, \quad 8x^2 + y^2 = 9v^2,$$

ainsi que nous l'avons montré précédemment (\*).

*Remarque.* — En prenant le signe — dans la formule (8), on arrive à des systèmes analogues au système (5).

---

(\*) Voir tome XV, page 359.

Ainsi le point  $Z$  doit se déduire de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , de telle sorte que  $OZ$  soit la moyenne géométrique de  $OX_1, OX_2, \dots$  (en grandeur et en direction), multipliée par une constante géométrique.

**SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE DU TROISIÈME DEGRÉ  
ET SUR LA QUESTION 802 (\*) (SYLVESTER);**

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

I. Considérons l'équation du troisième degré

$$f(x, y, z) = 0$$

d'une courbe en coordonnées rectilignes et homogènes; soit  $m_1$  un point dont les coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  sont rationnelles, et qu'il est facile de rendre entières; on a ainsi une première solution en nombres entiers de l'équation proposée. On peut obtenir de nouvelles solutions, en nombres entiers, de l'équation, par l'un des trois procédés suivants :

1° Si l'on mène la tangente à la courbe en  $m_1$ , cette droite rencontre la courbe en un autre point  $m$  dont les coordonnées sont encore rationnelles; par conséquent, d'une première solution de l'équation (1) on déduit, en général, une nouvelle solution  $(x, y, z)$  de cette équation, par les formules

$$f(x, y, z) = 0, \quad x \frac{df}{dx_1} + y \frac{df}{dy_1} + z \frac{df}{dz_1} = 0.$$

Cependant, lorsque la tangente est parallèle à l'une des asymptotes, ou lorsque la tangente est menée par un

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. VI, p. 96.

point d'inflexion, on n'obtient pas de solutions nouvelles.

2° Si  $m_1$  et  $m_2$  désignent deux points dont les coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  sont rationnelles, et par conséquent entières, on obtient, en général, une nouvelle solution, en prenant l'intersection de la sécante  $m_1, m_2$  avec la courbe, c'est-à-dire par les équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

en tenant compte des relations

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad f(x_2, y_2, z_2) = 0.$$

3° Si l'on connaît cinq solutions de l'équation proposée, on obtient, en général, une sixième solution, en prenant le point d'intersection avec la courbe, de la conique passant par les cinq points qui correspondent aux solutions données; on peut d'ailleurs supposer plusieurs de ces points réunis en un seul, et en particulier tous les cinq réunis en un seul.

La méthode donnée par Fermat pour l'équation

$$(1) \quad x^3 + y^3 = Az^3,$$

et par Lagrange, pour l'équation générale, revient au premier procédé. La méthode donnée par Cauchy pour l'équation

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = 3Dxyz$$

revient au second (\*).

II. Nous considérerons plus particulièrement, dans ce qui suit, l'équation (1). On doit supposer différents cas;

---

(\*) Voir *Recherches sur les ouvrages de Léonard de Pise*, p. 49.

en effet, pour certaines valeurs de  $A$ , l'équation (1) est impossible, et ainsi, par exemple, pour

$$A = 1, 2, 3, 4, 5,$$

ainsi que pour d'autres valeurs générales, indiquées, pour la première fois, par M. Sylvester, dans la question 802.

Quant aux équations possibles, elles sont dites *monobasiques*, *bibasiques*, etc., suivant que l'on peut résoudre complètement l'équation proposée, par les formules qui résultent du premier procédé, en partant d'une, de deux, etc., solutions fondamentales. Il existe d'ailleurs des équations *monobasiques* et *bibasiques*, ainsi que nous le montrerons plus tard; cependant nous ajouterons que cette idée de classification et de résolution est due, je pense, à M. Sylvester, qui possède, depuis longtemps, un Mémoire inédit sur ce sujet intéressant.

III. Voici maintenant l'énoncé de la question 802 :

$p$  et  $q$  désignant des nombres premiers respectivement des formes  $18n + 5$  et  $18n + 11$ , il est impossible de décomposer en deux cubes, soit entiers, soit fractionnaires, aucun des nombres suivants :

$$p, 2p, 4p^2; q^2, 2q^2, 4q.$$

Soit d'abord à résoudre l'équation indéterminée

$$(1) \quad x^3 + y^3 = pz^3,$$

dans laquelle  $p$  désigne un nombre premier de la forme  $18n + 5$ , en nombres entiers et premiers entre eux. Le cube d'un nombre entier divisé par 9 donne pour reste 0, +1 ou -1; donc, pour que l'équation (1) soit possible, il faut que  $z^3$  soit divisible par 9, et, par suite,  $z = 3z_1$ . Cela posé, nous considérerons deux hypothèses, suivant que  $z$  est impair ou pair.

1°  $z$  impair. Alors  $x - y$  et  $x + y$  sont impairs; on a

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)M$$

et

$$4M = 3(x - y)^2 + (x + y)^2;$$

par conséquent  $M$  est divisible par 3, et non par une puissance supérieure; de plus, les diviseurs premiers de  $M$  appartiennent à la forme  $6h + 1$ ; on doit donc poser, avec  $z_1 = ab$ ,

$$x + y = 3^2 pa^3, \quad M = 3b^3$$

et, par suite,

$$(2) \quad 4b^3 = (x - y)^2 + 3\left(\frac{x + y}{3}\right)^2;$$

d'ailleurs  $b$  doit être de la forme  $f^2 + 3g^2$ ,  $f$  et  $g$  étant premiers entre eux; on a ainsi

$$(3) \quad \begin{cases} b = f^2 + 3g^2, \\ b^3 = F^2 + 3G^2, \\ 4b^3 = (F - 3G)^2 + 3(F + G)^2, \end{cases}$$

et, en identifiant d'après (2) et (3),

$$F + G = \frac{x + y}{3} = 3pa^3.$$

Mais le développement du cube de  $f + g\sqrt{-3}$  donne

$$F = f(f^2 - 9g^2), \quad G = 3g(f^2 - g^2);$$

par suite,

$$f(f^2 - 9g^2) + 3g(f^2 - g^2) = 3pa^3;$$

donc  $f$  serait divisible par 3, par suite  $b$ , et aussi  $x$  et  $y$ , que nous avons supposés premiers entre eux. Par conséquent,  $z$  ne peut être impair.

2° En supposant  $z$  pair, on aurait

$$M = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x - y}{2}\right)^2,$$

et, puisque  $x$  et  $y$  sont impairs, il en est de même de  $M$  ;  
on doit donc poser, avec  $z = 6ab$ ,

$$x + y = 3^2 \cdot 2^3 \cdot pa^3, \quad M = 3b^3,$$

et, par suite,

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2 = b^3.$$

Soient encore

$$b = f^2 + 3g^2, \quad b^3 = F^2 + 3G^2,$$

on en déduira

$$G = \frac{x+y}{6}, \quad \text{ou} \quad g(f^2 - g^2) = 4pa^3;$$

d'ailleurs  $f^2 + 3g^2$  et  $f^2 + 3g^2 - 4g^2 = f^2 - g^2$  sont  
impairs : donc  $g$  est pair, et l'on doit poser, avec  $a = \alpha\beta\gamma$ ,

$$\begin{cases} g = 4p\alpha^3, \\ f + g = \beta^3, \\ f - g = \gamma^3; \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} g = 4\alpha^3, \\ f + g = p\beta^3, \\ f - g = \gamma^3. \end{cases}$$

On déduit de ces deux décompositions

$$\beta^3 - \gamma^3 = p(2\alpha)^3, \quad \text{ou} \quad \gamma^3 + (2\alpha)^3 = p\beta^3;$$

ces deux équations sont semblables à l'équation (1); on  
ramène donc l'équation proposée, dans laquelle l'une  
des inconnues contient le facteur  $3^\lambda$ , à une autre sem-  
blable, dans laquelle l'une des inconnues ne contient  
plus que le facteur  $3^{\lambda-1}$ ; en continuant de même, on  
ramènera l'équation proposée à une autre de même  
forme, dans laquelle aucune des inconnues ne sera divi-  
sible par 3. Donc l'équation proposée est impossible.

La démonstration précédente s'applique encore, en  
remplaçant le nombre premier  $p = 18n + 5$  par le  
carré du nombre premier  $q = 18n + 11$ .



## IV. Considérons maintenant l'équation

$$(4) \quad x^3 + y^3 = 2^n A z^3,$$

dans laquelle,  $A$  étant impair, le coefficient  $2^n A$  représente l'un des quatre nombres  $2p, 2q^2, 4p^2, 4q$ . Nous supposons deux cas, suivant que  $z$  ne sera pas ou sera divisible par 3; d'ailleurs,  $x$  et  $y$  sont impairs.

1° Lorsque  $z$  n'est pas divisible par 3, on arrive facilement à l'équation

$$f(f^2 - 9g^2) = 2^{n-1} A a^3;$$

$f^2 - 9g^2$  est impair, en même temps que  $b = f^2 + 3g^2$ , et l'on a l'une ou l'autre des deux décompositions

$$\begin{cases} f = 2^{n-1} A \alpha^3, \\ f + 3g = \beta^3, \\ f - 3g = \gamma^3; \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f = 2^{n-1} \alpha^3, \\ f + 3g = A \beta^3, \\ f - 3g = \gamma^3. \end{cases}$$

Ces deux décompositions conduisent aux deux équations

$$\beta^3 + \gamma^3 = 2^n A \alpha^3, \quad \text{ou} \quad A \beta^3 + \gamma^3 = 2^n \alpha^3,$$

impossibles suivant le module 9, puisque, pour la première, les indéterminées  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  ne sont pas divisibles par 3.

2° Lorsque  $z$  est divisible par 3, on arrive, en posant  $z = 3ab$ , à l'équation

$$g(f^2 - g^2) = 2^{n-1} A a^3,$$

et, puisque  $f^2 - g^2$  est impair, à l'une des décompositions

$$\begin{cases} g = 2^{n-1} A \alpha^3, \\ f + g = \beta^3, \\ f - g = \gamma^3, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} g = 2^{n-1} \alpha^3, \\ f + g = A \beta^3, \\ f - g = \gamma^3; \end{cases}$$

la seconde décomposition conduit à une équation déjà

reconnue impossible ; la première conduit à l'équation

$$\beta^3 - \gamma^3 = 2^n A \alpha^3.$$

Celle-ci est de même forme que l'équation (4) ; mais l'indéterminée du second membre contiendra un facteur 3 en moins. On conclura, comme pour l'équation (1), que l'équation (4) est impossible à résoudre en nombre entiers.

REMARQUE I. — En rapprochant les résultats de M. Sylvester avec ceux d'une Note précédente (\*), on en déduit le théorème suivant :

*L'équation*

$$xy(x+y) = A z^3$$

*est impossible, en nombres rationnels, en exceptant les valeurs égales ou nulles des indéterminées, dans les cas suivants :*

$$A = 1, 2, 3, 4, 18, 36, p, 2p, 4p^2, q^2, 2q^2, 4q,$$

*p désignant un nombre premier de la forme  $18n + 5$ ,  
et  $q$  un nombre premier de la forme  $18n + 11$ .*

En faisant  $y = 1$ , on obtient plusieurs théorèmes concernant les nombres triangulaires, et le produit de deux nombres consécutifs ; en faisant  $y = x + 1$ , on en déduira ceux qui concernent les nombres

$$x(x+1)(2x+1), \quad \text{et} \quad 2x(2x+1)(2x+2).$$

REMARQUE II. — De même, en rapprochant les résultats obtenus par Fermat et par M. Genocchi, sur les

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 425.

nombre congruents (\*), avec ceux d'une Note précédente (\*\*), on en déduit le théorème suivant :

*L'équation*

$$xy(x+y)(x-y) = Az^2$$

*est impossible, en nombres rationnels, dans les cas suivants :*

$$A = 1, 2, p, 2q,$$

*p désignant un nombre premier de la forme  $8n + 3$ , et  $q$  un nombre premier de la forme  $8n + 5$ .*

On observera que les résultats généraux, obtenus par MM. Genocchi et Sylvester, constituent des progrès importants, pour arriver à la solution de deux problèmes posés depuis près de *vingt siècles*.

## AU SUJET DES CAS D'IMPOSSIBILITÉ D'UNE SOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION $x^3 \pm a = y^2$ ;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Parmi les nombres contenus dans le tableau par lequel se termine la page 379 du tome XVII, 2<sup>e</sup> série, des *Nouvelles Annales*, il s'en est glissé un inexact : c'est — 359. Les lecteurs que cette question intéresse ont d'ailleurs pu s'en apercevoir eux-mêmes aisément; car, d'après la règle que j'ai posée (p. 376, ligne 14) pour les nombres de cette catégorie, on doit, pour obtenir les valeurs de  $a$

(\*) *Annali di Scienze matematiche*, etc., da B. Tortolini, t. VI, p. 299. — *Il Cimento, Rivista di Scienze*, etc., t. VI, p. 677. Turin, 1855.

(\*\*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 433.

1297. Décomposer le quadruple et le carré de  $4p^6 + 27q^6$  en une somme de deux cubes.

(ÉDOUARD LUCAS.)

1298. Décomposer le nombre  $x^{12} - 9.y^{12}$ , et son double, en une somme de deux cubes.

(ÉDOUARD LUCAS.)

1299. La somme des carrés des  $x$  premiers nombres entiers n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré.

(ÉDOUARD LUCAS.)

1300. La somme des  $x$  premiers nombres triangulaires n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré.

(ÉDOUARD LUCAS.)

1301. Dans un segment d'une conique quelconque, inscrire le trapèze maximum; la corde qui limite le segment devant être une des bases du trapèze.

(F. GABRIEL-MARIE.)

1302. Dans une conique à centre, inscrire le quadrilatère maximum ayant pour un de ses côtés un diamètre donné, et pour côté opposé une corde parallèle à une droite donnée.

(F. GABRIEL-MARIE.)

1303. Trouver toutes les solutions entières de l'équation  $x^2 + 7x = 2y(y + 3)(y^2 + 3y + 5)$ .

(LIONNET.)

1304. La somme des distances du cercle circonscrit, aux deux côtés AB, AC du triangle inscrit ABC, est égale à la corde menée par le point C, perpendiculairement à AC dans le cercle décrit sur DC, comme diamètre; D étant le milieu de l'arc BC.

