BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ D'ÉMULATION

DU

DÉPARTEMENT DE L'ALLIER.

—

(SCIENCES, ARTS ET BELLES-LETTRES.)

—

TOME XII

MOULINS
IMPRIMERIE DE C. DESROSIERS

—

MDCCCLXXIII

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

RECHERCHES

SUR

L'ANALYSE INDÉTERMINÉE

ET L'ARITHMÉTIQUE DE DIOPHANTE,

PAR

M. Edouard LUCAS,

Ancien élève de l'Ecole normale supérieure,
Agrégé de l'Université.
Professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Moulins.

L'*Arithmétique* de Diophante d'Alexandrie, que l'on doit considérer comme un des plus beaux monuments du génie des Grecs, est le plus ancien traité de calcul qui nous soit parvenu. L'époque de la vie de cet illustre mathématicien est fort incertaine, malgré les recherches patientes de ses nombreux commentateurs. Bombelli, l'un d'eux, affirme, sans qu'on sache sur quel fondement il s'appuie, que Diophante florissait vers l'année 160 de l'ère chrétienne; Bachet, qui le confond avec un astrologue du même nom, établit qu'il était contemporain de

Néron ; d'autre part, suivant Aboulfarage, savant arabe cité par Montucla, l'historien des mathématiques, il aurait vécu sous l'empereur Julien vers 365 ; c'est la date adoptée par Gérard Meerman qui, dans la préface de son *Specimen calculi fluxionalis* est entré dans quelques détails sur Diophante. Quoi qu'il en soit, Jean, patriarche de Jérusalem, est le premier qui l'ait cité dans sa biographie de Jean Damascène. Tout ce qu'on sait d'ailleurs, est résumé dans son épitaphe, qui n'est peut-être qu'un jeu d'esprit, rédigée sous forme de problème et conservée dans l'*Anthologie grecque*.

Cet ouvrage fameux, qui sera longtemps encore un sujet de recherches et de méditations pour les savants, fut commenté d'abord par la célèbre Hypatie, une des gloires de l'école d'Alexandrie. L'histoire la représente, allant couverte du manteau de philosophe, insouciante de sa beauté, se mêlant familièrement aux hommes les plus distingués et s'entretenant avec eux sans que le moindre soupçon l'effleurât, tant elle portait de dignité dans sa conduite et de gravité dans ses discours. Elle avait eu pour élève Synésius de Cyrène, évêque de Ptolémaïs ; mais elle eut le sort commun des grandes intelligences, et excita l'envie. Victime de la passion populaire, son corps fut mis en pièces et ses membres palpitants indignement traînés par les rues de la ville, puis ramassés et brûlés en un lieu appelé *Cinaron*. Ses écrits, parmi lesquels on remarquait ses Commentaires sur l'arithmétique de Diophante et sur le

traité des Coniques d'Apollonius de Perga, et son *Canon* ou *Table astronomique* ont été détruits dans l'incendie de la bibliothèque.

L'arithmétique de Diophante était primitivement divisée en treize livres ; mais malheureusement cet ouvrage ne nous est parvenu que très-incomplètement, et le texte grec des six premiers livres seulement, fort altéré et souvent incompréhensible, ne fut connu en Europe que vers le commencement du XVe siècle, à l'époque où Lucas Paciolo, dit del Burgo, rassemblait et expliquait d'après les Arabes, les principes de la science de l'algèbre, dans le premier traité qui ait été imprimé sur cette matière (*Summa de Arithmeticâ et Geometriâ.* — Venise 1494). Bombelli et Pazzi avaient bien commencé, il est vrai, une traduction latine sur les manuscrits conservés dans la bibliothèque du Vatican, et aperçus pour la première fois par l'astronome Regiomontanus, lorsqu'il vint en Italie en 1460 ; mais ils n'en achevèrent que les cinq premiers livres et ne les publièrent point.

C'est sur le texte grec d'un manuscrit trouvé dans la bibliothèque de l'université de Wittemberg que Guillaume Holtzmann (en grec, Xylander) publia le premier une traduction latine des six premiers livres de l'arithmétique de Diophante, avec le commentaire de Planude, surnommé Maximus, savant moine grec qui vivait à Constantinople dans la première moitié du quatorzième siècle ; renommé pour ses connaissances étendues et variées, Planude avait été

envoyé en 1327 comme ambassadeur à Venise par l'empereur Andronic II (1).

Gaspard Bachet, sieur de Méziriac, géomètre et littérateur distingué, perfectionna le texte de Xylander, et le fit suivre d'un commentaire prolixe, mais très-lumineux que les progrès de l'algèbre rendent aujourd'hui inutile, et d'un traité sur les doubles égalités. Né à Bourg-en-Bresse (1581-1638), il fut, à la suite d'un voyage en Italie avec le grammairien Vaugelas, proposé comme précepteur de Louis XIII ; mais comme il n'était pas ambitieux, il quitta précipitamment la capitale, tout effrayé et disant qu'il n'avait jamais été si en peine, s'imaginant déjà porter sur ses épaules le lourd fardeau du royaume. De retour dans sa ville natale, il se maria et son choix fut heureux à ce qu'il paraît, car il avoue lui-même que c'était la meilleure chose qu'il eût jamais faite. C'est au milieu du calme de cette vie intérieure, qu'il découvrit la résolution de l'équation indéterminée du premier degré en nombres entiers, la théorie plus curieuse qu'utile des carrés magiques, et publia deux éditions successives de son *Recueil de problèmes plaisants et délectables qui se font par les*

(1) Diophanti Alexandrini *rerum arithmeticarum libri sex, quorum primi duo adjecta habent scholia Maximi (ut conjectura est) Planudis, item liber de numeris polygonis seu multangulis, opus incomparabile, veræ arithmeticæ logisticæ perfectionem continens, paucis adhuc visum, à Guillelmo Xylandro Augustano, incredibile labor latinè redditum et commentariis explanatum, inque lucem editum (Bâle. — 1575.)*

nombres (Lyon 1613 et 1624) et son commentaire sur Diophante (Paris 1621). Dans l'intéressante préface de ce dernier ouvrage, Bachet raconte que le cardinal Duperron lui dit avoir possédé un manuscrit complet des treize livres de Diophante qui lui fut emprunté par Gosselin ; mais la mort prématurée de ce savant, emporté par une maladie pestilentielle, fit perdre le texte précieux qu'il se proposait d'étudier et de commenter.

En 1634, Simon Stevin, de Bruges, publia une traduction française des quatre premiers livres de Diophante, qu'Albert Girard a insérée dans l'édition de ses œuvres complètes en y ajoutant la traduction des deux derniers livres. Mais parmi tous les savants qui ont commenté l'*Arithmétique*, on doit placer au premier rang, l'immortel Fermat.

Pierre de Fermat, conseiller au parlement de Toulouse, naquit à Beaumont-de-Lomagne en 1608 et mourut en 1665. C'est dans les intervalles de repos que lui laissaient ses devoirs de magistrat, qu'il se livrait en guise de délassement à la culture des lettres et surtout des mathématiques. Rival heureux de Descartes, objet constant de l'admiration de Pascal qui le nommait le premier homme du monde, il fut le précurseur de Leibnitz et de Newton, l'inventeur du calcul différentiel, découverte universellement réputée la plus grande des temps modernes, de la théorie des nombres et du calcul des probabilités. Il a énoncé, sur l'analyse indéterminée, des théorèmes qui ont défié pendant longtemps les efforts des plus

grands géomètres et dont quelques-uns ne sont encore qu'imparfaitement démontrés. Dans cette branche de l'arithmétique, Fermat s'est frayé une voie nouvelle où il a été bien difficile de le suivre, parce qu'il a presque toujours caché la méthode qui le guidait dans ses recherches, et qu'il n'a pas publié l'ouvrage sur la théorie des nombres qu'il avait projeté. Il ne nous reste d'ailleurs des recherches de Fermat sur la théorie des nombres que les notes qu'il avait écrites de sa main sur les marges d'un exemplaire du commentaire de Bachet et les fragments de sa correspondance qui ont été publiés par son fils Samuel Fermat, avec les développements de l'*Inventum novum* du P. Billy (1).

A la suite de l'invention du calcul différentiel et de ses applications au système du monde, ces travaux furent généralement délaissés ; mais, plus tard, Euler et Lagrange s'y sont appliqués avec beaucoup de succès, et ont donné la résolution de l'équation indéterminée du second degré et la démonstration d'un certain nombre de théorèmes énoncés par Fermat ; mais malgré les efforts de ces deux illustres analystes, malgré les recherches de Legendre, Gauss, Cauchy, Lejeune-Dirichlet, etc., on n'est point encore parvenu à la résolution des équations indéterminées

(1) DIOPHANTI ALEXANDRINI *arithmeticorum Libri sex, et de numeris multangulis Liber unus, cum commentariis* C. G. BACHETI, V. C., *et observationibus* D. P. DE FERMAT *senatoris Tolosani. Tolosæ* 1670.

d'un degré supérieur au second, même dans les cas les plus simples.

Lagrange avait eu l'intention de publier une nouvelle édition de l'arithmétique du géomètre d'Alexandrie dans laquelle il se proposait surtout d'éclaircir les courtes remarques de Fermat et de restituer la plus grande partie des beaux théorèmes qui y sont répandus ; mais cet ouvrage n'a point été terminé et l'analyse manuscrite des quatre premiers livres seulement est conservée à la bibliothèque de l'Institut.