(A. CAMBIER.)

1305. On donne un faisceau  $F_n$  de courbes de l'ordre  $n$  et une droite  $d$ ; chaque point D de  $d$  détermine une

**SUR UN THÉORÈME DE M. LIOUVILLE,  
CONCERNANT LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN BICARRÉS;**

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

M. Liouville a démontré, dans son cours au Collège de France, qu'un nombre quelconque est une somme de 53 bicarrés, au plus. On peut abaisser cette limite à 41. En effet, il résulte de l'identité des deux expressions

$$6(x^2 + y^2 + z^2 + u^2)^2$$

et

$$(x+y)^4 + (x-y)^4 + (x+z)^4 + (x-z)^4 + (x+u)^4 + (x-u)^4 \\ + (y+z)^4 + (y-z)^4 + (y+u)^4 + (y-u)^4 + (z+u)^4 + (z-u)^4$$

que le sextuple du carré d'un nombre quelconque est une somme de 12 bicarrés, puisque l'on sait qu'un nombre quelconque est une somme de 4 carrés. Par suite, le sextuple d'une somme de 3 carrés est décomposable en 36 bicarrés. Mais Legendre a démontré que tout nombre de la forme

$$8p + 1, 2, 3, 5, 6$$

est une somme de 3 carrés; donc tout nombre de la forme

$$48p + 6, 12, 18, 30, 36$$

est une somme de 36 bicarrés, au plus. Soit R le reste de la division d'un nombre N par 48; en retranchant de N une ou plusieurs fois les bicarrés  $1^4, 2^4, 3^4$ , on ramène le reste R à l'un des nombres 6, 12, 18, 30, 36, et l'on arrive à former le tableau suivant, qui contient dans la colonne R le reste de la division d'un nombre N

par 48, et dans la colonne  $n$  le nombre maximum de bicarrés dont se compose  $N$ .

$n$	$R$
36	6, 12, 18, 30, 36;
37	3, 4, 7, 13, 15, 19, 21, 22, 28, 31, 34, 37, 39, 46;
38	0, 2, 5, 8, 14, 16, 20, 23, 24, 29, 32, 35, 38, 40, 44, 47;
39	1, 9, 17, 25, 33, 41, 45;
40	10, 26, 42;
41	11, 27, 43.

Donc un nombre entier quelconque est la somme de quarante et un bicarrés, au plus.

On observera que la démonstration précédente suppose le théorème vérifié jusqu'à  $N = 2 \cdot 3^2$ ; il est facile de le constater sur les *Tables arithmétiques* de Reuschle.

## THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (\*).]

### TRANSFORMATION DU DEUXIÈME DEGRÉ.

Nous n'avons pas à parler de la transformation du premier degré; on a vu que non-seulement elle réussissait toujours, mais encore qu'elle servait à la réduction à la forme canonique.

Si l'on veut opérer la transformation du second degré, deux des facteurs  $V - \alpha U$ ,  $V - \beta U$ , ... devront être

(\*) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 385.

NOUVELLES ANNALES  
DE  
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS  
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,  
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES AU LYCÉE FONTANES.

---

DEUXIÈME SÉRIE.  
*TOME DIX-NEUVIÈME.*

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,  
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

---

PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,  
Quai des Augustins, n° 55.

1880.

(Tous droits réservés.)

La construction de la courbe représentée par l'équation (5) se fait facilement, puisque cette courbe est la *développante du cercle* de rayon  $n = a \cot \gamma$ .

## SUR UN THÉORÈME D'EULER CONCERNANT LA DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN QUATRE CUBES POSITIFS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Euler a démontré qu'un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, est égal à la somme de quatre cubes positifs, entiers ou fractionnaires. On trouve la formule correspondante dans une Note qui termine les *Exercices d'analyse numérique* de Lebesgue. Nous ferons d'abord observer que Lebesgue ne paraît pas avoir deviné la méthode qui a dû servir à Euler pour obtenir cette formule. En effet, il nous paraît évident que celle-ci provient des recherches entreprises par Euler pour la résolution de l'équation indéterminée

$$(1) \quad x^3 + y^3 = Az^3.$$

L'identité d'Euler est la suivante,

$$n = \left(\frac{n}{6m^2}\right)^3 [(2-a)^3 + a^3(b-1)^3 + b^3(c-1)^3 + c^3],$$

dans laquelle on suppose  $m$  tel que l'on ait

$$\frac{n}{12} < m^3 < \frac{n}{6},$$

et, de plus,

$$a = 1 + \frac{6m^3}{n}, \quad b = \frac{2a^3 - 1}{a^3 + 1}, \quad c = \frac{2b^3 - 1}{b^3 + 1}.$$

Il est fort probable que cette identité provient de l'A-



rithmétique et non de l'Algèbre, contrairement à la supposition de Lebesgue. En partant des formules qui peuvent servir à la résolution de l'équation (1), on obtient le théorème suivant, dont la première partie complète le théorème d'Euler :

THÉORÈME. — *Un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, est, d'une infinité de manières, le produit ou le quotient de deux nombres formés de la somme de deux cubes positifs.*

En d'autres termes, on peut résoudre d'une infinité de manières, et en nombres rationnels, les deux équations

$$(2) \quad N = (x^3 + y^3) \times (z^3 + u^3),$$

et

$$(3) \quad N = (x^3 + y^3) : (z^3 + u^3),$$

N désignant un nombre quelconque.

Parmi les formules en nombre infini qui permettent de résoudre les équations (2) et (3), nous donnerons les deux suivantes, qui fournissent elles-mêmes des solutions en nombre infini.

Pour l'équation (3), on pose  $N = 2^k 3^{\mu} \frac{A}{B}$ ; on choisit  $\frac{a}{b}$  par les conditions d'inégalité

$$\frac{B}{2^k 3^{\mu-2} A} > \frac{a^3}{b^3} > \frac{B}{2^k 3^{\mu-1} A},$$

et l'on a

$$r = \frac{Bb^3}{a}, \quad j = \frac{2^k 3^{\mu-1} A a^3 - Bb^3}{a},$$

$$z = \frac{Bb^3 - 2^k 3^{\mu-2} A a^3}{b}, \quad u = \frac{2^k 3^{\mu-2} A a^3}{b}.$$

Pour l'équation (2), qui correspond au théorème

d'Euler, nous remarquerons que l'on a les deux identités

$$\begin{aligned} (6LM + L^2 - 3M^2)^3 + (6LM - L^2 + 3M^2)^3 \\ = 2^2 \cdot 3^2 LM (L^2 + 3M^2)^2, \\ (L + M)^3 + (L - M)^3 = 2L(L^2 + 3M^2). \end{aligned}$$

Donc, en multipliant membre à membre, et divisant les deux membres de l'égalité obtenue par  $(L^2 + 3M^2)^3$ , on aura décomposé  $2^3 \cdot 3^2 L^2 M$  en un produit de deux facteurs égaux à une somme de deux cubes; en supposant, de plus,

$$L = Bb^3, \quad M = 2^{\lambda-3} 3^{\mu-2} Aa^3,$$

on aura ainsi décomposé en ce produit le nombre

$$N = 2^\lambda \cdot 3^\mu AB^2;$$

on déterminera d'ailleurs le nombre  $\frac{a'}{b^3}$  de telle sorte qu'il rende positifs tous les cubes considérés.

## SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. A. MACÉ DE LÉPINAY,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

*Par deux points donnés sur une ellipse, on fait passer une circonférence quelconque, puis on mène à ces deux courbes les tangentes communes : lieu du point de rencontre de ces tangentes.*

On sait que, si  $S = 0$  est l'équation d'une conique,  $P = 0$  l'équation d'une droite,  $S + \lambda P^2 = 0$  est l'équation générale des coniques bitangentes à la conique  $S = 0$ ,  $P = 0$  étant la corde des contacts. On sait, d'autre part, que, si deux coniques sont bitangentes à une troi-

## SUR UN THÉORÈME DE M. LAGUERRE ;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

M. Laguerre a exposé dernièrement quelques considérations nouvelles et fort remarquables sur la séparation des racines d'une équation algébrique à coefficients numériques (*Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 1, et t. XIX, p. 49; *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 13 octobre 1879).

Voici, je pense, une manière plus simple et plus élémentaire de présenter le principal résultat, sans qu'il soit nécessaire d'employer la théorie des dérivées.

THÉORÈME DE LAGUERRE. — Soient  $f(x) = 0$  une équation algébrique,  $a$  un nombre positif, et

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x)}{x-a} = f_0 x^{m-1} + f_1 x^{m-2} \\ \quad \quad \quad + f_2 x^{m-3} + \dots + f_{m-1} + \frac{f_m}{x-a}. \end{array} \right.$$

Le nombre des variations de la suite

$$(2) \quad f_0, f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$$

est au moins égal au nombre des racines de l'équation donnée qui sont plus grandes que  $a$ . Si le nombre des racines plus grandes que  $a$  est inférieur au nombre des variations de la suite, la différence est un nombre pair.

Nous remarquerons d'abord que pour  $a = 0$  on retrouve le théorème de Descartes. Quant à la démonstration, elle est absolument semblable à celle que l'on



de la suite

$$\begin{aligned} & A_m, \\ & A_m \frac{1}{a} + A_{m-1}, \\ & A_m \frac{1}{a^2} + A_{m-1} \frac{1}{a} + A_{m-2}, \\ & \dots, \\ & A_m \frac{1}{a^m} + A_{m-1} \frac{1}{a^{m-1}} + \dots + A_0; \end{aligned}$$

de plus, si ces deux nombres diffèrent, la différence est un nombre pair.

*Exemple.* — Soit l'équation

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x + 1 = 0.$$

D'après le théorème de Descartes, il y a, au plus, quatre racines positives.

Pour  $a = 1$ , on forme la suite

$$+1, -3, 0, -2, +5, +6;$$

donc il y a au plus deux racines plus grandes que 1; en formant la suite inverse, on trouve

$$+1, +8, +6, +9, +5, +6;$$

donc il n'y a pas de racines réelles entre 0 et 1; ainsi il y a au plus deux racines positives, que l'on sépare en faisant  $a = 2$ .

*Remarque.* — On peut appliquer les considérations qui précèdent aux équations de la forme

$$f(x) + \frac{A}{(x-a)\varphi(x)} = 0 \quad \text{et} \quad f(x) + \frac{A}{x-a} \varphi(x) = 0,$$

et l'on obtient des théorèmes intéressants.

Dans le cas où  $n = m$  et

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m,$$

l'équation en  $y$  devient

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{m-1} & A_m + A_0 y \\ A_2 & A_3 & \dots & A_m + A_0 y & A_1 y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m + A_0 y & A_1 y & \dots & A_{m-2} y & A_{m-1} y \end{vmatrix} = 0.$$

### SUR LES CAS GÉNÉRAUX D'IMPOSSIBILITÉ DE L'ÉQUATION

$$x^3 + y^3 = A z^3;$$

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Nous avons démontré <sup>(1)</sup>, d'après M. Sylvester, que, si l'on désigne par  $p$  et  $q$  deux nombres premiers des formes  $18n + 5$  et  $18n + 11$ , l'équation

$$x^3 + y^3 = A z^3$$

est impossible pour les six valeurs générales de  $A$  qui suivent :

$$v, 2p, 4p^2, q^2, 2q^2, 4q.$$

A ces valeurs on doit ajouter les six valeurs générales

$$p^2, q, 9p, 9p^2, 9q, 9q^2,$$

qui ont été indiquées par le P. Pépin. Nous allons faire voir que la méthode de Fermat, par la décomposition en facteurs, permet encore de démontrer l'impossibilité pour les six valeurs de  $A$ ; mais, pour abrégé, nous renverrons le lecteur à l'article que nous venons de mention-

(1) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 507 et suiv.

ner pour les notations et l'ensemble des démonstrations.

Posons  $\Lambda = 3^\lambda B$ ;  $\lambda$  sera égal à 2 ou à 0, et B divisé par 9 donnera pour reste l'un des nombres  $\pm 2$ ,  $\pm 4$ . Nous aurons alors quatre cas à considérer dans la décomposition

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) :$$

- I.  $x + y$  divisible par 6 ;
- II.  $x + y$  divisible par 3, et non par 2 ;
- III.  $x + y$  divisible par 2, et non par 3 ;
- IV.  $x + y$  non divisible par 2 et par 3.

Les deux derniers cas ne se présentent que pour  $\lambda = 0$ ; d'ailleurs,  $x + y$  sera nécessairement divisible par B (*loc. cit.*, p. 510, ligne 7).

PREMIER CAS :  $x + y$  divisible par 6. — Alors on a

$$x + y = 2^3 \cdot 3^{\lambda-1} B a^3, \quad b^3 = \left( \frac{x - y}{2} \right)^2 + 3 \left( \frac{x + y}{6} \right)^2, \\ z = 2ab ;$$

par conséquent, l'identification donne

$$G = \frac{x + y}{6} = 2^2 \cdot 3^{\lambda-2} B a^3,$$

c'est-à-dire

$$g(f^2 - g^2) = 2^2 \cdot 3^{\lambda-3} B a^3.$$

Pour  $\lambda = 0$ ,  $a$  est divisible par 3, et, en posant

$$a = 3a',$$

on a

$$g(f^2 - g^2) = 4B a'^3,$$

d'où l'on tire

$$g = 4B a'^3, \quad f \pm g = \beta^3, \quad f \mp g = \gamma^3,$$

ou bien

$$g = 4a'^3, \quad f \pm g = B\beta^3, \quad f \mp g = \gamma^3.$$

Ces deux décompositions donnent

$$\beta^3 - \gamma^3 = B(2z)^3 \quad \text{ou} \quad B\beta^3 - \gamma^3 = (2z)^3;$$

par conséquent, on ramène l'équation proposée à une autre semblable, en moindres nombres, dans laquelle  $z$  pair contient un facteur 3 en moins, ce qui conduit au troisième cas, ou dans laquelle  $z$  est impair, ce qui conduit au deuxième cas.

De même, pour  $\lambda = 2$ , on ramène l'équation à une autre en moindres nombres ou à l'équation

$$\beta^3 - 9\gamma^3 = Bz^3,$$

qui est impossible suivant le module 9.

DEUXIÈME CAS :  $x + y$  divisible par 3, et non par 2.  
— Alors on a

$$x + y = 3^{\lambda-1}Ba^3, \quad (x - y)^2 + 3\left(\frac{x + y}{3}\right)^2 = 4b^3, \\ z = ab;$$

par conséquent, l'identification donne

$$F + G = \frac{x + y}{3} = 3^{\lambda-2}Ba^3,$$

ou bien

$$f(f^2 - 9g^2) \pm 3g(f^2 - g^2) = 3^{\lambda-2}Ba^3.$$

Mais  $g(f^2 - g^2)$  est nécessairement divisible par 3, puisque  $f$  ne peut l'être; donc l'équation précédente est toujours impossible suivant le module 9.

L'impossibilité se trouve donc démontrée pour les quatre valeurs

$$9p, 9p^2, 9q, 9q^2.$$

TROISIÈME CAS :  $x + y$  divisible par 2, et non par 3. — Alors on a

$$x + y = 2^3Ba^3, \quad 3\left(\frac{x - y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = b^3, \quad z = 2ab;$$



par conséquent, l'identification donne

$$F = \frac{x+y}{2} = 4Ba^3,$$

ou bien

$$f(f^2 - 9g^2) = 4Ba^3.$$

On est ainsi ramené aux deux équations de même forme

$$\beta^3 + \gamma^3 = B(2z)^3 \quad \text{et} \quad B\beta^3 + \gamma^3 = (2z)^3.$$

La première est une équation en moindres nombres qui correspond au troisième cas ; la seconde est une équation dans laquelle  $z$  est impair et non divisible par 3, ce qui correspond au quatrième cas.

QUATRIÈME CAS :  $x + y$  non divisible ni par 2 ni par 3. — L'identification donne

$$F \mp 3G = Ba^3,$$

ou bien

$$f(f^2 - 9g^2) \pm 9g(f^2 - g^2) = Ba^3;$$

cette équation est impossible suivant le module 9.

Ainsi, en résumé, les équations

$$x^3 + y^3 = Az^3 \quad \text{et} \quad xy(x+y) = Az^3$$

sont impossibles à résoudre en nombres entiers pour les douze valeurs de  $A$  :

$$p, p^2, q, q^2, 9p, 9p^2, 9q, 9q^2, 2p, 4p^2, 2q^2, 4q.$$

Les théorèmes précédents ne concernent que l'impossibilité pour les facteurs  $p$  ou  $q$  de la forme  $6n + 5$  ; mais il existe un grand nombre d'autres théorèmes généraux d'impossibilité pour les nombres  $r, s, t$  des formes respectives  $18n + 1, 18n + 13, 18n + 17$ . Ces nombres appartiennent à la forme linéaire  $6n + 1$  et à la forme quadratique  $L^2 + 3M^2$ . On a, par exemple, les théorèmes suivants, dont nous nous réservons la démon-

tration et qui concernent les nombres  $r, s, t$ , pour lesquels le nombre  $M$  correspondant de la forme quadratique n'est pas un multiple de 3. Ces nombres sont compris dans le Tableau suivant :

Nombres premiers.	Forme linéaire.	Forme quadratique.
$r$ ou $r^2$ . . . . .	$18n + 1$	$(9h \pm 4)^2 + 3(9k \pm 4)^2$ $(9h \pm 4)^2 + 3(9k \pm 1)^2$
$s$ ou $t^2$ . . . . .	$18n + 7$	$(9h \pm 4)^2 + 3(9k \pm 2)^2$ $(9h \pm 2)^2 + 3(9k \pm 2)^2$ $(9h \pm 2)^2 + 3(9k \pm 4)^2$
$t$ ou $s^2$ . . . . .	$18n + 13$	$(9h \pm 2)^2 + 3(9k \pm 1)^2$ $(9h \pm 1)^2 + 3(9k \pm 1)^2$ $(9h \pm 1)^2 + 3(9k \pm 2)^2$ $(9h \pm 1)^2 + 3(9k \pm 4)^2$

Cela posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les équations  $x^3 + y^3 = \Lambda z^3$  et  $xy(x + y) = \Lambda z^3$  sont impossibles à résoudre en nombres entiers pour les huit valeurs suivantes de  $\Lambda$  :*

$$2r, 2r^2, 2s, 2t^2, 4r, 4r^2, 4t, 4s^2.$$

On peut assez facilement trouver des séries indéfinies de théorèmes analogues conduisant à l'impossibilité.

On peut aussi obtenir des séries indéfinies de théorèmes conduisant à la résolution complète : mais, dans ce but, il faut employer les résultats dus à M. Sylvester dans son importante théorie de la *résiduation*. On a, par exemple, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *On peut résoudre complètement les équations  $x^3 + y^3 = \Lambda z^3$  et  $xy(x + y) = \Lambda z^3$  par la combinaison des formules*

$$f(x, y, z) = 0, \quad x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy} + z \frac{df}{dz} = 0$$

et des formules

$$f(x, y, z) = 0,$$

$$x(y_1 z_2 - y_2 z_1) + y(z_1 x_2 - z_2 x_1) + z(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0,$$

qui donnent une nouvelle solution au moyen d'une ou de deux premières solutions, pour les valeurs suivantes de A :

1° Lorsque A est un nombre premier  $18n + 13$  ou le carré d'un nombre premier  $18n + 7$ ;

2° Lorsque A est le double d'un nombre premier  $18n + 13$  ou le double du carré d'un nombre premier  $18n + 7$ , à la condition que, dans la forme quadratique correspondante  $L^2 + 3M^2$ , le nombre M ne soit pas divisible par 3 ;

3° Lorsque A est le quadruple d'un nombre premier  $18n + 7$ , ou le quadruple du carré d'un nombre premier  $18n + 13$ , avec la même condition que précédemment.

On a d'ailleurs, pour les nombres de la forme  $L^2 + 3M^2$ , les identités suivantes :

$$(3M + L)^3 + (3M - L)^3 = 2^{\lambda} 3^{\mu} (L^2 + 3M^2) a^3,$$

avec  $M = 2^{\lambda-1} 3^{\mu-2} a^3$ ;

$$(2L)^3 + (L + 3M)^3 = 3^{\mu} (L^2 + 3M^2) a^3,$$

avec  $L + M = 3^{\mu-2} a^3$ ;

$$(L + M)^3 + (L - M)^3 = 2^{\lambda} (L^2 + 3M^2) a^3,$$

avec  $L = 2^{\lambda-1} a^3$ ;

$$(L + M)^3 + (2M)^3 = (L^2 + 3M^2) a^3,$$

avec  $L + 3M = a^3$ .

## SUR UN PROBLÈME DE DIOPHANTE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

*Trouver quatre nombres tels que leurs produits deux à deux, augmentés de l'unité, soient des carrés (Liv. IV, prob. XXI).*

Voici une élégante solution du problème, qui détermine quatre nombres entiers en fonction de deux nombres entiers indéterminés  $r$  et  $s$ . Si l'on désigne par  $a, b, c, d$  les quatre nombres cherchés, on a

$$\begin{aligned} a &= r, \\ b &= s(rs + 2), \\ c &= (s + 1)(rs + r + 2), \\ d &= 4(rs + 1)(rs + r + 1)(rs^2 + rs + 2s + 1). \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sqrt{ab + 1} &= rs + 1, \\ \sqrt{ac + 1} &= rs + r + 1, \\ \sqrt{ad + 1} &= 2r^2s^2 + 2r^2s + 4rs + 2r + 1, \\ \sqrt{bc + 1} &= rs^2 + rs + 2s + 1, \\ \sqrt{bd + 1} &= 2r^2s^3 + 2r^2s^2 + 6rs^2 + 4rs + 4s + 1, \\ \sqrt{cd + 1} &= 2r^2s^3 + 4r^2s^2 + 6rs^2 + 2r^2s + 8rs + 4s + 2r + 3. \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $r = 1$  et  $s = 2$ , on a

$$a = 1, \quad b = 8, \quad c = 15, \quad d = 528$$

et

$$\begin{aligned} 1 \cdot 8 + 1 &= 3^2, & 1 \cdot 15 + 1 &= 4^2, & 1 \cdot 528 + 1 &= 23^2, \\ 8 \cdot 15 + 1 &= 11^2, & 8 \cdot 528 + 1 &= 65^2, & 15 \cdot 528 + 1 &= 89^2. \end{aligned}$$

Existe-t-il un cinquième nombre  $e$  tel que  $ae + 1$ ,  $be + 1$ ,  $ce + 1$ ,  $de + 1$  soient des carrés?

Il y aurait lieu d'obtenir des formules analogues en remplaçant dans le problème précédent  $+ 1$  par  $- 1$ , et de compléter ainsi le problème résolu à la page 323 du Tome X des *Nouvelles Annales* (2<sup>e</sup> série, 1871).

La solution précédente m'a été adressée dernièrement de Gothenbourg par M. Boije af Gennäs.

## NOTE SUR LA CONSTRUCTION DES NORMALES A L'ELLIPSE (1);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Les solutions indiquées ici peuvent être résumées et améliorées de la façon suivante. Désignons par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation d'une ellipse tracée, et par  $x_0, y_0$  les coordonnées d'un point P d'où l'on abaisse les normales. Les perpendiculaires abaissées du sommet A de coordonnées  $(a, 0)$  sur les normales issues du point P rencontrent la courbe en quatre points  $M_1, M_2, M_3, M_4$  situés sur une circonférence dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{x}{a} \frac{a^2 x_0^2 - b^2 y_0^2}{c^2} - 4 \frac{a x_0 y_0}{c^2} y + 2 \frac{a^2 x_0^2 + b^2 y_0^2}{c^2} - a^2 = 0.$$

La puissance du sommet A par rapport à cette circonférence a pour expression  $\left(\frac{2by_0}{c}\right)^2$ , et celle du sommet A'

(1) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. IX, p. 348. et t. XV, p. 5.

a pour expression  $\left(\frac{2ax_0}{c}\right)^2$ . Il suffit donc de tracer une circonférence dont l'ordonnée du centre égale  $2\frac{ax_0y_0}{c^2}$ , et qui coupe orthogonalement les circonférences décrites des sommets  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  comme centres avec des rayons égaux à  $\frac{2by_0}{c}$  et  $\frac{2ax_0}{c}$ . Cette circonférence coupe l'ellipse en quatre points  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , au plus; on obtient les normales en abaissant du point  $P$  des perpendiculaires sur les quatre droites  $AM_1, AM_2, AM_3$  et  $AM_4$ .

### CORRESPONDANCE.

*Extrait d'une Lettre de M. Talayrach,  
capitaine d'Artillerie (1).*

J'ai l'honneur de vous envoyer ci-joint une démonstration géométrique du théorème de Poncelet sur les polygones qui sont à la fois inscrits à une circonférence et circonscrits à une autre. Ce théorème peut s'énoncer ainsi :

*Étant données deux circonférences, si l'on prend un point  $a_1$  sur l'une d'elles et que l'on mène les tangentes successives  $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{n-1}a_n$  à la deuxième, la droite  $a_1a_n$  qui ferme le polygone enveloppe un cercle coradical aux deux cercles donnés.*

La démonstration qu'en a donnée Poncelet s'appuie sur des calculs assez longs; je ne sais s'il en a été donné une purement géométrique. En tout cas, je vous livre la

(1) Cette Lettre, qui porte la date du 24 mars 1875, et qui malheureusement avait été égarée, est antérieure à l'étude *Sur la strophoïde*, publiée en 1875 par M. Maleyx.

Soient

$F'$  la force extérieure  $F$  estimée dans le plan tangent, dirigée suivant  $nN'$ ;

$F'_b$  la composante (dite géodésique) de  $F'$ , normale à la vitesse;

$\varphi$  l'angle formé par le rayon de courbure  $\rho$  avec la normale à la surface.

On a

$$F_b = \frac{dV}{dt} \operatorname{tang} i,$$

$$\frac{di}{ds} = \frac{\sin \varphi}{\rho},$$

et l'équation (a) devient

$$F_b = \frac{V^2 \sin \varphi}{\rho}.$$

Mais, si  $F_n$  est la composante de la force  $F$  dirigée suivant le rayon de courbure, on a

$$F_b = F_n \sin \varphi;$$

par suite,

$$F_n = \frac{V^2}{\rho},$$

ce qu'il fallait établir.

On démontrera sans peine qu'au point de départ la courbe est normale à l'intersection de la surface de niveau en ce point et de la surface fixe.

## SUR UN THÉORÈME DE M. CHASLES CONCERNANT LES CONIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Parmi les nombreux et intéressants théorèmes donnés par M. Chasles sur les coniques homofocales (*Comptes*

rendus des séances de l'Académie des Sciences, année 1844) et dont la connaissance permet de faciliter l'étude de la théorie des transcendentes elliptiques, nous rappellerons le suivant :

*Si, par deux points fixes d'une conique, on fait passer un cercle variable, le lieu du point de concours des tangentes communes est une conique homofocale à la proposée; de plus, le lieu reste le même lorsque la droite qui joint les deux points fixes se déplace parallèlement à elle-même.*

Considérons une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

et un point P de paramètre angulaire  $\varphi$ ; un point quelconque Q de la normale en P à l'ellipse a pour coordonnées

$$x = (a + \lambda b) \cos \varphi, \quad y = (b + \lambda a) \sin \varphi;$$

si l'on suppose  $PQ = r$ , on trouve

$$r^2 = (x - a \cos \varphi)^2 + (y - b \sin \varphi)^2,$$

ou bien, en désignant par  $b'$  la longueur du demi-diamètre conjugué de celui qui passe en P,

$$r = \lambda b';$$

on prendra d'ailleurs  $\lambda$  avec le signe  $+$  ou avec le signe  $-$  suivant que le point Q se trouvera sur la partie extérieure ou intérieure de la normale en P.

Si l'on suppose que le point P se déplace sur l'ellipse,  $\lambda$  restant constant, le point Q décrit une ellipse concentrique, d'axes  $a + \lambda b$  et  $b + \lambda a$ ; on retrouve ainsi un théorème de M. Transon. Dans le cas particulier où  $\lambda = \pm 1$ , les ellipses deviennent les cercles concentri-



ques de rayons  $a \pm b$ ; ce résultat revient, au fond, à la construction bien connue de M. Chasles pour trouver les grandeurs des axes d'une ellipse définie par un système de deux diamètres conjugués.