Le but que je me suis proposé en publiant la première partie de ces recherches est de faire voir que la méthode employée par Fermat pour la démonstration de la plupart de ses théorèmes numériques, peut s'appliquer dans un grand nombre de cas à la résolution des équations de degré supérieur. J'ai été ainsi amené à résoudre complètement un grand nombre d'équations trinômes du troisième et du quatrième degré, et à énoncer et démontrer des théorèmes nouveaux sur cette partie de l'analyse.

CHAPITRE Ier.

De la résolution des Equations indéterminées du troisième et du quatrième degré.

Diophante, dans les six livres de son *Arithmétique* que le temps a respectés, propose et résout un certain nombre de problèmes qui conduisent, soit à la résolution d'équations déterminées, soit aussi à la résolution d'équations indéterminées. Mais, dans ce dernier cas, Diophante n'a point envisagé la question au point de vue général, et n'a donné ordinairement que la solution en moindres nombres de l'équation proposée.

Les commentateurs de Diophante ont généralisé quelques-uns de ses problèmes et donné de nouveaux développements qui permettent souvent de déduire d'une première solution une série indéfinie de solutions nouvelles ; mais ces méthodes ne sont point générales et ne sauraient donner toutes les solutions possibles ; souvent même elles ne donnent pas les solutions les plus simples qui se présentent d'ailleurs d'elles-mêmes.

Pour démontrer l'impossibilité de certaines équations biquadratiques, Fermat s'est servi d'une méthode qui consiste à exprimer les indéterminées des

équations proposées en fonctions entières d'indéterminées plus petites qui doivent elles-même satisfaire à des équations de même forme que les équations proposées, et comme on peut raisonner de même sur cette seconde solution, et que d'ailleurs il y a une limite à la décroissance des nombres entiers, on en conclut avec certitude l'impossibilité de l'existence d'une première solution.

C'est ainsi que Fermat a démontré que la différence de deux nombres bicarrés ne peut jamais être un carré; ce théorème, l'un des plus beaux de l'arithmétique, a été énoncé dans une observation ajoutée au 20e des problèmes placés par Bachet à la suite de la 26e proposition du livre VI de Diophante (1).

(1) Voici le passage de Fermat auquel nous faisons allusion :

« Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadra-
« tus; ... Si area trianguli esset quadratus darentur duo qua-
« drato-quadrati quorum differentia esset quadratus : Unde sequi-
« tur dari duo quadrata quorum et summa et differentia esset
« quadratus. Datur itaque numerus compositus ex quadrato et
« duplo quadrati æqualis quadrato, eâ conditione ut quadrati eum
« componentes faciant quadratum. Sed si numerus quadratus
« componitur ex quadrato et duplo alterius quadrati, ejus
« latus similiter componitur ex quadrato et duplo quadrati, ut
« facillimè possumus demonstrare.

« Unde concludetur latus illud esse summam laterum circa rec-
« tum trianguli rectanguli et unum ex quadratis illud componen-
« tibus efficere basem et duplum quadratum æquari perpendiculo.

« Illud itaque triangulum rectangulum conficietur à duobus qua-
« dratis quorum summa et differentia erunt quadrati. At isti duo
« quadrati minores probabuntur primis quadratis suppositis quo-

Pourtant ce théorème a été énoncé antérieurement, mais démontré incomplétement, par Fibonacci (Léonard de Pise) dans son *Traité des nombres carrés ;* ce traité qu'on avait cru longtemps perdu a été retrouvé et publié par M. le prince Balthazar Boncompagni. (Voir *Journal de M. Liouville*, t. XX, p. 567.)

Cette méthode remarquable de démonstration que Fermat considérait comme une de ses découvertes les plus importantes et les plus difficiles (1), est une des plus fécondes de la théorie des nombres. Euler (2) l'a considérablement développée et l'a appliquée à la démonstration de l'impossibilité d'un certain nombre d'équations indéterminées du 3e et du 4e degré ; Legendre, Lejeune-Dirichlet, M. Lebesgue et quelques autres (3) à un grand nombre d'équations indéterminées du 3e et du 5e degré.

« rum tàm summa quàm differentia faciunt quadratum. Ergo si « dentur duo quadrata quorum summa et differentia faciunt qua- « dratum, dabitur in integris summa duorum quadratorum ejus- « dem naturæ priore minor. Eodem ratiocinio dabitur et minor « ista inventa per viam prioris et semper in infinitum minores « invenientur numeri in integris idem præstantes : quod impos- « sibile est, quia dato numero quovis integro non possunt dari « infiniti in integris illo minores. » *Edit. cit. de Dioph.* p. 339.

(1) « Hujus theorematis a nobis inventi demonstrationem quam « et ipsi tandem non sine operosâ et laboriosâ meditatione detexi- « mus, subjungemus. Hoc nempe demonstrandi genus miros in « arithmeticis suppeditabit progressus. » *(Loc. cit.)*

(2) Euler. — *Eléments d'Algèbre.*— Seconde partie, chap. XIII.

(3) Legendre.— *Théorie des Nombres.*

Lejeune-Dirichlet. — *Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations du 5e degré.* — Journal de Crelle, t. III, p. 354.

Le but que je me suis proposé dans ce travail est de faire voir que la méthode de Fermat peut s'appliquer non-seulement à la démonstration de l'impossibilité de certaines équations indéterminées, mais peut aussi servir à la résolution de ces équations, lorsque celles-ci sont possibles. J'ai pu arriver ainsi à résoudre un grand nombre d'équations cubiques et biquadratiques qui avaient été considérées par Fermat, Euler et Lagrange, mais dont la solution générale restait ignorée.

Lagrange a donné le premier la solution générale des équations

$$x^4 - 2y^4 = \pm z^2,$$

et de l'équation

$$x^4 + 8y^4 = z^2,$$

qui s'y ramène immédiatement ; M. Lebesgue en a donné aussi la théorie. J'exposerai plus loin une solution plus simple de ces équations (1).

LEBESGUE. — *Théorèmes nouveaux sur l'équation indéterminée* $x^5 + y^5 = az^5$. — Journal de M. Liouville, t. VIII, p. 49.

(1) ŒUVRES DE LAGRANGE publiées par les soins de M. J.-A. Serret. *Sur quelques Problèmes de l'Analyse de Diophante*, t. IV, p. 377.

LEBESGUE. — *Résolution des équations biquadratiques*. — Journal de M. Liouville, t. XVIII, p. 73.

§ I. DE L'ÉQUATION $x^3 + y^3 = Az^3$.

On est conduit à cette équation lorsque l'on cherche à résoudre ce problème posé par Diophante et non encore entièrement résolu, de trouver deux nombres entiers ou fractionnaires dont la somme ou la différence soit égale à la somme ou à la différence de deux cubes donnés.

Pour résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^3 + y^3 = (a^3 + b^3)\, z^3,$$

dans laquelle a et b sont donnés, il suffit de poser

$$\frac{x}{z} = a + c\mathrm{N}, \qquad \frac{y}{z} = b + \mathrm{N},$$

et de disposer de c de manière à faire disparaître après la substitution la première puissance de N. On trouve ainsi une relation de la forme

$$\mathrm{BN}^3 + \mathrm{CN}^2 = o,$$

qui détermine N par une équation du premier degré (1). Fermat détermine ainsi x, y, z et fait servir chaque détermination qui change les données a et b à la recherche de nouvelles solutions en nombre indéfini. On obtient à l'aide de cette méthode les

(1) E. BRASSINNE.— *Précis des Œuvres mathématiques de P. Fermat et de l'Arithmétique de Diophante*, p. 70.

formules suivantes qui permettent de déduire d'une première solution x, y, z de l'équation

$$x^3 + y^3 = Az^3,$$

la solution nouvelle

$$X = x(2y^3 + x^3), \quad Y = -y(2x^3 + y^3), \quad Z = z(x^3 - y^3).$$

Si dans ces formules, qu'on attribue habituellement à Euler, bien qu'elles soient fort antérieures (1), on fait en particulier $A = 9$, on trouve que l'équation

$$x^3 + y^3 = 9z^3,$$

a pour solutions

$$\begin{array}{lll} x_1 = 2, & y_1 = 1, & z_1 = 1, \\ x_2 = 20, & y_2 = -17, & z_2 = 7, \\ x_3 = 188479, & y_3 = -36520, & z_3 = 90391, \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{lllll} x_4 = 12 & 43617 & 73399 & 00948 & 36481, \\ y_4 = 4 & 87267 & 17171 & 43523 & 36560, \\ z_4 = 6 & 09623 & 83567 & 61372 & 97449; \end{array}$$

etc. ; et en faisant encore $A = 28$, on trouve que l'équation

$$x^3 + y^3 = 28\, z^3,$$

a pour solutions

$$\begin{array}{lll} x_1 = 3, & y_1 = 1, & z_1 = 1, \\ x_2 = 87, & y_2 = -55, & z_2 = 26, \end{array}$$

(1) J. PRESTET. — *Nouveaux Éléments de Mathématiques.* — Paris 1689. T. I, p. 61.

$$x_3 = 632\ 84705,\ y_3 = 283\ 40511,\ z_3 = 214\ 46828,$$

puis

$$\begin{aligned} x_4 &= 18\ 92071\ 22047\ 02010\ 97176\ 90323\ 50335, \\ y_4 &= -15\ 01104\ 22682\ 05492\ 03687\ 05693\ 29391, \\ z_4 &= 4\ 94756\ 15518\ 27392\ 93262\ 16777\ 53432; \end{aligned}$$

et ainsi de suite, et l'on voit que ces solutions croissent très-rapidement et contiennent quatre fois plus de chiffres que la solution précédente.