Décrivons, du point Q comme centre, un cercle de rayon  $r = \lambda b'$ , tangent à l'ellipse au point P; on trouve aisément, pour les coordonnées du point R de concours des tangentes communes à l'ellipse et au cercle,

$$(1) \quad \begin{cases} (1 - \lambda^2)x = (a + 2\lambda b + \lambda^2 a) \cos \varphi, \\ (1 - \lambda^2)y = (b + 2\lambda a + \lambda^2 b) \sin \varphi, \end{cases}$$

ou bien

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{x}{\cos \varphi} + \frac{y}{\sin \varphi} = (a + b) \frac{b' + r}{b' - r}, \\ \frac{x}{\cos \varphi} - \frac{y}{\sin \varphi} = (a - b) \frac{b' - r}{b' + r}. \end{cases}$$

En multipliant membre à membre les équations (2), on obtient le lieu du point R lorsque l'on fait varier  $r$ ; on trouve ainsi

$$(3) \quad \frac{x^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{y^2}{\sin^2 \varphi} = a^2 - b^2 = c^2.$$

C'est l'équation d'une hyperbole homofocale à l'ellipse proposée, passant par le point P et par les points symétriques de celui-ci par rapport aux axes et au centre de l'ellipse donnée. On vérifie d'ailleurs les formules (1) *a posteriori*, en observant que la tangente à l'hyperbole en R passe par le point Q. Ces formules permettent de résoudre le problème suivant :

PROBLÈME. — *Par un point R extérieur à l'ellipse on mène les tangentes : calculer les rayons des cercles tangents à l'ellipse et aux deux tangentes issues du point R.*

Désignons par  $x, y$  les coordonnées du point R, par  $\rho$  sa distance à l'origine, par  $u$  et  $v$  ses distances aux deux foyers de l'ellipse, et par  $V$  l'angle des deux tangentes à l'ellipse menées par le point R. On a les formules

$$\cos V = \frac{4a^2 - u^2 - v^2}{2uv} \quad \text{et} \quad \cos V = \frac{a^2 + b^2 - \rho^2}{uv}.$$

Cela posé, on détermine les axes de l'hyperbole homofocale à l'ellipse proposée et passant par le point R au moyen de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} = 1,$$

d'où l'on tire, pour  $\mu$  négatif,

$$2\mu = \rho^2 - a^2 - b^2 - uv$$

ou bien

$$\mu = -uv \cos^2 \frac{V}{2}.$$

Pour déterminer le paramètre angulaire  $\varphi$  des points d'intersection de l'hyperbole et de l'ellipse, on a

$$c^2 \cos^2 \varphi = a^2 + \mu, \quad -c^2 \sin^2 \varphi = b^2 + \mu,$$

et, en ajoutant,

$$c^2 \cos 2\varphi = \rho^2 - uv.$$

On en déduit facilement l'angle  $\varphi$ , que nous supposons compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , et les angles  $-\varphi, \pi \pm \varphi$ .

Enfin, on obtient le rayon du cercle correspondant à chacun des quatre points d'intersection en tirant de la formule (2)

$$\frac{r}{b'} = \frac{(y - b \sin \varphi) \cos \varphi}{(x + a \cos \varphi) \sin \varphi}.$$

Si l'on désigne par  $r_1$  et  $r_2$  les rayons qui correspon-

dent aux deux points ayant pour paramètres angulaires  $\varphi$  et  $\varphi + \pi$ , on déduit de la formule précédente

$$r_1 r_2 = b'^2,$$

et par suite le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Aux deux extrémités d'un diamètre fixe d'une ellipse, on prend, sur les normales extérieures ou intérieures, deux longueurs dont le produit égale le carré du demi-diamètre conjugué : l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités est une hyperbole homofocale à l'ellipse proposée, passant par les deux extrémités du diamètre donné.*

## SUR TROIS CONIQUES CONFOCALES DEUX À DEUX ;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

*Si trois coniques sont deux à deux bitangentes à un même cercle, leurs cordes communes concourent trois à trois en un même point.*

C'est la généralisation d'un curieux théorème énoncé, pour le cas de trois coniques confocales deux à deux, par M. Émile Lemoine (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 143; t. XIII, p. 487). Désignons par  $x, y, z$  les puissances d'un point quelconque du plan par rapport aux trois cercles; les équations des trois coniques bitangentes à deux des trois cercles sont

$$\sqrt{y} + \sqrt{z} = 2a, \quad \sqrt{z} + \sqrt{x} = 2b, \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2c,$$

*Ann. de Mathémat.*, 2<sup>e</sup> série, t. XIX (Septembre 1880). 26

$a, b, c$  ayant des signes quelconques. Les deux dernières équations s'écrivent

$$(x - z + 4b^2)^2 = 16b^2x \quad \text{et} \quad (x - y + 4c^2)^2 = 16c^2x;$$

divisons membre à membre et extrayons la racine carrée : nous obtenons, pour l'une des cordes d'intersection des deux coniques, l'équation

$$c(x - z + 4b^2) = b(x - y + 4c^2).$$

Par permutation circulaire, on obtient les équations des autres sécantes communes. Celles-ci sont vérifiées par les coordonnées du point qui se trouve à l'intersection de trois parallèles aux axes radicaux des trois cercles pris deux à deux, déterminées par

$$x - y = 4c(b - a),$$

$$y - z = 4a(c - b),$$

$$z - x = 4b(a - c).$$

La symétrie de ces formules démontre le théorème en question.

En éliminant le terme tout connu entre deux des équations des cordes, on obtient

$$ax(b - c) + by(c - a) + cz(a - b) = 0;$$

c'est l'équation de la droite qui joint le centre radical des trois cercles au point de concours des sécantes communes. Si l'on change le signe de  $a$ , de  $b$  ou de  $c$ , on obtient les trois autres points de concours.

*Remarque.* — En général, toute transformation analytique donne lieu à des théorèmes différents lorsque l'on remplace les éléments choisis pour système de coordonnées par d'autres. Ainsi, dans le cas présent, si  $x, y, z$  désignent les distances d'un point aux trois côtés d'un triangle, les transformations analytiques précédentes démontrent ce théorème :

*Si trois paraboles sont tangentes à deux des trois côtés d'un triangle et ont respectivement pour axes trois droites concourantes partant des sommets du triangle, leurs cordes communes concourent trois à trois en un même point.*

**SOLUTION DES EXERCICES SUR LE TÉTRAÈDRE  
PROPOSÉS PAR M. GENTY**

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 223 ) ;

PAR M. CHÉFIK-BEY ( DU CAIRE ).

1. *Si dans un tétraèdre les arêtes opposées sont égales, on peut dire que ce tétraèdre est isocèle. Les quatre faces d'un pareil tétraèdre sont égales.*

En effet, soit SABC le tétraèdre. Je dis que, par exemple, la face SAB est égale à la face ABC. En effet, AB est commun, AC = SB et BC = SA d'après l'hypothèse.

2. *Soient a, b, c les côtés de l'un de ces triangles, A, B, C les angles. Soient de plus α, β, γ les médianes qui joignent les milieux des côtés a, b, c aux milieux des côtés opposés du tétraèdre. On a*

$$\alpha^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = c^2,$$

$$\beta^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, \quad \alpha^2 + \gamma^2 = b^2,$$

$$\gamma^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \quad \beta^2 + \gamma^2 = a^2.$$

Désignons par M et N les milieux de SB et de AC ;

2. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ALGÈBRE, par *A. Boset*, ingénieur honoraire des Mines, candidat en sciences physiques et mathématiques, professeur honoraire de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Bruxelles. Bruxelles, Gustave Mayolez, libraire-éditeur, 13, rue de l'Impératrice. Paris, Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins (1880).

3. IL CARTEGGIO DI SOFIA GERMAIN E CARLO FEDERICO GAUSS. Nota di *A. Genocchi*. Torino, stamperia reale della ditta G. B. Paravia e Comp. di I. Vigliardi. (1880.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

*Question 1297*

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 527 );

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,  
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

*Décomposer le quadruple et le carré de  $4p^6 + 27q^6$   
en une somme de deux cubes.*

(ÉDOUARD LUCAS.)

Dans le numéro de février 1880, page 91, on remarque les deux identités

$$(1) \quad (L + M)^3 + (L - M)^3 = 2L(L^2 + 3M^2),$$

$$(2) \quad \begin{cases} (6LM + L^2 - 3M^2)^3 + (6LM - L^2 + 3M^2)^3 \\ = 2^2 \cdot 3^2 LM (L^2 + 3M^2)^2. \end{cases}$$

Si dans la première on remplace  $L$  par  $2p^2$  et  $M$  par

$\frac{3q^3}{p}$ , on a identiquement

$$16p^6 + 108q^6 = \left(2p^2 + \frac{3q^3}{p}\right)^3 + \left(2p^2 - \frac{3q^3}{p}\right)^3.$$

Si dans la seconde on fait  $L^2 = \frac{2p^5}{3q}$  et  $M^2 = \frac{3q^5}{2p}$ , d'où  $LM = p^2 q^3$ , on obtient la seconde décomposition

$$\begin{aligned} & (4p^6 + 27q^6)^2 \\ &= \left(6p^2 q^2 + \frac{2p^5}{3q} - \frac{9q^5}{2p}\right)^3 + \left(6p^2 q^2 - \frac{2p^5}{3q} + \frac{9q^5}{2p}\right)^3. \end{aligned}$$

### Question 1313

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 335);

PAR M. MARCELLO ROCHETTI,

Professeur au lycée royal Campanella, à Reggio (Calabria).

*Un nombre  $p$ , qui est la somme de  $n$  cubes entiers, étant donné, assigner un nombre  $q$  tel que le produit  $p^2 q$  soit la somme algébrique de  $n$  cubes entiers.*

(S. RÉALIS.)

Posons

$$q = p + p^4 + p^7 + \dots + p^{3(n-1)+1} = \sum_{n=1}^{n=n} p^{3n-2},$$

il vient

$$(1) \quad p^2 q = p^3 + p^6 + p^9 + \dots + p^{3n},$$

et le produit  $p^2 q$  est la somme de  $n$  cubes entiers, quel que soit le nombre entier  $p$  donné.

entre 0 et 1, et l'autre plus grande que 1; la première seule est admissible (1).

Le problème a encore une solution et n'en a qu'une seule.

On verrait de la même manière qu'il en serait encore de même si l'on donnait une bissectrice intérieure et une bissectrice extérieure.

*Note.* — La question a aussi été résolue par MM. Ferdinando Pisani; A. Leinekugel, étudiant en Mathématiques.

### Question 1329

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 177);

PAR M. V.-M. ARNAUD,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

*Soit la série récurrente*

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots,$$

*telle que  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ ; trouver la somme des  $n$  premiers termes de la série*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{5}{3 \cdot 8} + \dots + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1} u_{n+3}}.$$

(E. LUCAS.)

De l'égalité

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

on tire

$$u_{n+1} = u_{n+2} - u_n,$$

(1) La racine négative de cette équation, changée de signe, est la valeur de  $\tan \frac{A}{2}$ , lorsque  $\alpha$  représente la bissectrice extérieure de l'angle A et  $\beta$  la bissectrice intérieure de l'angle B. (G.)



et la série peut s'écrire

$$(1) \quad \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-1}{1 \cdot 3} + \frac{5-2}{2 \cdot 5} + \frac{8-3}{3 \cdot 8} + \dots + \frac{u_{n+3} - u_{n+1}}{u_{n+1} u_{n+3}}$$

ou

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) + \dots \\ & + \left( \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n+3}} \right). \end{aligned} \right.$$

Or, d'après la forme des dénominateurs, on voit que le premier terme de chaque parenthèse est détruit par le second terme de la parenthèse antécédente. Dans la série (2), les seuls termes qui ne se détruisent pas sont donc les premiers des deux premières parenthèses et les derniers des deux dernières.

On a donc

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{u_{n+2}} - \frac{1}{u_{n+3}} \\ &= 2 - \left( \frac{1}{u_{n+2}} + \frac{1}{u_{n+3}} \right) = 2 - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2} u_{n+3}}. \end{aligned}$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. A. Wokram, à Saint-Petersbourg; J. de Virieu, professeur à Lyon; H.-J. Krantz; Moret-Blanc; Artemieff, à Saint-Petersbourg; E. Fauquembergue; A. Leinekugel; Lebreton; H. Letellier, élève en Mathématiques élémentaires au Lycée de Tarbes (classe de M. Escary).

### Question 1332

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 478);

PAR M. ROBAGLIA.

*Une droite SA pivote autour du sommet S d'une parabole qu'elle rencontre en A, et de ce point A on abaisse une perpendiculaire AP sur la tangente au sommet :*

NOUVELLES ANNALES  
DE  
**MATHÉMATIQUES,**

JOURNAL DES CANDIDATS  
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES AU LYCÉE FONTANES.

---

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VINGTIÈME.

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,  
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

---

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1881.

(Tous droits réservés.)

de  $n$  objets pris deux à deux, ou  $C_n^2$ ; par suite, le nombre total des dérangements ou des non-dérangements est égal à  $P_n C_n^2$ . Mais le nombre des dérangements de l'un égale le nombre des non-dérangements de l'autre, et inversement; donc

$$D_n = \frac{P_n C_n^2}{2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

## SUR LA DÉFORMATION DU CACHE-POT;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Le cache-pot est formé de fils de fer ou de baguettes rectilignes articulées en chacun de leurs points de rencontre. Il présente la forme générale d'un hyperboloïde à une nappe; les baguettes sont des génératrices rectilignes de chacun des deux systèmes.