Il est facile de généraliser la méthode précédente, et de déduire d'une première solution x_0, y_0, en nombres rationnels de l'équation

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+gx^3+hx^2y+kxy^2+ly^3=o,$$

une série indéfinie de solutions nouvelles. Posons en effet

$$x=x_0+X,\quad y=y_0+Y,$$

nous obtiendrons en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, une équation de la forme

$$BX+CY+DX^2+EXY+FY^2+GX^3+HX^2Y+KXY^2+LY^3=o,$$

dans laquelle les coefficients B, C, D,... s'obtiennent aisément du premier membre de l'équation proposée à l'aide de la formule de Taylor. Pour déterminer rationnellement X et Y, on égale à o les termes du premier degré, ce qui donne les deux équations

$$\begin{aligned} BX + CY &= o, \\ DX^2 + EXY + \ldots + LY^3 &= o, \end{aligned}$$

et en éliminant Y, on obtient en divisant par X^2, l'équation

$$[C^3G - BC^2H + B^2CK - B^3L]X + C^3D - BC^2E + B^2CF = o,$$

d'où on tire la valeur rationnelle de X et par suite celle de Y.

On déduit de ce qui précéde, en rétablissant l'homogénéité afin de remplacer les solutions rationnelles par des solutions entières, que si x, y, z désignent en nombres entiers une solution de l'équation

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = o,$$

on obtient une série indéfinie de nouvelles solutions à l'aide des formules

$$X = x\,[By^3 - Cz^3],$$
$$Y = y\,[Cz^3 - Ax^3],$$
$$Z = z\,[Ax^3 - By^3].$$

Ainsi l'équation

$$x^3 + 2y^3 + 3z^3 = 6xyz,$$

qui donne pour solution immédiate

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1,$$

donne ensuite les solutions

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1, & y_1 = -2, & z_1 = 1, \\ x_2 = 19, & y_2 = 4, & z_2 = -17, \\ x_3 = 282473, & y_3 = -86392, & z_3 = -114427, \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{array}$$

Cauchy a donné aussi d'autres formules pour trouver de nouvelles solutions, de ces équations, distinctes des précédentes (1).

(1) CAUCHY.— *Sur la résolution de quelques équations, indéterminées en nombres entiers.*— Exercices de Mathématiques, t. I, p. 258.

En désignant en effet par x, y, z et x', y', z' deux solutions de l'équation précédente, on a encore

$$\begin{aligned} X &= Byy'(xy'-yx') + Czz'(xz'-zx') + D(x^2y'z'-x'^2yz), \\ Y &= Czz'(yz'-zy') + Axx'(yx'-xy') + D(y^2z'x'-y'^2zx), \\ Z &= Axx'(zx'-xz') + Byy'(zy'-yz') + D(z^2x'y'-z'^2xy), \end{aligned}$$

et ainsi les solutions (x_0, y_0, z_0), (x_2, y_2, z_2) de l'exemple donnent encore

$$X = 143, \quad Y = 113, \quad Z = 71.$$

Euler et Legendre (1) ont démontré que l'équation

$$x^3 + y^3 = Az^3,$$

est impossible, lorsque A est égal à 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 8, en ramenant par la décomposition en facteurs, l'équation proposée à une autre équation semblable à la première, mais contenant des indéterminées beaucoup moindres. Mais si A est égal à 7 ou à 9, l'équation est possible, et nous allons faire voir qu'il est facile de trouver par la même méthode de nouvelles solutions qui n'avaient point été données jusqu'à présent.

Prenons en effet l'équation

$$x^3 + y^3 = 9z^3,$$

on en tire en supposant z pair,

$$\begin{aligned} x + y &= 3a^3, \\ x^2 - xy + y^2 &= 3b^3, \end{aligned}$$

(1) LEGENDRE. — *Théorie des Nombres*, t. II, p. 7 et suiv.

et a et b sont premiers entre eux, et b non divisible ni par 2, ni par 3, car la seconde équation peut s'écrire

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2=b^3;$$

on doit donc poser

$$b=f^2+3g^2,$$
$$b^3=F^2+3G^2,$$

et l'on a

$$G=3g\,(f^2-g^2),$$
$$F=f\,(f^2-9g^2);$$

donc en identifiant et faisant $a=6\,a'$,

$$g\,(f^2-g^2)=4.9.a'^3.$$

Nous avons ici deux cas à considérer suivant que g est ou n'est pas divisible par 3 ; d'ailleurs f^2-g^2 est impair avec f^2+3g^2, donc g est pair.

Premier cas.— Si on suppose d'abord g divisible par 3, on a

$$g=4.9.p^3,\quad f+g=q^3,\quad f-g=r^3,$$

et par suite

$$q^3-r^3=9\,(2p)^3,$$

et ainsi l'équation proposée se ramène à une équation de même forme et dans laquelle le second membre est encore pair, et d'une solution x, y, $2z$ de l'équation

$$x^3+y^3=9\,(2z)^3,$$

on obtient une série indéfinie de solutions nouvelles (X, Y, 2Z) à l'aide des formules

$$(A)\quad \begin{cases} X + Y = -3\,(6xyz)^3, \\ X - Y = (x^3 - y^3)(x^3 + 2y^3)(2x^3 + y^3), \\ \qquad 2Z = -6xyz\,(x^6 + x^3y^3 + y^6). \end{cases}$$

Deuxième cas. — Si on suppose, au contraire, g non divisible par 3, et $f + g$ divisible par 3, ce qui ne nuit pas à la généralité en admettant que g peut être négatif, on a

$$g = 4p^3, \quad f + g = 9q^3, \quad f - g = r^3,$$

et par suite

$$r^3 + (-2p)^3 = 9q^3,$$

équation de même forme que la proposée, mais dans laquelle le second membre est impair. Cette équation a pour solution immédiate $r = 1, p = -1, q = 1$, et on en déduit pour première solution de la proposée dans laquelle l'inconnue du second membre est double d'un impair

$$x'_1 = 919, \quad y'_1 = -271, \quad 2z'_1 = 6.73,$$

et de celle-ci on déduit par les formules d'Euler une série indéfinie de solutions distinctes de celles qui avaient été données jusqu'à présent, puisque la méthode de Fermat ne donnait pour z que des valeurs impaires. On trouve ainsi encore la solution nouvelle

$$\begin{cases} x'_2 = 122\ 26939\ 83503 \\ y'_2 = \ \ 96\ 12720\ 80497, \\ z'_2 = 6 \times 7 \times 10 \times 17 \times 73 \times 668953, \end{cases}$$

dans laquelle l'inconnue du second membre est quadruple d'un impair, et ainsi de suite.

Si donc x, $2y$, z désignent une première solution de l'équation

$$x^3 + (2y)^3 = 9z^3 ,$$

on obtient une nouvelle solution de l'équation

$$X^3 + Y^3 = 9\ (2z)^3 ,$$

par les formules

$$(B) \begin{cases} X+Y = -\ 3\ (6xyz)^3 , \\ X-Y = -\ [x^3 - (2y)^3\ ]\,[x^3 + 2(2y)^3]\ \ [2x^3 + (2y)^3], \\ \quad 2Z = -\ 6xyz\ [x^6 + x^3\ (2y)^3 + (2y)^6], \end{cases}$$

formules entièrement analogues aux formules (A).

En appliquant les formules (B) à la seconde solution

$$x = 20, \quad y = -\ 17, \quad z = 7,$$

donnée par les formules d'Euler, on retrouve les valeurs x'_2, y'_2 et z'_2 données plus haut.

Si au contraire, on suppose z impair dans l'équation proposée, on obtient en identifiant dans la valeur de $4b^3$, l'équation

$$3g\ (f^2 - g^2) \pm f\,(f^2 - 9g^2) = a^3 .$$

L'étude de cette équation, et d'autres analogues, fera l'objet d'un nouveau travail, dans lequel j'ai démontré que les formules (A) et (B) résolvent complètement l'équation proposée.

Il est d'ailleurs facile d'appliquer les principes qui précèdent, à la recherche de nouvelles solutions des équations cubiques de la forme considérée ; on a ainsi dans le cas de A=7, la solution nouvelle

$$x = 73, \quad y = -17, \quad z = 38,$$

et toutes celles qu'on en déduira par les formules d'Euler.

Fermat, qui avait particulièrement étudié cette équation, en a donné pour solution, en dehors des solutions immédiates,

$$x = 2, \quad y = -1, \quad z = 1,$$
$$x = 4, \quad y = 5, \quad z = 3,$$

la solution

$$x = 1265, \quad y = -1256, \quad z = 183,$$

qui se déduit des précédentes. Mais il n'a point donné la solution ci-dessus, beaucoup plus simple, ce qui semble prouver qu'il n'était point en possession de la méthode générale (1).

(1) Brassinne.— *Précis des Œuvres mathématiques de P. Fermat*, p. 70.

§ II. — De l'équation $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=y^2$.

Fermat a indiqué le moyen de trouver des valeurs rationnelles de x et de y en nombre indéfini, dans l'un des trois cas énoncés ci-dessous.

1° Lorsque le coefficient a de de la plus haute puissance de l'inconnue x est égal à un carré parfait l^2.

On pose alors

$$y = lx^2 + mx + n,$$

et on identifie les coefficients de x^3 et de x^2, ce qui permet de déterminer linéairement m et n à l'aide des formules

$$m = \frac{b}{2l}, \quad n = \frac{4l^2c^2 - b^2}{8l^3},$$

et il reste alors une équation du premier degré, qui donne la valeur de x par la formule

$$x = \frac{e-n^2}{2mn-d}.$$

En prenant pour exemple l'équation

$$81x^4 - 36x^3 + 18x^2 + 4x + 1 = y^2,$$

que nous résoudrons plus loin d'une manière générale, on trouve ainsi

$$m = 2, \quad n = \frac{9}{7},$$

et par suite

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{33}{4}.$$

Lorsque l'on connaît ainsi une première solution x_0, y_0, on pose

$$x = x_0 + x',$$

et on se trouve ramené au cas précédent, et ainsi d'une première solution de l'équation, on en peut déduire une série indéfinie, à moins que l'on ait

$$e = n^2 \quad \text{ou} \quad 2mn = d,$$

ce qui n'arrive habituellement que lorsqu'il est absolument impossible de résoudre l'équation proposée autrement que par la première solution.

On trouve ainsi, avec l'exemple précédent, la solution nouvelle

$$x = \frac{62 \quad 85580}{466 \quad 99523}.$$

2° Lorsque le terme tout connu e est égal à un carré parfait, on ramène ce cas au précédent, en remplaçant x par $\frac{1}{x}$.

3° Lorsque les termes extrêmes sont en même temps des carrés parfaits l^2 et n^2. On peut faire usage des deux moyens indiqués ci-dessus, mais on peut poser immédiatement

$$y = lx^2 + mx \pm n,$$

et l'identification donne

$$m = \frac{b}{2l} \text{ et } x = \frac{c - m^2 \mp 2ln}{\pm 2mn - d}.$$

ou encore

$$m = \pm\frac{d}{2n} \text{ et } x = \frac{2lm - b}{c - m^2 \pm 2ln}.$$

Euler a fait l'application de ce procédé à un grand nombre de problèmes d'analyse indéterminée. On voit d'ailleurs ainsi, que si x, y, z, désignent une solution en nombres entiers de l'équation

$$x^4 + ax^2 y^2 + by^4 = z^2 ,$$

on obtient une série indéfinie de solutions nouvelles, à l'aide des formules

$$\begin{aligned} X &= x^4 - by^4, \\ Y &= 2xyz, \\ Z &= z^4 - (a^2 - 4b)\, x^4 y^4. \end{aligned}$$

Malheureusement, cette méthode ne résout qu'incomplètement l'équation proposée. Nous donnerons plus loin la solution générale d'un grand nombre de ces équations ; mais nous nous bornerons ici à faire voir que cette forme d'équation comprend l'équation cubique considérée dans le paragraphe précédent ; soit en effet l'équation

$$x^3 + y^3 = a^3 + b^3 ,$$

on obtient en posant

$$x = a + zN, \quad y = b + N,$$

l'équation

$$N^2 (1 + z^3) + 3N (az^2 + b) + 3 (a^2 z + b^2) = 0,$$

et si on tire la valeur de N, qui doit être rationnelle, on a

$$N = -\frac{3}{2} \cdot \frac{az^2+b\pm 3V}{z^3+1},$$

avec l'équation de condition

$$-a^2 z^4 - 4b^2 z^3 + 6abz^2 - 4a^2 z - b^2 = 3V^2,$$

et on trouve ainsi pour $a = 1$, $b = 2$, en partant de la première valeur $z = -1$, la nouvelle valeur $z = -4$ qui donne $x = -\frac{17}{7}$ et $y = \frac{20}{7}$, solution déjà trouvée.

§ III. DES ÉQUATIONS $X^4 - 2Y^4 = \pm Z^2$ ET $z^4 + 8w^4 = X^2$.

Les méthodes de résolution indiquées précédemment pour les équations biquadratiques ne donnent point toutes les solutions des équations proposées. Je vais montrer comment il est possible de résoudre complètement un grand nombre d'équations biquadratiques qui rentrent dans la seconde forme considérée par Fermat, en donnant d'abord une solution plus simple des équations traitées par Lagrange.

En prenant d'abord le signe supérieur, on déduit de l'équation

$$(1) \qquad X^4 - 2Y^4 = Z^2,$$

puisque X et Z, supposés premiers entre eux, sont impairs

$$\begin{aligned} X^2 \pm Z &= 2z^4, \\ X^2 \mp Z &= (2w)^4, \\ Y &= 2zw; \end{aligned}$$

on obtient, par l'addition des deux premières des équations qui précèdent

$$X^2 = z^4 + 8w^4,$$

et l'on voit que la résolution de cette équation est intimement liée à celle de l'équation (1). On tire de cette dernière

$$X \pm z^2 = 2x^4,$$
$$X \mp z^2 = 4y^4,$$
$$w = xy,$$

et par suite

$$x^4 - 2y^4 = \pm z^2 .$$

En prenant le signe supérieur, on est ramené à une équation identique avec l'équation proposée ; au contraire, en prenant le signe inférieur, on a une équation qui donne la solution immédiate

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1.$$

On déduit donc pour première solution de l'équation (1), à l'aide des formules

$$X = x^4 + 2y^4,$$
$$Y = 2xyz,$$
$$Z = z^4 - 8x^4y^4,$$

les valeurs suivantes

$$X_1 = 3, \quad Y_1 = 2, \quad Z_1 = 7,$$

et ces mêmes valeurs donnent ensuite à l'aide des formules précédentes

$$X_2 = 113, \quad Y_2 = 84, \quad Z_2 = 7967,$$

puis

$$X_3 = 2626\ 21633,$$
$$Y_3 = 1512\ 45528,$$
$$Z_3 = 60\ 91245\ 60651\ 82847,$$

et ainsi de suite ; on a ainsi de chaque solution de l'équation

$$(2) \quad x^4 - 2y^4 = -z^2 ,$$

une série indéfinie de solutions premières entre elles de l'équation (1) dans chacune desquelles Y_n est égal au produit de 2^n par un nombre impair.

Il nous reste donc à trouver toutes les solutions de l'équation (2). Pour cela, désignant par u et v deux nouvelles variables déterminées par les conditions

$$x^2 = u + v,$$
$$z = u - v,$$

nous tirons de l'équation précédente

$$y^4 = u^2 + v^2 .$$

La résolution de l'équation (2) renferme donc la solution d'un problême proposé par Fermat comme très-difficile, dans une observation sur le petit traité des doubles égalités de Bachet, placé à la suite de la question XXIV du livre VI de Diophante. Ce problême consiste à trouver un triangle rectangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, de telle sorte que l'hypothénuse soit un carré parfait ainsi que la somme des deux côtés de l'angle droit ; ce problême revient d'ailleurs à trouver deux nombres u et v, dont la somme soit un carré et dont la somme des carrés soit un bicarré.

Mais puisque $u + v$ et $u^2 + v^2$ sont des carrés, on a

$$u = (r^2 - 2rs + 2s^2)^2 - 4r^2 s^2 ,$$
$$v = 4rs\,(r^2 - 2rs + 2s^2),$$
$$x = r^2 - 2s^2 ,$$

r et s désignant des nombres premiers entre eux et assujettis à la condition fournie par l'équation

$$y^2 = (r^2 - 2rs + 2s^2)^2 + 4\,r^2\,s^2\,.$$

On tire d'ailleurs de cette dernière équation

$$r^2 - 2rs + 2s^2 = f^2 - g^2\,,$$
$$rs = fg,$$
$$y = f^2 + g^2.$$

En supposant d'abord

$$r = f \text{ et } s = g,$$

on obtient en portant les valeurs de r et de s dans la première des équations précédentes, l'un des deux résultats suivants :

$$g = o \text{ ou } 3g = 2f.$$

Le premier de ces résultats fournit la solution immédiate $x_0 = y_0 = z_0 = 1$; tandis que le second donne

$$f = 3, \quad g = 2,$$

et par suite

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 13, \quad z_1 = 239.$$

Mais pour résoudre généralement le problême, il faut poser

$$r = mf \text{ et } g = ms,$$

m désignant un nombre rationnel ; on en déduit par l'élimination de r et de g, l'équation

$$m^2\,(f^2 + s^2) - 2mfs + 2s^2 - f^2 = o,$$

et puisque la valeur de m doit être rationnelle, on a

$$m = \frac{fs \pm \mathrm{V}}{f^2 + s^2},$$

avec l'équation de condition

$$f^4 - 2s^4 = V^2,$$

ce qui est précisément l'équation (1). On satisfait donc d'une manière générale à l'équation (2), en nombres rationnels, en posant

$$\begin{aligned} x &= r^2 - 2s^2, \\ z &= (r^2 - 4rs + 2s^2)^2 - 8r^2 s^2, \\ y &= f^2 + m^2 s^2, \end{aligned}$$

formules dans lesquelles les quantités auxiliaires r et m sont déterminées par les relations

$$\begin{aligned} r &= mf, \\ m &= \frac{fs \pm V}{f^2 + s^2}. \end{aligned}$$

f, s et V étant trois indéterminées qui résolvent l'équation

$$f^4 - 2s^4 = V^2.$$

Pour résoudre l'équation proposée (2) en nombres entiers, il faut d'abord réduire m à sa plus simple expression, puis chasser les dénominateurs.