M. Cayley a démontré que, si l'on déforme ce modèle d'hyperboloïde, on obtient un hyperboloïde homofocal au premier, en superposant les directions des axes. En effet, soit l'hyperboloïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

considérons deux points P et Q de cet hyperboloïde et désignons leurs coordonnées par  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$ . Posons

$$x_1 = a\alpha_1, \quad y_1 = b\beta_1, \quad z_1 = c\gamma_1,$$

$$x_2 = a\alpha_2, \quad y_2 = b\beta_2, \quad z_2 = c\gamma_2;$$

nous aurons les équations

$$(1) \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 = 1,$$

$$(2) \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 = 1.$$

De plus, si les deux points P et Q sont sur une même génératrice, en exprimant que le plan tangent en P contient le point Q, on aura

$$(3) \quad \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 = 1.$$

La distance  $\delta$  des points P et Q est fournie par l'expression

$$\delta^2 = a^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + b^2(\beta_1^2 - \beta_2^2) + c^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2).$$

Considérons un second hyperboloïde ayant même centre, mêmes directions d'axes que le premier, et pour longueurs de ses axes des quantités  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  telles que

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2 = \lambda.$$

Désignons par P' et Q' les points correspondant à P et Q, c'est-à-dire ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} x'_1 &= a' \alpha_1, & y'_1 &= b' \beta_1, & z'_1 &= c' \gamma_1, \\ x'_2 &= a' \alpha_2, & y'_2 &= b' \beta_2, & z'_2 &= c' \gamma_2. \end{aligned}$$

La relation (3) étant vérifiée, les points P' et Q' appartiennent à la même génératrice; de plus, en désignant par  $\delta'$  la distance P'Q', nous aurons

$$\delta'^2 = a'^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + b'^2(\beta_1^2 - \beta_2^2) + c'^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2).$$

Par suite,

$$\frac{\delta'^2 - \delta^2}{\lambda} = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + (\beta_1^2 - \beta_2^2) - (\gamma_1^2 - \gamma_2^2).$$

Mais, en retranchant (2) de (1), on voit que le second membre de la relation précédente est nul; donc P'Q' = PQ.

Donc, si l'on considère sur le premier hyperboloïde un quadrilatère PQRS et sur le second hyperboloïde, obtenu par la déformation du premier, le quadrilatère P'Q'R'S', formé par les points P', Q', R', S' correspon-

nant à P, Q, R, S, ce quadrilatère est tel que

$$P'Q' = PQ, \quad Q'R' = QR, \quad R'S' = RS, \quad S'P' = SP.$$

Il en résulte que tout quadrilatère gauche PQRS peut se déformer sans changer la longueur des côtés suivant le quadrilatère correspondant de l'hyperboloïde homofocal.

C. Q. F. D.

## CONSTRUCTION DE LA PARABOLE OSCULATRICE EN UN POINT D'UNE COURBE ;

PAR M. G. KOENIGS,

Élève à l'École Normale supérieure.

Je m'appuierai sur le théorème suivant, qui est bien connu :

*Le rayon de courbure dans la parabole est égal au double du segment compté sur la normale à partir de son pied jusqu'au point où elle rencontre la directrice.*

Soient M un point d'une courbe, MT la tangente et C le centre de courbure ; menons une corde  $mn$  parallèle à la tangente et rencontrant la courbe aux points  $m$  et  $n$ , voisins du point M ; considérons la parabole effective qui passe par les points  $m$  et  $n$ , et qui est tangente en M à MT. I désignant le milieu de  $mn$ , MI est le diamètre de cette parabole conjugué de la direction de cordes MT. Cela posé, faisons tendre  $mn$  vers MT, la parabole tend à se confondre avec la parabole osculatrice, et MI tend vers la tangente MP au point M à la courbe lieu du point I.

Ainsi :

*Le diamètre de la parabole osculatrice en M, conjugué de la tangente MT, est la tangente au point M à*

**QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE PROPOSÉES  
PAR M. ÉDOUARD LUCAS ;**

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XIV, p. 509 ) ;

PAR M. MORET-BLANC.

1. *Trouver tous les systèmes de deux nombres entiers dont le quotient par leur somme de la somme de leurs cinquièmes puissances est un carré parfait.*

*Cette question, qui comprend comme cas particulier la question 1168, a pour solutions simples*

$$(3, -1, 11), (8, 11, 101), \\ (123, 35, 13361), (808, -627, 1169341).$$

Il faut trouver les solutions entières de l'équation

$$\frac{x^5 + y^5}{x + y} = z^2$$

ou

$$(1) \quad x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = z^2.$$

1<sup>o</sup> On ne doit pas regarder comme distinctes deux solutions qui ne diffèrent que par la permutation des valeurs de  $x$  et  $y$ .

2<sup>o</sup> Si  $x = a$ ,  $y = b$  est une solution,  $x = ma$ ,  $y = mb$  en sera aussi une, quel que soit le nombre entier  $m$  : il suffit donc de chercher les solutions en nombres premiers entre eux.

Si l'on divise par  $y^4$  et que l'on pose  $\frac{x}{y} = u$ , l'équation (1) peut s'écrire

$$(2) \quad u^4 - u^3 + u^2 - u + 1 = \frac{z^2}{y^4} = t^2.$$

et l'on est ramené à trouver les solutions rationnelles de l'équation (2).

Or toute solution connue en fait découvrir d'autres par les procédés suivants, indiqués par Euler.

Soient  $h$  une solution de l'équation (2) et  $k^2$  le résultat de sa substitution dans le premier membre de cette équation. Posons  $u = v + h$ ; l'équation (2) devient, en développant,

$$v^4 + (4h - 1)v^3 + (6h^2 - 3h + 1)v^2 + (4h^3 - 3h^2 + 2h - 1)v + k^2 = t^2.$$

Désignons, pour abrégér, le premier membre par  $V$ .

1° On pose

$$V = (v^2 + mv + k)^2,$$

et l'on détermine  $m$  de manière à faire disparaître soit le terme en  $v^3$ , soit le terme en  $v$ ; divisant les termes restants par  $v$  ou  $v^2$ , on a une équation du premier degré pour déterminer  $v$ , ce qui fournit deux solutions.

2° On pose

$$V = (v^2 + mv - k)^2,$$

et l'on opère comme dans le cas précédent.

3° On pose

$$V = (v^2 + mv + n)^2,$$

et l'on détermine  $m$  et  $n$  de manière à faire disparaître le terme en  $v$  et le terme indépendant, et l'on divise par  $v^2$ .

4° On pose

$$V = (mv^2 + nv + k)^2,$$

et l'on détermine  $m$  et  $n$  de manière à faire disparaître les termes en  $v^2$  et en  $v$ , et l'on divise par  $v^3$ ; on a encore une équation du premier degré pour déterminer  $v$ .

Appliquons à l'équation (2),

On a les solutions évidentes  $u = 0, v = 1$ .

Faisant  $h = 1$ , on a :

1<sup>o</sup>

$$V = v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

on trouve

$$m = 1, \quad v = -1, \quad u = 0,$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad v = -\frac{4}{2}, \quad u = -3.$$

2<sup>o</sup>

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = -1, \quad v = -1, \quad u = 0,$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad v = -\frac{4}{3}, \quad u = -\frac{1}{3},$$

solutions équivalentes aux précédentes.

3<sup>o</sup>

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad n = \frac{7}{8}, \quad v = \frac{3}{8}, \quad u = \frac{11}{8}.$$

4<sup>o</sup>

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2,$$

$$n = 1, \quad m = \frac{3}{2}, \quad v = 0, \quad u = 1.$$

Faisons maintenant  $h = -3$ , d'où  $k = 11$  :

$$V = v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121.$$

1<sup>o</sup>

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv + 11)^2,$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad v = 4, \quad u = 1,$$

$$m = -\frac{71}{11}, \quad v = \frac{41}{11}, \quad u = \frac{8}{11}.$$



2<sup>o</sup>

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv - 11)^2,$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad v = \frac{228}{35}, \quad u = \frac{123}{35},$$

$$m = \frac{71}{11}, \quad v = \frac{1073}{627}, \quad u = -\frac{808}{627}.$$

3<sup>o</sup>

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv + n)^2,$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad n = -\frac{71}{11}, \quad v = \frac{35}{8}, \quad u = \frac{11}{8}.$$

4<sup>o</sup>

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (mv^2 + nv + 11)^2,$$

$$n = -\frac{71}{11}, \quad m = \frac{2703}{2 \times 11^3}, \quad v = \frac{763752}{219965}, \quad u = \frac{103857}{219965}.$$

On a ainsi les solutions

$$(0, 1, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (3, -1, 11), \quad (8, 11, 101),$$

$$(123, 35, 13361), \quad (808, -627, 1169341),$$

$$(103857, 219965, 40176822841).$$

Ces solutions en feront trouver d'autres indéfiniment, sans autre difficulté que la longueur des calculs, à mesure que les nombres augmentent.

Ce premier calcul donne toutes les solutions simples indiquées par M. Lucas.

## 2. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^4 - 5x^2y^2 + 5y^4 = z^2.$$

Il suffit, comme plus haut, de trouver les solutions en nombres premiers entre eux. On a la solution évidente

$$y = 0, \quad x = 1.$$

Divisant par  $y^4$  et posant  $\frac{x}{y} = u$ , l'équation peut s'écrire

$$u^4 - 5u^2 + 5 = \frac{z^2}{y^4} = t^2.$$

On aperçoit immédiatement la solution  $u = 1$ ,  $t = 1$ .

Posons  $u = v + h$ ; il vient

$$v^4 + 4hv^3 + (6h^2 - 5)v^2 + (4h^3 - 10h)v + 1 = t^2.$$

Faisons  $h = 1$ :

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = t^2.$$

1° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

$$m = 2 \quad \text{donne} \quad v = -2, \quad u = -1,$$

solution évidente *a priori*;

$$m = -3 \quad \text{donne} \quad v = 1, \quad u = 2.$$

2° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = 2 \quad \text{donne} \quad v = -2, \quad u = -1,$$

$$m = 3 \quad \text{»} \quad v = -3, \quad u = -2.$$

3° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = 2, \quad n = 1, \quad v = -2, \quad u = -1.$$

4° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2;$$

$$n = -3, \quad m = -4, \quad v = -\frac{4}{3}, \quad u = -\frac{1}{3}.$$

Comme le signe de  $u$  est arbitraire, on a les solutions

$$u = 1, 2, \frac{1}{3},$$

ce qui donne pour l'équation proposée les solutions

$$(1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 3, 19).$$

Faisons maintenant  $h = 2$ .

1°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

$$m = 4, \quad v = -4, \quad u = -2,$$

$$m = 6, \quad v = -\frac{19}{4}, \quad u = -\frac{11}{4}, \quad z = 79.$$

2°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = 4, \quad v = -4, \quad u = -2,$$

$$m = -6, \quad v = \frac{3}{4}, \quad u = \frac{11}{4}.$$

3°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = 4, \quad n = \frac{3}{2}, \quad 12v + 1 = 12v + \frac{n}{4},$$

$$v = \infty, \quad u = \infty, \quad y = 0.$$

4°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2;$$

$$n = 6, \quad m = -\frac{17}{2}, \quad v = \frac{88}{57}, \quad u = \frac{202}{57}, \quad z = 32479.$$

On a les nouvelles solutions

$$(11, 4, 79), (202, 57, 32479).$$

3. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers et tels que le carré de l'hypoténuse, augmenté ou diminué du double de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.*

Les côtés et l'aire d'un triangle rectangle en nombres

entiers sont donnés par les formules

$$x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2, \quad s = pq(p^2 - q^2).$$

Il faut donc que l'on ait

$$(1) \quad p^4 + 2p^3q + 2p^2q^2 - 2pq^3 + q^4 = r^2,$$

ou, en posant  $\frac{p}{q} = u$ ,

$$(2) \quad u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = \frac{r^2}{q^4} = t^2.$$

1° Il suffit de chercher les solutions de l'équation (1) en nombres premiers entre eux, car tous les triangles semblables jouiront de la même propriété.

2° Les deux solutions  $u = \frac{a}{b}$  et  $u = -\frac{b}{a}$  sont équivalentes. Si l'on écrit la valeur de  $u$  de telle sorte que le numérateur soit plus grand que le dénominateur en valeur absolue, le carré de l'hypoténuse devra être augmenté ou diminué du double de l'aire du triangle, suivant que cette valeur de  $u$  sera positive ou négative.

Cherchons d'abord une solution de l'équation (2) en posant

$$u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = (u^2 + mu + 1)^2;$$

$$m = 1 \quad \text{donne} \quad u = -\frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{4}, \quad q = 1,$$

$$x = 15, \quad y = 8, \quad z = 17, \quad 2s = 20, \quad z^2 - 2s = 13^2;$$

$$m = -1, \quad u = \frac{1}{4}, \quad \text{même solution.}$$

$$u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = (mu^2 + nu + 1)^2;$$

$$n = -1, \quad m = \frac{1}{2}, \quad u = -\frac{1}{4},$$

solution déjà trouvée.

Soient, en général,  $h$  une solution de l'équation (2),  $h^2$  le résultat de sa substitution dans le premier membre.

Posons  $u = v + h$ ; l'équation deviendra

$$v^4 + (4h + 2)v^3 + (6h^2 + 6h + 2)v^2 + (4h^3 + 6h^2 + 4h - 2)v + h^2 = t^2.$$

Faisons  $h = -4$  :

1°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv + 13)^2;$$

$$m = -7, \quad v = 4, \quad u = 0,$$

solution inadmissible ;

$$m = -\frac{89}{13}, \quad v = \frac{191}{52}, \quad u = -\frac{17}{52}, \quad p = 52, \quad q = 17,$$

$$x = 2415, \quad y = 1768, \quad z = 2993, \quad z^2 + 2s = 3637^2.$$

2°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv - 13)^2;$$

$$m = -7, \quad v = \frac{120}{17}, \quad u = \frac{52}{17},$$

solution équivalente à la précédente ;

$$m = \frac{89}{13}, \quad v = \frac{2993}{1560},$$

$$u = -\frac{3247}{1560}, \quad p = 3247, \quad q = 1560,$$

$$x = 8109409, \quad y = 10130740, \quad z = 12976609,$$

$$z^2 - 2s = 9286489^2.$$

3°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = -7, \quad n = \frac{25}{2}, \quad v = \frac{17}{4}, \quad u = \frac{1}{4},$$

solution équivalente à  $-4$ .