On déduit ainsi des valeurs X_1, Y_1, Z_1 de l'équation (1)

$$f = 3, \quad s = 2, \quad m = \frac{6 \pm 7}{13},$$

et en prenant le signe supérieur dans la valeur de m

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 13, \quad z_1 = 239,$$

valeurs déjà trouvées ; et avec le signe inférieur

$$x'_1 = 1343, \quad y'_1 = 1525, \quad z'_1 = 27\,50257;$$

on déduira encore des valeurs X_2, Y_2, Z_2, de l'équation (1)

$$x_2 = 23\ 72159, \quad y_2 = 21\ 65017, \quad z_2 = 156\ 05907\ 45759,$$

et

$$x'_2 = 97884\ 25919, \quad y'_2 = 4\ 24224\ 52969, \quad \ldots.$$

et ainsi de suite. Chaque solution X_n, Y_n, Z_n, de l'équation (1) donnera deux solutions nouvelles x_n, y_n, z_n et x'_n, y'_n, z'_n de l'équation (2), et chacune de celles-ci fournira une série indéfinie de solutions de l'équation (1). Ainsi on déduira encore des valeurs x_1, y_1, z_1 de l'équation (2) les valeurs suivantes pour l'équation (1)

$$X'_1 = 57123, \quad Y'_1 = 6214, \quad Z'_1 = 32625\ 80153,$$

et de ces dernières on tirera

$$X''_1 = 10650\ 39335\ 57156\ 21873,$$
$$Y''_1 = 2\, X'_1\, Y'_1\, Z'_1\,,$$

et ainsi de suite ; inversement on déduira des valeurs X'_1, Y'_1, Z'_1, de l'équation (1) la solution nouvelle de l'équation (2)

$$x = 5\ \ 70577\ \ 12360\ \ 38721,$$
$$y = 7\ \ 65824\ \ 64576\ \ 72229,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On remarquera que la méthode de Fermat ne donne pas toutes les solutions. Ainsi Euler a trouvé à l'aide de cette méthode les solutions

$$x_0\, y_0\,, \quad x_1\, y_1\,, \quad x'_2\, y'_2\,. \quad \ldots.$$

de l'équation (2), mais n'a point donné les solutions

$$x'_1\, y'_1\,, \quad x_2\, y_2\,, \quad \ldots\,;$$

cependant ces dernières se déduisent toutes de la première d'entre elles $x'_1\, y'_1$ par la méthode de Fermat.

Nous considérerons maintenant les équations

$$x^4 - 2y^4 = \pm z^4,$$

obtenues en remplaçant z par z^2 dans les équations proposées. L'équation est impossible avec le signe supérieur, puisque, d'après un théorême démontré par Euler, la somme d'un bicarré et du double d'un bicarré ne peut être un carré parfait (Voir le chapitre XIII de la seconde partie de ses *Eléments d'Algèbre*). En prenant le signe inférieur, l'équation

$$x^4 - 2y^4 = -z^4.$$

a pour solution unique $x = y = z = 1$. En effet, reprenons la valeur de z trouvée plus haut, nous aurons

$$z^2 = (r^2 - 4rs + 2s^2)^2 - 8r^2s^2,$$

et par suite

$$r^2 - 4rs + 2s^2 = \pm (r'^2 + 2s'^2),$$
$$rs = r's'.$$

Posons encore, comme précédemment

$$r' = mr \text{ et } s = ms'\,;$$

nous obtenons avec le signe + une équation quadratique en m, et en exprimant que la valeur de

m doit être rationnelle, cette équation donne la condition

$$r'^4 + 4s'^4 = U^2,$$

équation impossible à moins que l'une des indéterminées r ou s' ne soit nulle, ce qui donne $z = 1$. En prenant le signe —, on arrive aux mêmes conclusions.

Il résulte encore de là que l'équation

$$x^4 - 2y^4 = -1.$$

a pour solution unique $x = 1$, $y = 1$.

Fermat avait énoncé ce résultat sous la forme suivante : *Aucun nombre triangulaire, excepté l'unité, ne peut être égalé à une quatrième puissance.*

Si on avait, en effet,

$$\frac{n(n+1)}{2} = u^4,$$

on en conclurait, puisque les facteurs n et $n+1$ sont premiers entre eux, qu'ils sont égaux l'un à un bicarré et l'autre au double d'un bicarré et par suite on serait ramené à l'équation précédente.

Ce théorème démontré par Euler et Legendre (1) d'une autre manière, a été pour nous le point de départ d'un grand nombre de théorèmes nouveaux, sur lesquels nous reviendrons plus loin.

(1) LEGENDRE. — *Théorie des nombres*. T. II. p. 7.

§ IV. — DES ÉQUATIONS $4v^4 - u^4 = 3W^2$ et $9z^4 - w^4 = 8V^2$.

Les équations du paragraphe précédent sont, je crois, les seules équations biquadratiques dont on ait donné jusqu'à présent une solution complète ; je vais faire voir comment il est possible de résoudre d'une manière analogue les équations proposées et un certain nombre de celles qui suivront.

Ces deux équations se ramènent, l'une et l'autre, au système des deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} 2v^2 - u^2 = w^2. \\ 2v^2 + u^2 = 3z^2. \end{cases}$$

et l'on a, en même temps

$$W = wz, \text{ et } V = uv.$$

Ce système a d'abord une solution immédiate dans laquelle les inconnues sont toutes égales à l'unité prise positivement ou négativement. On tire d'ailleurs de la première équation de ce système

$$\begin{aligned} v &= a^2 + b^2, \\ u &= a^2 - b^2 + 2ab, \\ w &= a^2 - b^2 - 2ab. \end{aligned}$$

et en portant ces valeurs dans la seconde équation, on obtient en faisant $b = 3b'$, l'équation

$$(a^2 + 9b'^2)^2 + 4ab'(a^2 - 9b'^2) = z^2,$$

ou en développant

$$a^4 + 4a^3b' + 18a^2b'^2 - 36ab'^3 + 81b'^4 = z^2,$$

équation que nous avons traitée plus haut par la méthode de Fermat, et qui donne d'abord

$$v = 37, \quad w = 47,$$
$$u = 23, \quad z = 33,$$

puis

$$\begin{aligned} v &= 2\ 53642\ 20918\ 55129, \\ u &= 3\ 58647\ 03316\ 69969, \\ w &= \quad 6406\ 72783\ 29889, \\ z &= 9.45\ 97777.11.64\ 33883, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Pour résoudre complètement cette équation, on pose

$$a^2 - 2ab' + 3b'^2 = c,$$
$$a^2 + 6ab' + 27b'^2 = d,$$

on obtient

$$3c + d = 4v, \quad 3c - d = 2w, \quad cd = z^2,$$

et par suite

$$2v + w = 3c, \quad 2v - w = d;$$

d'où on tire, puisque v et w sont supposés premiers entre eux et sont positifs

$$c = z_1{}^2 \text{ et } d = z_2{}^2,$$

et ainsi

$$(a - b')^2 + 2b'^2 = z_1{}^2,$$
$$(a + 3b')^2 + 2(3b')^2 = z_2{}^2.$$

La première de ces deux équations nous donne

$$a - b' = \pm (r^2 - 2s^2), \quad b' = 2rs,$$

et la seconde

$$a + 3b' = \pm (r'^2 - 2s'^2), \quad 3b' = 2r's'.$$

Il nous reste à identifier les valeurs de a et de b' tirées de chacune de ces équations. En prenant le signe + dans la valeur de $a - b'$ et le signe — dans celle de $a + 3b'$, on a

$$r^2 + 2rs - 2s^2 = 2s'^2 - 2r's' - r'^2,$$
$$3rs = r's',$$

et en posant

$$r' = 3mr \text{ et } s = ms',$$

on obtient, en éliminant r' et s entre les équations précédentes une équation quadratique en m qui donne sous le radical, puisque la valeur de m doit être rationnelle

$$24r^2s'^2 - 9r^4 - 4s'^4 = \mathrm{H}^2,$$

équation impossible suivant le module 3. En prenant au contraire le signe — dans la valeur de $a - b'$ et le signe + dans celle de $a + 3b'$, on obtient encore, en changeant les signes de s et de s', les deux équations précédentes.

Mais si nous prenons en même temps le signe + ou le signe — dans les valeurs de $a - b'$ et de $a + 3b'$, nous arrivons aux deux équations

$$r^2 + 2rs - 2s^2 = r'^2 - 2r's' - 2s'^2,$$
$$3rs = r's',$$

qui donnent comme ci-dessus

$$m = \frac{-4rs' \pm \mathrm{K}}{9r^2 + 2s'^2}.$$

l'indéterminée K satisfaisant à l'équation

$$(3r^2 + 6s'^2)^2 - 32s'^4 = K^2.$$

On déduit aisément de cette équation

$$3r^2 + 6s'^2 \pm K = 2p^4.$$
$$3r^2 + 6s'^2 \mp K = (2q)^4.$$
$$s' = pq.$$

p et q désignant deux nombres premiers entre eux, et par voie d'addition et de soustraction, il vient

$$p^4 + 8q^4 = 3r^2 + 6s'^2.$$
$$p^4 - 8q^4 = \pm K:$$

la première des équations précédentes peut d'ailleurs s'écrire

$$(p^2 - 3q^2)^2 - q^4 = 3r^2,$$

et donne, par la décomposition en facteurs

$$p^2 - 2q^2 = \pm g^2,$$
$$p^2 - 4q^2 = \pm 3h^2.$$
$$r = gh.$$

En prenant ensemble les signes supérieurs, on obtient l'équation

$$p^2 - 4q^2 = 3h^2,$$

impossible suivant le module 4 ; en prenant au contraire les signes inférieurs, on obtient le système

$$\begin{cases} 2q^2 - g^2 = p^2, \\ 2q^2 + g^2 = 3h^2, \end{cases}$$

entièrement identique au système proposé, et par conséquent ce système est complètement résolu.

Ainsi, en résumé, d'une première solution u, v, w, z du système

$$2v^2 - u^2 = w^2,$$
$$2v^2 + u^2 = 3z^2,$$

on obtiendra deux nouvelles solutions que nous désignerons par des lettres majuscules à l'aide des formules

$$U = (r^2 + 8rs - 2s^2)^2 - 72r^2s^2,$$
$$V = (r^2 + 2rs - 2s^2)^2 + 36r^2s^2,$$
$$W = (r^2 - 4rs - 2s^2)^2 - 72r^2s^2,$$
$$Z = (r^2 + 2s^2)(2r^2 + 9s^2),$$

dans lesquelles

$$r = uz(2v^2w^2 + 9u^2z^2),$$
$$s = vw[4uvwz \pm (w^4 - 8u^4)].$$

Et ainsi la solution immédiate $u = v = w = z = 1$ donne la nouvelle solution

$$u = 52487, \quad v = 40573, \quad w = 23183,$$
$$z_1 = 139, \quad z_2 = 323,$$

et ainsi de suite.