4°

$$v^4 = 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (mv^2 + uv + 13)^2;$$

$$u = -89, \quad m = -\frac{7847}{2},$$

$$v = \frac{2793476}{61575405}, \quad u = -\frac{243508144}{61575405},$$

$$x = 55504685693410711, \quad y = 29988225175196640,$$

$$z = 63087746695238761, \quad z^2 - 2s = 3363994206872969^2.$$

Les mêmes méthodes, appliquées aux solutions obtenues, en feront trouver d'autres indéfiniment.

4. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que le carré de l'hypoténuse, augmenté ou diminué de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.*

En adoptant les mêmes notations que précédemment, l'équation du problème est

$$(1) \quad p^4 + p^3q + 2p^2q^2 - pq^3 + q^4 = r^2$$

ou

$$(2) \quad u^4 + u^3 + 2u^2 - u + 1 = t^2.$$

La méthode précédente, appliquée directement à l'équation (2), donne la solution

$$u = -8, \quad p = 8, \quad q = 1,$$

$$x = 63, \quad y = 16, \quad z = 65, \quad s = 504, \quad z^2 - s = 61^2.$$

Posons  $u = v + h$ ; il vient

$$v^4 + (4h + 1)v^3 + (6h^2 + 3h + 2)v^2 \\ + (4h^3 + 3h^2 + 4h - 1)v + h^2 = t^2.$$

Faisons  $h = -8$  :

1°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv + 61)^2;$$

$$m = -\frac{31}{2} \quad \text{donne} \quad v = 8, \quad u = 0,$$

qui ne donne pas de triangle ;

$$m = -\frac{1889}{122}, \quad v = \frac{3839}{488}, \quad u = -\frac{65}{488} \quad \text{ou} \quad u = \frac{488}{65},$$

$$x = 233919, \quad y = 63440, \quad z = 242369, \quad z^2 + s = 257211^2.$$

2°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv - 61)^2;$$

$$m = -\frac{31}{2}, \quad v = \frac{1008}{65}, \quad u = \frac{488}{65},$$

solution identique à la précédente ;

$$m = \frac{1889}{122}, \quad v = \frac{242369}{61288},$$

$$u = -\frac{249535}{61488}, \quad p = 249535, \quad q = 61488,$$

$$x = 58486942081, \quad y = 30686816160, \quad z = 66048490369,$$

$$z^2 - s = 58864370041^2.$$

3°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv + n)^2,$$

$$m = -\frac{31}{2}, \quad n = \frac{487}{8}, \quad v = \frac{65}{8}, \quad u = \frac{1}{8},$$

solution identique à  $u = -8$ .

4°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (mv^2 + nv + 61)^2;$$

$$n = -\frac{1889}{122}, \quad m = \frac{1819687}{122^3},$$

$$v = \frac{21553073880}{2791363773}, \quad u = -\frac{777836304}{2791363773},$$

$$r = 7186232337356415113,$$

$$y = 4342448160619629984,$$

$$z = 8396290968997175945,$$

$$\sqrt{z^2 + s} = 9152048360162401489.$$

Au moyen des solutions déjà obtenues, on pourra en trouver d'autres indéfiniment.

§. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que l'aire du triangle, augmentée des carrés construits sur les trois côtés, soit égale à un carré parfait.*

L'équation à satisfaire est

$$pq(p^2 - q^2) + 2(p^2 + q^2)^2 = r^2$$

ou

$$pq(p + q)(p - q) + 2(p^2 + q^2)^2 = r^2.$$

Or, dans les quatre nombres  $p$ ,  $q$ ,  $p + q$ ,  $p - q$ , il y a nécessairement un multiple de 3, et il n'y en a qu'un seul, puisque  $p$  et  $q$  sont supposés premiers entre eux : le premier membre de l'équation est donc de la forme  $3m + 2$ , incompatible avec celle d'un carré; il en résulte que le problème proposé n'a pas de solution.

On voit de même qu'il n'existe pas de triangle rectangle en nombres entiers tel que la somme des carrés des trois côtés, diminuée de l'aire du triangle, soit un carré parfait.

#### NOTE SUR LA CARDOÏDE ET LE LIMAÇON DE PASCAL;

PAR M. WEILL.

Considérons deux circonférences se coupant aux points A et B. Par le point A menons une sécante quelconque



---



---

REMARQUE SUR LE CENTRE DE COMPOSITION D'UN SYSTÈME  
DE FORCES QUELCONQUES DANS LE PLAN;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

---

Comme complément à ma Note *Sur la composition des forces dans le plan* <sup>(1)</sup>, je ferai remarquer que le moyen le plus simple de déterminer le *centre de composition* est le suivant.

On construit un polygone funiculaire quelconque ayant ses sommets respectivement sur les diverses forces données. La ligne d'action de la résultante du système passe par le point de rencontre des côtés extrêmes de ce polygone funiculaire et est parallèle à la somme géométrique des forces considérées.

On fait tourner toutes les forces du système du même angle autour de leurs points d'application. On construit, comme précédemment, la nouvelle ligne d'action. Le point de rencontre de ces deux lignes d'action est le centre de composition cherché.

---



---

QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE PROPOSÉES  
PAR M. ÉDOUARD LUCAS;

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIV, p. 526);

PAR M. MORET-BLANC.

---

1. Si  $(x, y, z)$  représente une solution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$(1) \quad Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = 0,$$

---

<sup>(1)</sup> *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 115 (mars 1880).

on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0,$$

$$AXx^2 + BYy^2 + CZz^2 = 0.$$

De ces deux dernières équations on tire

$$\frac{X}{x(Cz^3 - By^3)} = \frac{Y}{y(Ax^3 - Cz^3)} = \frac{Z}{z(By^3 - Ax^3)} = k,$$

$k$  étant un nombre quelconque.

En remplaçant  $X, Y, Z$  par les valeurs déduites de ces relations dans l'équation

$$AX^3 + BY^3 + CZ^3 + 3DXYZ = 0,$$

on obtient l'équation

$$Ax^3(Cz^3 - By^3)^3 + By^3(Ax^3 - Cz^3)^3 + Cz^3(By^3 - Ax^3)^3$$

$$+ 3Dxyz(Cz^3 - By^3)(Ax^3 - Cz^3)(By^3 - Ax^3) = 0,$$

qui doit être satisfaite en vertu de l'équation (1).

En effet, si l'on élimine  $D$  entre ces deux équations, on obtient l'identité

$$(Ax^6 + By^6 + Cz^6 - BCy^3z^3 - ACx^3z^3 - ABx^3y^3)$$

$$\times [Ax^3(Cz^3 - By^3) + By^3(Ax^3 - Cz^3) + Cz^3(By^3 - Ax^3)] = 0,$$

car le dernier facteur est identiquement nul.

2. Si  $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1)$  désignent deux solutions distinctes de l'équation précédente, on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$AXxx_1 + BYyy_1 + CZzz_1 = 0.$$

De ces deux dernières équations, on tire

$$\frac{X}{C(x^2x_1z_1 - z_1^2xz) + B(y^2x_1y_1 - xy^2y_1^2)}$$

$$= \frac{Y}{A(x^2x_1y_1 - x_1^2xy) + C(z^2y_1z_1 - z_1^2yz)}$$

$$= \frac{Z}{B(y^2y_1z_1 - z_1^2yz) + A(x^2x_1z_1 - x_1^2xz)} = k.$$

Si entre les équations

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = 0,$$

$$AX^3 + BY^3 + CZ^3 + 3DXYZ = 0,$$

$$Ax_1^3 + By_1^3 + Cz_1^3 + 3Dx_1y_1z_1 = 0,$$

on élimine D, on a les deux équations

$$A(x^3x_1y_1z_1 - x_1^3xyz) + B(y^3x_1y_1z_1 - y_1^3xyz)$$

$$+ C(z^3x_1y_1z_1 - z_1^3xyz) = 0,$$

$$A(x^3XYZ - X^3xyz) + B(y^3XYZ - Y^3xyz)$$

$$+ C(z^3XYZ - Z^3xyz) = 0.$$

Si l'on élimine un des coefficients entre ces deux dernières équations, après avoir remplacé dans la dernière X, Y, Z par les valeurs trouvées plus haut, on obtient une identité; donc l'équation

$$AX^3 + BY^3 + CZ^3 + 3DXYZ = 0$$

est une conséquence des autres.

3. L'équation biquadratique  $x^4 - 5y^4 = 1$  a pour solution en nombres entiers  $x = 3$ ,  $y = 2$ , et n'en a pas d'autre.

Il est évident que  $y$  doit être pair et  $x$  impair.

Je rappellerai d'abord que tout carré impair est égal à huit fois un nombre triangulaire plus 1. Dans ce qui suit, la lettre  $t$  désignera toujours un nombre triangulaire.

Cela posé, l'équation peut s'écrire

$$(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5y^4.$$

Les deux facteurs  $x^2 + 1$  et  $x^2 - 1$  ayant pour plus grand commun diviseur 2, et  $x^2 + 1$  étant de la forme  $8m + 2$ , il faut que le premier soit le décuple ou le double d'un carré impair, et le second le double ou le décuple d'un carré pair.

1° Soient

$$x^2 + 1 = 10u^2 = 10(8t + 1) = 80t + 10,$$

$$x^2 - 1 = 2v^2 = 2 \cdot 4^n(8t' + 1) = 4^n \cdot 16t' + 2 \cdot 4^n,$$

d'où

$$x^2 = 80t + 9 = 4^n \cdot 16t' + 2 \cdot 4^n + 1.$$

La comparaison de ces valeurs montre que l'on doit avoir  $n = 1$ , d'où

$$x^2 = 80t + 9 = 64t' + 9.$$

$x^2 - 1$  est un multiple de 8 par un nombre impair; les deux facteurs  $x + 1$  et  $x - 1$  seront donc l'un le double, l'autre le quadruple d'un carré impair. Soient

$$x + 1 = 4(8t'' + 1) = 32t'' + 4,$$

$$x - 1 = 2(8t''' + 1) = 16t''' + 2,$$

d'où

$$x = 32t'' + 3 = 16t''' + 3.$$

Il faut qu'on ait  $2t'' = t'''$ , ce qui ne peut avoir lieu, comme je l'ai démontré (question 1180), qu'en faisant  $t'' = 0$ ,  $t''' = 0$ , d'où  $x = 3$ ,  $y = 2$ , solution admissible avec  $t = 0$ ,  $t' = 0$ ; ou bien  $t'' = 3$ ,  $t''' = 6$ , d'où  $x = 99$ , ce qui donne pour  $t'$  une valeur fractionnaire: cette solution est donc inadmissible.

Si l'on posait

$$x + 1 = 2(8t_1 + 1) = 16t_1 + 2,$$

$$x - 1 = 4(8t_2 + 1) = 32t_2 + 4,$$

il en résulterait

$$x = 16t_1 + 1 = 32t_2 + 5,$$

valeurs incompatibles.

2<sup>o</sup> Posons maintenant

$$x^2 + 1 = 2(8t + 1) = 16t + 2,$$

$$x^2 - 1 = 10 \cdot 4^n (8t' + 1).$$

De la première équation, on tire

$$x^2 = 16t + 1 = 8t'' + 1,$$

ce qui exige que  $t'' = 2t$ , et, par suite,  $t = 0$ ,  $t'' = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ , solution admissible; ou bien  $t = 3$ ,  $t'' = 6$ , ce qui donne  $x^2 = 49$ , valeur qui ne satisfait pas à la seconde équation.

Les seules solutions en nombres entiers positifs sont donc

$$x = 1, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad x = 3, \quad y = 2.$$

4. *La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais égale à un bicarré.*

De l'équation

$$3x^2 + 3x + 1 = z^4$$

on tire

$$x = -\frac{3 \pm \sqrt{3(4z^4 - 1)}}{6}.$$

Il faudrait donc que  $4z^4 - 1$  fût le triple d'un carré, et l'on aurait, en remarquant que  $z^2$  est de la forme  $3m + 1$ ,

$$2z^2 + 1 = 3u^2 = 3(8t + 1) = 24t + 3,$$

$$2z^2 - 1 = v^2 = 8t' + 1,$$

d'où

$$z^2 = 12t + 1 = 4t' + 1 = 8t'' + 1,$$

ce qui exige que l'on ait

$$t' = 0, \quad t'' = 0, \quad t = 0.$$

d'où

$$z = 1, \quad x = 0;$$

$t' = 6$ ,  $t'' = 3$  donnerait  $t = 2$ , inadmissible, puisque 2 n'est pas un nombre triangulaire.

Donc la différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs n'est jamais un bicarré, à moins que l'un d'eux ne soit 0.

5. Trouver toutes les solutions en nombres entiers des deux progressions arithmétiques

$$: x^2, 2y^2, 3z^2, 4u^2,$$

$$: x^2, 3y^2, 5z^2, 7u^2.$$

On a pour la première

$$: 167^2, 2 \times 97^2, 3 \times 57^2, 4 \times 13^2,$$

de raison 9071, et pour la seconde

$$: 607^2, 3 \times 303^2, 5 \times 191^2, 7 \times 113^2,$$

de raison 93022.

Il suffit de chercher les solutions en nombres premiers entre eux, car si l'on multiplie  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u$  par un même nombre  $m$ , la raison sera multipliée par  $m^2$ .

On reconnaît immédiatement que les quatre carrés doivent être à la fois pairs ou impairs, pour que la raison soit de même forme relativement au diviseur 8, et, comme on veut des nombres premiers entre eux, ils doivent être impairs.

1<sup>o</sup> On doit avoir

$$x^2 + 3z^2 = 4y^2,$$

$$x^2 + 3z^2 = (x + z\sqrt{-3})(x - z\sqrt{-3}),$$

et, comme  $x$  et  $z$  doivent être premiers entre eux, chaque

facteur doit être un carré. Soit donc

$$x + z\sqrt{-3} = (p + q\sqrt{-3})^2,$$

d'où

$$x - z\sqrt{-3} = (p - q\sqrt{-3})^2,$$

et

$$x^2 + 3z^2 = (p^2 + 3q^2)^2.$$

On en tire

$$x = p^2 - 3q^2,$$

$$z = 2pq,$$

$$y = p^2 + 3q^2.$$

Comme les nombres  $x, y, z$  doivent être impairs, on peut poser

$$p = m\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$x = \frac{m^2 - 3n^2}{2}, \quad y = \frac{m^2 + 3n^2}{4}, \quad z = mn.$$

On peut encore poser

$$p = m\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{6}},$$

d'où

$$x = \frac{3m^2 - n^2}{2}, \quad y = \frac{3m^2 + n^2}{4}, \quad z = mn;$$

mais, comme le signe de  $x$  est arbitraire, les nouvelles formules rentrent dans les premières.

On a ensuite

$$4u^2 = 6z^2 - 2y^2 = \frac{84m^2n^2 - 2m^4 - 18n^4}{16}.$$

Il faut donc que  $84m^2n^2 - 2m^4 - 18n^4$  soit un carré parfait, ou, en posant  $\frac{m}{n} = v$ ,  $84v^2 - 2v^4 - 18$  doit être un carré rationnel.

Soient  $h$  une solution,  $k^2$  le résultat de sa substitution dans le trinôme; posons  $v = h + r$  :

$$84v^2 - 2v^4 - 18 = k^2 + (168h - 8h^3)r + (84 - 7h^2)r^2 - 8hr^3 - 2r^4 = t^2.$$

Or l'équation  $84v^2 - 2v^4 - 18 = t^2$  est satisfaite par  $v = 1$ ,  $t = 8$ , d'où  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $x = y = z = u = 1$ .

Faisons  $h = 1$ ,  $k = 8$ , et posons

$$\begin{aligned} 64 + 160r + 72r^2 - 8r^3 - 2r^4 \\ &= (8 + ar + b)^2 \\ &= 64 + 16ar + (a^2 + 16b)r^2 + 2abr^3 + b^2r^4. \end{aligned}$$

Identifiant les premiers termes, on a

$$a = 10, \quad b = -\frac{7}{4},$$

d'où

$$r = \frac{16}{3}, \quad v = \frac{19}{3}, \quad m = 19, \quad n = 3,$$

$$x = 167, \quad y = 97, \quad z = 57, \quad u = 13.$$

Faisons maintenant  $h = \frac{19}{3}$ , d'où  $k = \frac{104}{9}$ , et posons

$$\begin{aligned} \left(\frac{104}{9}\right)^2 - \frac{26144}{27}r - \frac{3576}{9}r^2 - \frac{152}{3}r^3 - 2r^4 \\ &= \left(\frac{104}{9} + ar + br^2\right)^2 \\ &= \left(\frac{104}{9}\right)^2 + \frac{208}{9}ar + \left(a^2 + \frac{208}{9}b\right)r^2 + 2abr^3 + b^2r^4. \end{aligned}$$

En identifiant les premiers termes, on a

$$a = -\frac{1634}{3 \times 13}, \quad b = -\frac{818575}{4 \times 13^3},$$



puis

$$r = \frac{307,781 \times 13^2 \times 16}{919,368297},$$

$$r = \frac{19}{3} - \frac{307781 \times 13^2 \times 16}{919368297} = \frac{4990426057}{919368297},$$

$$m = 4990426057, \quad n = 919368297,$$

$$x = 11184319016899263311,$$

$$y = 6860016606742651969,$$

$$z = 4588039505328514929,$$

$$u = 2836414255938331991 \left[ u = \frac{1}{8} \left( \frac{104}{9} + ar + br^2 \right) \right].$$

Partant de ces valeurs, on en trouvera d'autres par la même méthode, et ainsi de suite; mais les nombres croissent rapidement et les calculs deviennent très longs.

2<sup>o</sup> Considérons la progression :  $x^2, 3y^2, 5z^2, 7u^2$ .

On a

$$x^2 + 5z^2 = 6y^2$$

ou

$$6y^2 - 5z^2 = x^2,$$

qu'on peut écrire

$$(6y - 5z)^2 - 30(y - z)^2 = x^2$$

ou

$$[6y - 5z + (y - z)\sqrt{30}][6y - 5z - (y - z)\sqrt{30}] = x^2.$$

Les deux facteurs devant être premiers entre eux, et par conséquent carrés, posons

$$6y - 5z + (y - z)\sqrt{30} = (p + q\sqrt{30})^2,$$

d'où

$$6y - 5z - (y - z)\sqrt{30} = (p - q\sqrt{30})^2$$

et

$$(6y - 5z)^2 - 30(y - z)^2 = (p^2 - 30q^2)^2.$$

De la première équation l'on tire

$$6x - 5z = p^2 + 30q^2, \quad y - z = 2pq,$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} x = p^2 - 30q^2, \\ y = p^2 + 30q^2 - 10pq, \\ z = p^2 + 30q^2 - 12pq. \end{cases}$$

Il n'est pas nécessaire que  $p$  et  $q$  soient entiers pour que  $x, y$  et  $z$  le soient. On peut poser

$$p = m\sqrt{2}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$(2) \quad \begin{cases} x = 2m^2 - 15n^2, \\ y = 2m^2 + 15n^2 - 10mn, \\ z = 2m^2 + 15n^2 - 12mn; \end{cases}$$

ou

$$p = m\sqrt{3}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{3}},$$

d'où

$$(3) \quad \begin{cases} x = 3m^2 - 10n^2, \\ y = 3m^2 + 10n^2 - 10mn, \\ z = 3m^2 + 10n^2 - 12mn; \end{cases}$$

ou

$$p = m\sqrt{5}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{5}},$$

d'où

$$(4) \quad \begin{cases} x = 5m^2 - 6n^2, \\ y = 5m^2 + 6n^2 - 10mn, \\ z = 5m^2 + 6n^2 - 12mn. \end{cases}$$

On pourrait, poser encore

$$p = m\sqrt{15}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \dots;$$

mais les nouvelles formules rentrent dans les premières, les signes de  $x, y, z$  étant arbitraires.

Il faut maintenant faire entrer  $7u^2$  dans la progression. On a, en employant les formules (1),

$$7u^2 = 10z^2 - 3y^2 \\ = 7p^4 - 180p^3q + 1560p^2q^2 - 5400pq^3 + 6300q^4,$$

ou, en divisant par  $7q^4$  et posant  $\frac{p}{q} = v$ ,

$$\frac{u^2}{q^4} = v^4 - \frac{180}{7}v^3 + \frac{1560}{7}v^2 - \frac{5400}{7}v + 900 \\ = (v^2 + av + 30)^2 - v^4 + 2av^3 + (a^2 + 60)v^2 + 60av + 900,$$

d'où  $v = 0$ , en faisant  $a = -\frac{90}{7}$ , d'où.

$$x = y = z = u = 1.$$

solution évidente *a priori*.

Posons encore

$$v^4 - \frac{180}{7}v^3 + \frac{1560}{7}v^2 - \frac{5400}{7}v + 900 \\ = (v^2 + av + b)^2 = v^4 + 2av^3 + (a^2 + 2b)v^2 + 2abc + b^2,$$

d'où, en identifiant les premiers termes,

$$a = -\frac{90}{7}, \quad b = \frac{1410}{49},$$

puis

$$v = \frac{16}{7}, \quad p = 16, \quad q = 7,$$

$$x = 1214, \quad y = 606, \quad z = 382, \quad u = 226,$$

ou, en divisant par 2,

$$x = 607, \quad y = 303, \quad z = 191, \quad u = 113.$$

En posant

$$v^4 - \frac{180}{7} v^3 + \frac{1560}{7} v^2 - \frac{5400}{7} v + 900 = (av^2 + bv + 30)^2$$

et identifiant les derniers termes, on trouve

$$p = 105, \quad q = 8,$$

d'où

$$x = 9105, \quad y = 4545, \quad z = 2865, \quad u = 1695,$$

ou, en divisant par 15,

$$x = 607, \quad y = 303, \quad z = 191, \quad u = 113.$$

Les autres formes donnent de même des équimultiples des nombres 607, 303, 191, 113.

Mais, au moyen de cette solution, en opérant comme dans la progression précédente, on en trouvera une deuxième, celle-ci en fera trouver une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

6. *Trouver toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles la somme des cinquièmes puissances des  $x$  premiers nombres est un carré parfait.*

En appelant  $S_5$  cette somme, on a

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{x^2(x+1)^2[(2x+1)^2-3]}{24} \\ &= \left[ \frac{x(x+1)}{2} \right]^2 \left[ \frac{(2x+1)^2-3}{6} \right]. \end{aligned}$$

Pour que  $S_5$  soit un carré parfait, il faut et il suffit que  $\frac{(2x+1)^2-3}{6}$  soit un carré parfait, ce qui exige d'abord que  $2x+1$  soit un multiple de 3.

Posons donc  $2v + 1 = 3u$ ; il faut qu'on ait

$$\frac{3u^2 - 1}{2} = v^2 \quad \text{ou} \quad 3u^2 - 2v^2 = 1,$$

équation qu'on peut écrire

$$(3u - 2v)^2 - 6(v - u)^2 = 1.$$

Les solutions de cette équation sont données par les réduites de rang impair dans le développement de  $\sqrt{6}$  en fraction continue; ce sont

$$3u - 2v = 1, 5, 49, 485, 4801, 47525, 470449, 4656965, \dots$$

$$v - u = 0, 2, 20, 198, 1960, 19042, 192060, 1901198, \dots$$

d'où

$$u = 1, 9, 89, 881, 8721, 86329, 854569, 8459361, \dots$$

$$v = 1, 11, 109, 1079, 10681, 105371, 1046629, 10360559, \dots$$

$$x = 1, 13, 133, 1321, 13081, 129493, 1281853, 12689041, \dots$$

Si l'on appelle  $x_n$  le terme général de cette dernière suite, on a

$$x_n = 10x_{n-1} - x_{n-2} + 4,$$

$$v_n = 10v_{n-1} - v_{n-2}.$$

*Note.* — Reste à résoudre le n° 7.

## SUR UN PROCÉDÉ PARTICULIER DE DIVISION RAPIDE;

PAR M. C. HENRY.

Si l'on divise l'unité par 9 et par une suite de nombres se terminant par 9, on aperçoit entre les différentes fractions décimales consécutives une suite de relations dont la loi est évidente et d'où il ressort un procédé de division rapide.

qui est un des polynômes énoncés dans le théorème précédent, par les  $2^{n-1} - 1$  polynômes restants, on obtiendra une fonction où chaque lettre entrera à une puissance paire. En remplaçant alors  $x_p^2$  par  $a_p + x$ , qui est du premier degré en  $x$ , le degré de chaque terme sera réduit à moitié, et le résultat sera du degré  $2^{n-2}$ .

C'est du reste la méthode indiquée par M. Desboves, Ouvrage cité, p. 319. CH. B.

*Note.* — La même question a été résolue par M. Brocard.

### Question 1193

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 144)

PAR M. MORET-BLANC.

*Une pile de boulets à base carrée ou à base triangulaire ne contient jamais un nombre de boulets égal au cube ou à la cinquième puissance d'un nombre entier.* (E. LUCAS.)

On sait que la somme ou la différence de deux cubes inégaux ne peut être égale à un cube, ni au double d'un cube. De même, la somme, ou la différence des cinquièmes puissances de deux nombres inégaux ne peut être égale à une cinquième puissance, ni au double d'une cinquième puissance. 1 étant un cube, il en résulte que deux nombres entiers consécutifs ne peuvent être simultanément un cube et le double d'un cube, ou bien une cinquième puissance et le double d'une cinquième puissance, en exceptant 0 et 1.

Cela posé, considérons d'abord la pile à base triangulaire.

Je dis qu'on ne peut avoir en nombres entiers

$$n(n+1)(n+2) = 6m^3,$$

sauf le cas de  $n = 1$ .

En effet, les trois nombres  $n, n + 1, n + 2$ , n'ayant pas de facteur commun, sauf 2 si  $n$  est pair, devraient être l'un un cube, un autre le double d'un cube, et l'autre le triple d'un cube.

Or, d'après la remarque précédente,  $n + 1$  ne peut être un cube ou le double d'un cube; reste donc à supposer que  $n + 1$  soit le triple d'un cube.  $n + 1$  sera alors de l'une des formes  $9k, 9k + 3, 9k - 3$ , et l'on aura une des trois combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned} n &= 9k - 1, & 9k + 2, & 9k - 4. \\ n + 1 &= 9k, & 9k + 3, & 9k - 3. \\ n + 2 &= 9k + 1, & 9k - 4, & 9k - 2. \end{aligned}$$

$n$  et  $n + 2$  ne pourront être simultanément l'un un cube, l'autre le double d'un cube.

Donc, dans aucun cas, le nombre des boulets de la pile ne sera un cube, sauf le cas de  $n = 1$ .

Il ne sera pas non plus une cinquième puissance.

Il faudrait, en effet, que  $n + 1$  fût le triple d'une cinquième puissance, et, en remarquant qu'une cinquième puissance est de l'une des formes  $25k, 25k \pm 1, 25k \pm 7$ , on aurait une des combinaisons

$$\begin{aligned} n + 1 &= 25k, & 25k + 3, & 25k - 3, & 25k + 4, & 25k - 4, \\ n &= 25k - 1, & 25k + 2, & 25k - 4, & 25k + 3, & 25k - 5, \\ n + 2 &= 25k + 1, & 25k + 4, & 25k - 2, & 25k - 5, & 25k - 3; \end{aligned}$$

$n$  et  $n + 2$  ne seraient pas simultanément un cube et le double d'un cube.

Donc le nombre des boulets d'une pile à base triangulaire ne peut être un cube ni une cinquième puissance que si  $n = 1$ .

Considérons maintenant une pile à base carrée, et

voyons si l'on peut avoir

$$n(n+1)(2n+1) = 6m^3.$$

Si  $2n+1$  est le triple d'un cube, on tombe dans un cas d'impossibilité déjà signalé.

Si  $2n+1$  est un cube, il est de l'une des formes  $9k$ ,  $9k+1$ ,  $9k-1$ , et l'on a une des combinaisons

$$\begin{aligned} 2n+1 &= 9k, & 9k+1, & 9k-1, \\ n &= 9k+4, & 9k, & 9k-1, \\ n+1 &= 9k+5, & 9k+1, & 9k. \end{aligned}$$

Les deux autres nombres ne seront pas simultanément le triple et le double d'un cube.