Nous appliquerons encore cette méthode au système particulier que l'on obtient en supposant, dans le système (1), l'inconnue w égale à un carré. En remplaçant w par w^2, on a ainsi

$$a^2 - 6ab' - 9b'^2 = w^2,$$

car on ne peut supposer le second membre égal à $-w^2$, l'équation étant alors impossible suivant le module 3. On tire de cette équation

$$a - 3b' = \pm(e^2 + 2f^2),$$
$$3b' = 2ef,$$

et en identifiant les valeurs de a et b' tirées des équations précédentes, avec celles que nous avons obtenues ci-dessus, nous avons, en prenant en même temps dans ces équations le signe supérieur +

$$e^2 + 2ef + 2f^2 = r^2 + 2rs - 2s^2 ,$$
$$ef = 3\,rs.$$

Posons encore

$$e = 3mr \text{ et } s = mf,$$

nous arrivons à l'équation

$$m^2 (9r^2 + 2f^2) - 4rfm + 2f^2 - r^2 = o.$$

et en égalant à un carré l'expression placée sous le radical dans la valeur de m qui doit être rationnelle

$$9r^4 - 12r^2 f^2 - 4f^4 = R^2 ,$$

équation impossible suivant le module 3, excepté pour $r = o$ ce qui donne $u = 1$.

Si nous prenons au contraire le signe — dans la valeur de $a - b'$, nous obtenons

$$r^2 + 2f^2 = 2s^2 + 4rs - r^2 ,$$

et par suite, comme ci-dessus

$$4f^4 - 12f^2 r^2 - 9r^4 = R^2 ,$$

équation impossible suivant le module 4, en excepté tant la solution $f = o$ qui donne encore $u = 1$.

Il résulte de cette discussion que les équations

$$4v^4 - u^4 = 3w^4, \text{ et } 9z^4 - w^4 = 8v^4,$$

n'ont en dehors de la solution immédiate

$$u = v = w = z = 1,$$

aucune autre solution en nombres entiers. Il en est de même de presque toutes les équations biquadratiques que j'ai étudiées, et ainsi encore en particulier de l'équation

$$x^4 - 5y^4 = z^4,$$

satisfaite pour les seules valeurs

$$x = 3, \quad y = 2, \quad z = 1;$$

ce résultat est bien différent de celui qu'on obtient pour les équations cubiques à trois termes qui, comme nous l'avons vu, ont une série indéfinie de solutions, dans les cas où elles sont possibles.

Cependant il n'en est pas toujours ainsi, et par exemple l'équation

$$3x^4 + 13y^4 = z^4,$$

a les deux solutions

$$x = 1, \; y = 1, \; z = 2,$$
$$x' = 3, \; y' = 1, \; z' = 4;$$

mais nous reviendrons plus tard sur cette question.

§ V. Des Equations $v^4 - 36u^4 = W^2$ et $z^4 - w^4 = 24V^2$.

Ces équations conduisent toutes deux au système

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} v^2 - 6u^2 = w^2, \\ v^2 + 6u^2 = z^2, \end{array} \right.$$

et l'on a en même temps

$$W = wz \quad \text{et} \quad V = uv.$$

On tire de la seconde équation, en supposant $z + v$ divisible par 3, ce qui ne nuit pas à la généralité de la solution, si on suppose que v peut être négatif

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 2\,rs, \\ v = 3\,r^2 - 2\,s^2, \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 2\,rs, \\ v = 6\,r^2 - s^2; \end{array} \right.$$

en portant ces valeurs qui résolvent la seconde des équations du système dans la première, on obtient entre r et s l'une des conditions suivantes

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} 9r^4 - 36r^2 s^2 + 4s^4 = w^2, \\ 36r^4 - 36r^2 s^2 + s^4 = w^2. \end{array} \right.$$

La seconde de ces équations peut se mettre sous la forme

$$(6r^2 - 3\,s^2)^2 - s^4 = w^2,$$

et nous donne

$$(3)\quad \begin{cases} 6r^2 - 3s^2 \pm w = \pm 2a^4, \\ 6r^2 - 3s^2 \mp w = \pm 4b^4, \\ \qquad\qquad\qquad s = ab\,; \end{cases}$$

si nous prenons d'abord ensemble les signes inférieurs dans les seconds membres des équations précédentes, nous obtenons

$$(a^2 - b^2)(a^2 - 2b^2) = -6r^2,$$

et par suite

$$a^2 - b^2 = 6f^2,$$
$$a^2 - 2b^2 = -e^2,$$

d'où on tire

$$(4)\quad \begin{cases} b^2 - 6f^2 = e^2, \\ b^2 + 6f^2 = a^2. \end{cases}$$

système identique au système proposé. Ainsi d'une solution quelconque u, v, w, z du système (1), on déduit une série indéfinie de solutions nouvelles à l'aide des formules

$$(A)\quad \begin{cases} U = 2uvwz, \\ V = 6u^2w^2 - v^2z^2, \\ Z = 6u^2w^2 + v^2z^2, \\ W = z^4 - 2v^4. \end{cases}$$

Par exemple, on déduit de la solution immédiate

$$v = 5,\ u = 2,\quad w = 1,\quad z = 7,$$

la solution nouvelle

$$V = 1201,\quad U = 140.\quad W = 1151,\quad Z = 1241,$$

et ainsi de suite

En prenant, au contraire, les signes supérieurs dans les équations (3), nous obtenons

$$a^4 + 3a^2b^2 + 2b^4 = 6r^2,$$

équation qu'on peut écrire sous la forme suivante

$$(a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2) = 6r^2,$$

et qui donne

$$a^2 + b^2 = 2e^2,$$
$$a^2 + 2b^2 = 3f^2,$$
$$r = ef.$$

Mais on tire de la première des équations précédentes

$$a = g^2 - h^2 + 2gh,$$
$$b = g^2 - h^2 - 2gh,$$
$$e = g^2 + h^2,$$

et en portant ces valeurs dans la seconde, et faisant $h = 3h'$, on obtient

$$(6) \quad (g^2 + 9h'^2)^2 - 4gh'(g^2 - 9h'^2) = f^2.$$

équation que nous avons complètement résolue dans le paragraphe précédent, avec cette différence que g et h' sont remplacés par a et $-b'$. On voit donc que la résolution des équations proposées est intimement liée à celle des équations du paragraphe précédent ; mais on peut aussi, comme nous allons le montrer, ramener la résolution de l'équation (6) à celle du système proposé. Cette équation peut, en effet, s'écrire sous la forme

$$[g^2 - 2gh' - 9h'^2]^2 + 32g^2h'^2 = f^2,$$

et donne

$$f \pm (g^2 - 2gh' - 9h'^2) = \pm 2l^2,$$
$$f \mp (g^2 - 2gh' - 9h'^2) = \pm 16n^2,$$

et par suite

$$g^2 - 2gh' - 9h'^2 = \pm (l^2 - 8n^2),$$
$$gh' = ln;$$

nous pouvons donc poser, m désignant un nombre rationnel

$$l = mg \text{ et } h' = mn,$$

et en déduire les équations quadratiques en m

$$g^2 - 2gmn - 9m^2n^2 = \pm (m^2g^2 - 8n^2);$$

si nous exprimons que la valeur de m tirée de ces équations est rationnelle, nous obtenons avec le signe inférieur, l'équation de condition

$$18g^2n^2 - g^4 - 72n^3 = \mathrm{H}^2,$$

impossible suivant le module 3, et avec le signe supérieur, nous obtenons

$$m = \frac{gn \pm \mathrm{H}}{g^2 + 9n^2},$$

avec l'équation de condition

$$g^4 + 18g^2n^2 + 72n^4 = \mathrm{H}^2,$$

que nous pouvons écrire sous la forme

$$(g^2 + 9n^2)^2 - 9n^4 = \mathrm{H}^2,$$

et qui nous donne

$$g^2 + 12n^2 = p^2,$$
$$g^2 + 6n^2 = q^2,$$

et par suite, nous conduit au système

$$q^2 - 6n^2 = g^2,$$
$$q^2 + 6n^2 = p^2.$$

identique au système proposé.

Par conséquent, d'une solution quelconque u, v, w, z du système (1), on déduira deux solutions nouvelles à l'aide des formules

$$\text{(B)} \qquad U = 2rs. \qquad V = 6r^2 - s^2. \qquad Z = 6r^2 + s^2.$$

dans lesquelles on a

$$\text{(B')} \quad \begin{cases} r = (n^2w^2 + 9m^2u^2)(m^2w^2 + 8n^2u^2), \\ s = (n^2w^2 - 9m^2u^2)^2 - 36m^2n^2u^2w^2, \\ m = uw \pm vz, \\ n = w^2 + 9u^2, \end{cases}$$

et ainsi la solution immédiate $u = 2$, $v = 5$, $w = 1$, $z = 7$, donne en prenant dans la valeur de m le signe supérieur

$$U = 26\ 39802, \qquad V = 77\ 76485.$$
$$Z = 101\ 13607, \qquad W = 43\ 19999.$$

Nous n'avons jusqu'à présent considéré que la seconde des équations (2) ; nous allons chercher ce que peut donner la première de ces équations. On peut la mettre sous la forme

$$(3r^2 - 6s^2)^2 = w^2 + 2(2s)^4,$$

et on déduit, par la décomposition en facteurs

$$3r^2 - 6s^2 \pm w = \pm 2a^4,$$
$$3r^2 - 6s^2 \mp w = \pm(2b)^4,$$
$$s = ab.$$

et par suite, en prenant ensemble les signes supérieurs ou inférieurs du second membre, une équation impossible suivant le module 8 ; on n'a donc aucune solution nouvelle pour le système proposé. Les formules (A) et (B) résolvent donc complètement les équations proposées dans ce paragraphe.