Examinons si l'on peut avoir

$$n(n+1)(2n+1) = 6m^5.$$

Si  $2n+1$  est le triple d'une cinquième puissance,  $n$  et  $n+1$  devraient être une cinquième puissance et le double d'une cinquième puissance, ce qui est impossible. Si  $2n+1$  est une cinquième puissance, on aura l'une des combinaisons suivantes

$$\begin{aligned} 2n+1 &= 25k, & 25k+1, & 25k-1, & 25k+7, & 25k-7, \\ n &= 25k+12, & 25k, & 25k-1, & 25k+3, & 25k-4, \\ n+1 &= 25k+13, & 25k+1, & 25k, & 25k+4, & 25k-3, \end{aligned}$$

et l'on voit que  $n$  et  $n+1$  ne seront pas simultanément le double et le triple d'une cinquième puissance.

Donc le nombre des boulets d'une pile à base carrée ne peut être une cinquième puissance ni le double d'une cinquième puissance, sauf le cas d'un seul boulet.



NOUVELLES ANNALES  
DE  
**MATHÉMATIQUES,**

JOURNAL DES CANDIDATS  
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

REDIGÉ

PAR MM. GERONO,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,  
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE FONTANES.

---

**TROISIÈME SÉRIE.**

*TOME PREMIER.*

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,  
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

---

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,  
Quai des Augustins, n° 55.

---

1882.

(Tous droits réservés.)

4. TIRAGES A PART. — *Sopra la proiezione cartografica isogonica*. Nota del Prof. *Matteo Fiorini* (estratta dalla serie IV, tomo III, delle *Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, e letta nella sessione 4. maggio 1882. — Bologna, tipografia *Gambellini e Parmeggiani*, 1882.

*Sui sistemi variati di forze*. Nota del S. C. Prof. *C. Bardelli*, letta nell'adunanza del 9 marzo 1882, al R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. — Milano, tip. *Bernardoni di C. Rebeschini e C<sup>ia</sup>*. 1882.

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

*Question 1322*

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 383);

PAR M. H.-J. KRANTZ, à Bréda.

*Démontrer que  $\sqrt{5}$  est la limite du rapport des deux séries*

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{34^2} + \frac{1}{89^2} + \dots,$$

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{3}{8} - \frac{4}{21} + \frac{5}{55} - \frac{6}{144} + \dots$$

(ÉDOUARD LUCAS.)

En désignant, d'une manière générale, par  $Y_x$  et  $U_x$  les dénominateurs des termes des deux séries, on a, entre les dénominateurs de trois termes successifs, les relations

$$Y_{x+2} - 3Y_{x+1} + Y_x = 0,$$

$$U_{x+2} - 3U_{x+1} + U_x = 0.$$

On y satisfait par

$$Y_x = C_1 a^x + \frac{C_2}{a^x},$$

$$U_x = C'_1 a^x + \frac{C'_2}{a^x};$$

$a$  et  $\frac{1}{a}$  étant les racines de l'équation

$$(1) \quad p^2 - 3p + 1 = 0.$$

Les constantes sont déterminées par les conditions

$$C_1 a + \frac{C_2}{a} = 1, \quad C_1 a^2 + \frac{C_2}{a^2} = 2,$$

$$C'_1 a + \frac{C'_2}{a} = 1, \quad C'_1 a^2 + \frac{C'_2}{a^2} = 3;$$

d'où, en observant que  $a + \frac{1}{a} = 3$ ,

$$C_1 = \frac{C_2}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}a},$$

$$C'_1 = -C'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Donc le terme général  $T_x$  de la première série devient

$$T_x = \frac{5a^{2x-1}}{(a^{2x-1} + 1)^2},$$

et le terme de la seconde série, suivant que  $x$  est un nombre impair ou pair,

$$T'_x = \pm \frac{x a^x \sqrt{5}}{a^{2x} - 1}.$$

On a donc, en désignant par  $S$  et  $S'$  les sommes des séries proposées,

$$S = 5a \left[ \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{a^2}{(a^3+1)^2} + \frac{a^4}{(a^5+1)^2} + \dots \right],$$

$$S' = a\sqrt{5} \left( \frac{1}{a^2-1} - \frac{2a}{a^4-1} + \frac{3a^2}{a^6-1} - \dots \right).$$

En prenant pour  $a$  la racine de l'équation (1), qui est plus grande que l'unité, on peut développer tous les termes de  $S'$  en séries convergentes. De cette manière, on trouve

$$S' = a\sqrt{5} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^8} + \dots \\ - \frac{2}{a^3} - \frac{2}{a^7} - \frac{2}{a^{11}} - \frac{2}{a^{15}} - \dots \\ + \frac{3}{a^4} + \frac{3}{a^{10}} + \frac{3}{a^{16}} + \frac{3}{a^{22}} + \dots \\ - \frac{4}{a^5} - \frac{4}{a^{13}} - \frac{4}{a^{21}} - \frac{4}{a^{29}} + \dots \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\}.$$

Maintenant, on peut aisément ajouter tous les termes de  $S'$  qui sont placés dans une même ligne verticale, et de cette manière on retrouve les termes successifs de  $S$ , que nous avons mis entre les crochets.

On a, par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} - \frac{4}{a^5} + \dots &= \frac{1}{(a+1)^2}, \\ \frac{1}{a^4} - \frac{2}{a^7} + \frac{3}{a^{10}} - \frac{4}{a^{13}} + \dots &= \frac{a^2}{(a^3+1)^2}, \\ \dots \dots \dots & \end{aligned}$$

de sorte que l'on a enfin

$$\frac{S}{S'} = \sqrt{5}.$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et de Virieu.

# NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES,

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

REDIGÉ

PAR MM. GERONO,  
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET.

---

**TROISIÈME SÉRIE.**

*TOME QUATRIÈME.*

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,  
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

---

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

---

1885

Tous droits réservés.

imiter : ils constituent tous ensemble une sorte de cours, des plus instructifs, pour la résolution des exercices proposés et, en général, de tous les problèmes de Géométrie.

En résumé, parmi les Traités de Géométrie parus dans ces derniers temps, l'Ouvrage que nous analysons est certainement l'un des meilleurs. Il est tel qu'on pouvait l'attendre de son auteur, c'est-à-dire d'un de nos professeurs les plus expérimentés et les plus consciencieux. DÉSIRÉ ANDRÉ.

LES APPAREILS A CALCULS EXACTS ET INSTANTANÉS POUR simplifier la multiplication et la division, inventés par M. *Henri Genaille*, et perfectionnés par M. *Édouard Lucas*.

Ces appareils ont pour but de diminuer le travail de la pensée dans la pratique de toutes sortes de calculs, par la simplification et, pour ainsi dire, par la suppression de la multiplication et de la division. Au lieu de rechercher des appareils encombrants et très coûteux, d'un maniement toujours délicat, les inventeurs se sont proposé d'obtenir des appareils portatifs, d'un fonctionnement facile et régulier, d'un prix accessible à tous.

En se basant sur le principe de la division du travail et sur la théorie des permutations, M. Henri Genaille a imaginé un nouveau système tellement élémentaire qu'il est, en quelques minutes, à la portée des enfants et des esprits les plus rebelles à la science de l'Arithmétique. Ces méthodes ont reçu, à diverses reprises, les précieux encouragements de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*, aux Congrès de Montpellier, de Reims, de Paris, de Rouen et de Blois; perfectionnées par M. Édouard Lucas, elles ont été approuvées par les savants les plus illustres de l'Europe, par tous les ingénieurs, par tous les professeurs, etc. Elles n'ont aucun rapport avec la théorie des logarithmes.

I. Les *multiplicatrices* se composent de onze réglettes carrées renfermées dans une boîte de 0<sup>m</sup>,01 d'épaisseur, 0<sup>m</sup>,12 de largeur et 0<sup>m</sup>,18 de longueur; en les plaçant dans l'ordre convenable, on obtient instantanément les produits de tous les nombres qui ne dépassent pas dix chiffres par un nombre d'un seul chiffre. La pratique de ces réglettes est aussi facile que celle qui consiste à suivre un chemin, à travers un labyrinthe.

au moyen de mains indicatrices dessinées sur des poteaux placés aux carrefours, c'est-à-dire que l'on apprend à se servir de ces réglettes en une minute, au plus. Avec deux boîtes, on obtient tous les produits partiels de tous les nombres jusqu'à vingt chiffres; or, si l'on voulait cataloguer tous ces résultats dans des volumes de mille pages à cent lignes par page, il faudrait, pour contenir ces volumes, une *centaine de millions de bibliothèques* comme la Bibliothèque nationale, en supposant que celle-ci renferme dix millions de volumes! Avec trois boîtes, on aurait les produits partiels jusqu'à trente chiffres, et ainsi de suite, indéfiniment.

II. Les *multisectrices* se composent de onze réglettes carrées renfermées dans une boîte de mêmes dimensions que la précédente. Elles donnent instantanément, et sans aucun calcul, tous les chiffres du quotient et le reste de la division d'un nombre quelconque de dix chiffres au plus avec une seule boîte, et de vingt chiffres avec deux boîtes, par les dix premiers nombres.

III. Les *financières* se composent encore de onze réglettes renfermées dans une boîte semblable aux précédentes. Elles donnent instantanément, et sans aucun calcul, tous les chiffres du nombre qui correspond à l'intérêt d'une somme quelconque pour un jour, aux taux de *trois, quatre, quatre et demi, cinq, six, neuf pour cent* par an. Elles donnent encore, sans aucun effort intellectuel, le *douzième* et le *vingtième* d'une somme quelconque. Ces réglettes sont indispensables aux commerçants, aux banquiers, aux notaires, aux percepteurs, aux employés des banques et des compagnies d'assurances, etc.; en un mot, à tous ceux qui s'occupent de calculs financiers et commerciaux.

IV. Les *népériennes* se composent de onze réglettes contenant sur leurs quatre faces les colonnes de la table de multiplication. Elles forment une Table de Pythagore, disloquée pour ainsi dire, mais qui révèle les opérations successives de la multiplication et de la division. Elles apportent un perfectionnement utile et pratique au *Procédé rhabdologique*, imaginé par l'un des inventeurs des logarithmes, Jean Neper, baron de Markinston (Ecosse), en 1617. Elles s'adressent à tous, et plus spécialement aux professeurs, aux instituteurs, aux papas, aux mamans, dans le but de faciliter et de développer chez les enfants l'enseignement et la pratique des quatre règles de l'Arithmétique.

C'est le *joujou calculateur* le plus parfait.

V. Le *calendrier perpétuel à roulette* donne instantanément, sans aucun calcul, le nom du jour de la semaine qui correspond à une date quelconque du calendrier grégorien ou du calendrier julien. Il est de la grandeur d'un calendrier ordinaire; mais, bien qu'il renferme moitié moins de chiffres que le calendrier annuel, il est valable, depuis l'ère chrétienne, pendant *quarante siècles* et plus.

Ce calendrier est indispensable pour le savant, pour l'historien, dans toutes les recherches historiques, biographiques, bibliographiques; il permet de trouver le jour qui correspond à la date d'un fait mémorable des siècles passés. Son utilité est encore incontestable pour l'homme d'affaires, pour le banquier, pour le négociant, dans les calculs financiers et commerciaux; car on prévoit le jour de l'échéance d'un billet ou d'une traite, d'une livraison ou d'un engagement. Sa propagation est aussi indiquée dans les écoles, car il résume et synthétise toute la théorie du calendrier. Enfin, dans la vie ordinaire, il permet de retrouver les jours chers au souvenir, ceux de tel événement heureux ou malheureux dans la famille, le jour d'une naissance, d'un mariage, etc.

Afin d'éviter le léger inconvénient qui résulte du déplacement des réglettes, les inventeurs ont imaginé des appareils plus parfaits en reproduisant les chiffres et les dessins sur des toiles glissant autour de rouleaux. Ces appareils, qui seront construits avec le plus grand soin, trouveront tout naturellement leur place dans les bureaux de l'ingénieur, de l'architecte, du banquier, de l'homme d'affaires.

Les boîtes et les appareils précédents représentent une première série d'instruments utiles, pratiques et peu coûteux (1); d'autres séries suivront incessamment. Elles formeront toute

---

(1)	Les <i>multiplicatrices</i> , la boîte.....	1 fr.
	Les <i>multisectrices</i> , la boîte.....	1 »
	Les <i>financières</i> , la boîte.....	1 »
	Les <i>népériennes</i> , la boîte.....	1 »

Chacune des boîtes précédentes, franco par la poste au reçu de 1 fr. 20 en un mandat ou en timbres-poste.

Le *calendrier perpétuel à roulette*..... 0 fr. 75 c.

Franco par la poste au reçu de 1 fr. 05 c. en un mandat ou en timbres-poste.



une collection préparée en vue de l'*Exposition universelle* de 1889, et dont l'ensemble a pour but de faciliter, de simplifier, de soulager, et en même temps de développer, de fortifier, dans toutes les combinaisons de la science et de l'art, du commerce et de l'industrie, le travail de la pensée humaine.

---

**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

---

*Question 1362*

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 192);

PAR M. ÉMILE CHRÉTIEN.

*On donne, sur un plan : un point  $o$ , une circonférence, les extrémités  $a$  et  $b$  d'un diamètre de cette courbe et un autre diamètre  $D$ . On demande de déterminer, sur la circonférence, un point  $m$  tel que les droites  $ma$ ,  $mb$  interceptent sur  $D$  un segment vu du point  $o$  sous un angle droit.* (MANNHEIM.)

Lorsque le point  $m$  se déplace sur la circonférence, les droites  $ma$  et  $mb$  déterminent sur le diamètre  $D$  deux divisions homographiques; soient  $c$  et  $c'$  deux points homologues. Joignons  $c$ ,  $o$ , et par le point  $o$  menons à la droite  $co$  une perpendiculaire qui coupera  $D$  en un point  $c''$ . Lorsque le point  $c$  se déplacera, au rayon  $co$  correspondra toujours un rayon  $oc''$ ; donc les systèmes de points  $c$  et  $c''$  seront homographiques; or les systèmes de points  $c'$  et  $c''$  sont homographiques d'un même troisième: donc ils sont homographiques entre eux.

Pour trouver le point  $m$  tel que les droites  $ma$  et  $mb$  interceptent sur  $D$  un segment vu du point  $o$  sous un angle droit, il faudra chercher les points doubles des