Il résulte d'ailleurs surabondamment de ce qui précède le théorème suivant :

Les équations

$$x^4 - y^4 = 24z^4 \quad et \quad x^4 - 36y^4 = z^4 ,$$

n'ont aucune solution en nombres rationnels.

§ VI. — DE L'ÉQUATION $3x^4 - y^4 = 2z^2$.

Puisque dans cette équation x et y sont impairs, on peut poser

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 = p^2 + 2(p - q)^2, \\ y^2 = 3p^2 - 2q^2. \end{cases}$$

On tire de la première équation

$$\begin{aligned} x + p &= 2r^2, \\ x - p &= (2s)^2, \\ p - q &= 2rs, \end{aligned}$$

et, par suite

$$\begin{aligned} x &= r^2 + 2s^2, \\ p &= r^2 - 2s^2, \\ q &= r^2 - 2rs - 2s^2, \end{aligned}$$

et ces valeurs, déduites du système (1) sont générales, en laissant aux quantités p, q, r et s des signes indéterminés. En portant ces valeurs qui résolvent la première équation du système primitif dans la seconde équation de ce système, on obtient

$$r^4 + 8r^3s - 12r^2s^2 - 16rs^3 + 4s^4 = y^2,$$

équation qui rentre dans la seconde forme étudiée par Fermat. On peut donc se servir de la méthode qu'il a donnée pour trouver une série indéfinie de solutions, mais on peut aussi résoudre généralement

cette équation de la manière suivante. On peut, en effet, l'écrire sous la forme

$$(r^2 + 4rs - 2s^2)^2 - 24r^2s^2 = y^2,$$

et par suite, en admettant les valeurs négatives de y

$$(2) \quad \begin{cases} r^2 + 4rs - 2s^2 + y = \pm 4u^2, \\ r^2 + 4rs - 2s^2 - y = \pm 6v^2, \end{cases}$$

ou encore

$$(3) \quad \begin{cases} r^2 + 4rs - 2s^2 + y = \pm 12u^2, \\ r^2 + 4rs - 2s^2 - y = \pm 2v^2. \end{cases}$$

Le système (2) nous donne, en prenant les signes supérieurs

$$r^2 + 4rs - 2s^2 = 2u^2 + 3v^2,$$
$$rs = uv,$$

et en posant encore

$$u = mr \text{ et } s = mv,$$

nous obtenons, par l'élimination de u et de s, l'équation

$$2m^2(r^2 + v^2) - 4rvm + 3v^2 - r^2 = o,$$

d'où on tire, puisque la valeur de m doit être rationnelle

$$2r^4 - 6v^4 = V^2;$$

équation impossible suivant le module 3.

Le système (3) donne, en prenant encore les signes supérieurs

$$r^2 + 4rs - 2s^2 = 6u^2 + v^2,$$
$$rs = uv,$$

et par suite, comme précédemment

$$2m^2(3r^2+v^2)-4rvm+v^2-r^2=o,$$

et

$$3r^4-v^4=2U^2,$$

équation identique avec la proposée. Mais cette équation a pour solution immédiate

$$r=v=U=\pm 1;$$

on en déduit ainsi

$$x_1=3,\quad y_1=1,\quad z_1=11,$$

comme seconde solution que donne aussi la méthode de Fermat. En général, de chaque solution x, y, z de la proposée, on déduira deux nouvelles solutions, à l'aide des formules

$$\begin{aligned}
X&=x^2+2m^2y^2,\\
Y&=6m^2x^2-y^2,\\
Z&=12m^2x^2y^2-[x^2-2mxy-2m^2y^2]^2,
\end{aligned}$$

et l'on a pour m la valeur suivante que l'on réduira d'abord à sa plus simple expression avant d'effectuer les calculs

$$m=\frac{xy\pm z}{3x^2+y^2};$$

on déduit ainsi de la solution précédente, les deux solutions

$$\begin{aligned}
x_2&=19,\quad y_2=25,\quad z_2=13,\\
x_3&=449,\quad y_3=167,\quad z_3=246\ 121,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Le système (2) donne maintenant, en prenant les signes inférieurs

$$2s^2 - 4rs - r^2 = 2u^2 + 3v^2,$$
$$rs = uv,$$

d'où l'on conclut comme ci-dessus

$$m = \frac{rv \pm U}{v^2 - r^2},$$

avec l'équation de condition

$$3v^4 - r^4 = 2U^2,$$

et d'une solution x, y, z de la proposée, on obtiendra encore deux solutions nouvelles à l'aide des formules

$$X = y^2 + 2m^2x^2,$$
$$Y = 2m^2y^2 - 3x^2,$$
$$Z = 12m^2x^2y^2 - (y^2 - 2mxy - 2m^2x^2)^2,$$

et l'on a, en même temps

$$m = \frac{xy \pm z}{x^2 - y^2},$$

mais ces formules reproduisent les mêmes solutions que précédemment.

Le système (3) donne enfin, en prenant les signes inférieurs

$$2s^2 - 4rs - r^2 = 6u^2 + v^2,$$
$$rs = uv,$$

et conduit à l'équation impossible

$$v^2 - 3r^2 = 2U^2.$$

Il est vrai que nous n'avons point encore résolu

complètement l'équation proposée ; mais on tire de la première équation du système précédent

$$\begin{aligned} x &= r^2 + 2s^2 , \\ q &= r^2 + 4rs - 2s^2 , \\ p &= 2rs, \end{aligned}$$

et en transportant ces valeurs dans la seconde équation, on retrouve l'équation à laquelle conduit le système (1). On ne trouvera donc pas d'autres solutions que celles qui ont été déjà trouvées.

Il est d'ailleurs facile de voir par la méthode des facteurs que les équations

$$\begin{aligned} 4x^4 - 3y^4 &= z^2 , \\ x^4 + 3y^4 &= z^2 , \\ x^4 - 12y^4 &= z^2 , \end{aligned}$$

se ramènent encore à l'équation proposée.

§ VII. — DE L'ÉQUATION $2x^4 - 3y^4 = -z^2$.

On a d'abord

$$(1)\quad \begin{cases} y^2 = m^2 + 2(m-n)^2, \\ x^2 = n^2 - 3(m-n)^2, \end{cases}$$

et par suite, on tire de la première équation de ce système

$$(A)\quad \begin{cases} m = r^2 - 2s^2, \\ m - n = 2rs, \end{cases} \quad \text{ou} \quad (A')\quad \begin{cases} m = 2r^2 - s^2, \\ m - n = 2rs, \end{cases}$$

et de la seconde

$$(B)\quad \begin{cases} \pm 2n = 3r'^2 + s'^2, \\ m - n = r's', \end{cases} \quad \text{ou} \quad (B')\quad \begin{cases} \pm n = 3r'^2 + s'^2, \\ m - n = 2r's'. \end{cases}$$

L'identification des valeurs de m et de n tirées des systèmes (A) et (B') donne

$$r^2 - 2s^2 = 2rs \pm (3r'^2 + s'^2),$$
$$rs = r's',$$

et en posant encore

$$r' = mr, \quad s = ms';$$

on obtient avec le signe + la valeur

$$m = \frac{-rs' \pm U}{3r^2 + 2s'^2},$$

avec l'équation de condition

$$3r^4 - 2s'^4 = U^2,$$

qui est précisément l'équation proposée, et avec le signe — on obtient une équation impossible suivant le module 3.

Ainsi donc en désignant par x, y, z, une première solution de l'équation proposée, on obtient une série indéfinie de solutions nouvelles à l'aide des formules

$$X = 3y^2(xy \pm z)^2 - x^2(3y^2 + 2x^2)^2,$$
$$Y = y^2(3y^2 + 2x^2)^2 + 2x^2(xy \pm z)^2,$$

et ainsi la solution immédiate,

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1,$$

donne

$$x_1 = 13, \quad y_1 = 33, \quad z_1 = 1871,$$

puis

$$x_2 = 8843, \quad y_2 = 28577, \quad z_2 = 14101\ 40689,$$

et ainsi de suite.

L'identification des valeurs de m et de n tirées des systèmes (A) et (B) donne

$$2(r^2 - 2s^2) = 2r's' \pm (3r'^2 + s'^2).$$
$$2rs = r's',$$

et en posant

$$r' = 2mr \quad \text{et} \quad s = ms',$$

on obtient avec le signe + une équation du second degré en m qui donne sous le radical une équation impossible suivant le module 3, et avec le signe —, la valeur

$$m = \frac{-rs' \pm U}{2(s'^2 - 3r^2)},$$

avec l'équation de condition

$$s'^4 - 6r^4 = U^2 .$$

Avant de traiter cette équation, nous ferons remarquer que l'identification des valeurs de m et de n tirées des systèmes (A') et (B) ou (A') et (B') ne conduit point à des solutions nouvelles. D'ailleurs le système (1) ne résout pas complètement l'équation proposée, mais en considérant le système analogue qui complète la solution on ne trouve rien de nouveau. Nous prévenons dès maintenant le lecteur, que, dans ce qui va suivre, nous avons souvent omis avec intention les équations et les systèmes d'équations dont l'impossibilité se manifeste immédiatement par la considération du module 3 ou du module 8.

L'équation

$$x^4 - 6y^4 = z^2 .$$

donne par la décomposition en facteurs

$$\begin{aligned} x^2 \mp z &= 3(2p)^4, \\ x^2 \pm z &= 2q^4, \\ y &= 2pq, \end{aligned}$$

et par suite

$$q^4 + 24p^4 = x^2 ;$$

mais cette équation donne elle-même lieu aux deux décompositions suivantes

$$\begin{cases} x \mp q^2 = 6r^4, \\ x \pm q^2 = 4s^4, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \mp q^2 = 12r^4, \\ x \pm q^2 = 2s^4, \end{cases}$$

conduisant aux deux équations

$$3r^4 - 2s^4 = q^2, \quad \text{et} \quad 6r^4 - s^4 = -q^2,$$

La première est l'équation proposée dans ce paragraphe, et la solution immédiate donne

$$\begin{array}{lll} x_1 = 5, & y_1 = 2, & z_1 = 23, \\ x_2 = 721, & y_2 = 460, & z_2 = 39841, \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{array}$$

comme premières solutions de l'équation

$$x^4 - 6y^4 = z^2.$$

Et d'ailleurs les solutions de cette dernière ne donnent point, comme il est facile de le faire voir, de nouvelles solutions de l'équation proposée.

Nous avons ainsi résolu complètement dans ce paragraphe les équations

$$\begin{aligned} 3x^4 - 2y^4 &= z^2, \\ x^4 - 6y^4 &= z^2, \\ x^4 + 24y^4 &= z^2. \end{aligned}$$

§ VIII.— DES ÉQUATIONS $x^4+2y^4=3z^2$ ET $9x^4-8y^4=z^2$.

Puisque x et z sont impairs dans la première des équations proposées, on doit poser

$$z = p^2 + 2q^2 ,$$

et on a les deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 = (p - 2q)^2 - 6q^2 , \\ y^2 = (p + q)^2 - 3q^2 ; \end{cases}$$

de la première équation, on tire

$$(A) \begin{cases} x = 3r^2 - 2s^2, \\ p - 2q = 3r^2 + 2s^2, \\ q = 2rs, \end{cases} \text{ ou } (A_1) \begin{cases} x = 6r^2 - s^2, \\ p - 2q = 6r^2 + s^2, \\ q = 2rs, \end{cases}$$

et de la seconde

$$(B) \begin{cases} 2y = 3r'^2 - s'^2, \\ 2(p+q) = 3r'^2 + s'^2, \\ q = r's', \end{cases} \text{ ou } (B_1) \begin{cases} y = 3r'^2 - s'^2 , \\ p + q = 3r'^2 + s'^2 , \\ q = 2r's'. \end{cases}$$

L'identification des valeurs de p et de q déduites de chacun des systèmes précédents conduit, en suivant la marche que nous avons déjà employée si souvent, à la résolution de l'équation

$$18r^4 + s'^4 = U^2 ,$$

qui se ramène de deux manières différentes à la première des équations proposées.

On tire, en effet, par la décomposition en facteurs,

$$\begin{cases} U \pm s'^2 = \pm 2.9u^4, \\ U \mp s'^2 = \pm (2v)^4, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} U \pm s'^2 = \pm 9(2u)^4, \\ U \mp s'^2 = \pm 2v^4, \end{cases}$$

et en ne conservant que les équations possibles suivant le module 3, on obtient les deux équations

$$(2) \qquad 9u^4 - 8v^4 = s'^2, \quad \text{ou} \quad 72u^4 - v^4 = -s'^2.$$

La première de ces équations donne

$$\begin{aligned} 3u^2 \pm s' &= 2x_1{}^4, \\ 3u^2 \mp s' &= 4y_1{}^4, \\ v &= x_1 y_1, \end{aligned}$$

et par voie d'addition

$$3u^2 = x_1{}^4 + 2y_1{}^4,$$

et on est ainsi ramené à l'équation proposée. En conséquence, d'une solution x, y, z de l'équation

$$x^4 + 2y^4 = 3z^2,$$

on déduira deux solutions nouvelles X, Y, Z à l'aide des formules

$$\begin{aligned} X &= 24m^2x^2y^2z^2 - (x^4 - 2y^4)^2, \\ Y &= 12x^2y^2z^2 - m^2(x^4 - 2y^4)^2, \\ Z &= [12x^2y^2z^2 + m^2(x^4 - 2y^4)^2 - 4mxyz(x^4 - 2y^4)]^2 \\ &\qquad + 32m^2x^2y^2z^2(x^4 - 2y^4)^2. \end{aligned}$$

m étant donné par l'équation

$$m = \frac{6xyz(x^4 - 2y^4) \pm (9z^4 + 8x^4y^4)}{(x^4 - 2y^4)^2 - 24x^2y^2z^2},$$

et ainsi la solution immédiate $x = y = z = 1$, donne avec le signe inférieur dans la valeur de m

$$x = 23, \quad y = 11, \quad z = 321,$$

et avec le signe supérieur

$$x = 2375, \quad y = 6227, \quad z = 318\ 27137.$$

La seconde des équations (2) donne encore par la méthode de décomposition en facteurs, en ne conservant que les suppositions possibles suivant le module 8,

$$v^2 \pm s' = 2x_1{}^4,$$
$$v^2 \mp s' = 36y_1{}^4,$$
$$u = x_1 y_1 ,$$

et par suite

$$x_1{}^4 + 18y_1{}^4 = v^2 ,$$

et on se trouvera ramené une fois encore à l'équation proposée.

Il est d'ailleurs facile en examinant tous les cas de voir qu'on a ainsi résolu complètement les équations proposées et en même temps, les deux équations

$$x^4 + 18y^4 = z^2 ,$$
$$x^4 - 72y^4 = z^2 .$$

§ IX. — DE L'ÉQUATION $27x^4 - 2y^4 = z^2$.

On arrive facilement en posant

$$x = r^2 + 2s^2,$$

et par l'identification à l'équation

$$r^4 - 20r^3s - 12r^2s^2 + 40rs^3 + 4s^4 = y^2,$$

qui résout complètement la proposée.

Cette dernière équation peut s'écrire

$$(r^2 - 10rs - 2s^2)^2 - 108r^2s^2 = y^2,$$

et donne

$$r^2 - 10rs - 2s^2 \pm y = 54p^2,$$
$$r^2 - 10rs - 2s^2 \mp y = 2q^2,$$
$$pq = rs,$$

et par suite

$$r^2 - 10rs - 2s^2 = 27p^2 + q^2,$$

et en posant

$$r = mp \quad \text{et} \quad q = ms,$$

on obtient l'équation

$$m^2(p^2 - s^2) - 10mps = 2s^2 + 27p^2,$$

d'où on tire

$$m = \frac{5ps \pm U}{p^2 - s^2},$$

avec l'équation de condition

$$27p^4 - 2s^4 = U^2,$$

ce qui est précisément l'équation proposée, qui admet pour solution immédiate

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 5,$$

et on obtient ensuite à l'aide de celle-ci

$$x_1 = 1041, \quad y_1 = 1859, \quad z_1 = 27\ 96715,$$

et en général d'une première solution de l'équation proposée, on déduira une série indéfinie de solutions nouvelles à l'aide des formules

$$\begin{aligned} X &= (5xy \pm 2z)^2 y^2 + 2(x^2 - y^2)^2 x^2, \\ Y &= 27(x^2 - y^2)^2 y^2 - (5xy \pm 2z)^2 x^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Quant aux équations

$$\begin{aligned} x^4 - 54y^4 &= z^2, \\ x^4 + 216y^4 &= z^2, \end{aligned}$$

on voit immédiatement qu'elles se ramènent à l'équation proposée par la méthode de la décomposition en facteurs.

Remarque. — La première valeur de m déduite de la solution immédiate se présente sous une forme illusoire ; car le dénominateur s'annule ; on se sert alors de l'équation en m qui se ramène au premier degré et donne

$$m = -\frac{29}{10}.$$

§ X. — DES ÉQUATIONS $Ax^4 + By^4 = \pm Cz^2$.

Si dans l'équation proposée, on pose $x = mz$, et si on résout ensuite par rapport à z, on obtient une équation de condition en exprimant que la valeur de z doit être rationnelle, et on a ainsi à résoudre une nouvelle équation qui est la suivante, en prenant dans cette équation x, y, z comme indéterminées

$$C^2 x^4 - 4ABy^4 = z^2 ,$$

et cette équation donne de même successivement

$$x^4 + 4ABC\, y^4 = z^2 ,$$
$$x^4 - ABC^2 y^4 = z^2 ;$$

il est d'après cela facile de classer les équations biquadratiques de la forme proposée en groupes dans lesquels la résolution de l'une d'elles, donnera la résolution de toutes les équations du même groupe.

En nous bornant ici aux équations biquadratiques dans lesquelles les facteurs A, B, C ne contiennent que les facteurs 2 et 3, on obtiendra les groupes suivants :

Premier groupe.

$$4x^4 - y^4 = 3z^2 , \qquad x^4 - y^4 = 24z^2 ,$$
$$x^4 + 9y^4 = z^2 , \qquad x^4 + 36y^4 = z^2 ,$$
$$x^4 - 36y^4 = z^2 , \qquad 9x^4 - 8y^4 = z^2 ,$$

ces équations ont été résolues aux § IV et V.

Deuxième groupe.

$$3x^4 - y^4 = 2z^2, \qquad 4x^4 - 3y^4 = z^2,$$
$$x^4 + 3y^4 = z^2, \qquad x^4 - 12y^4 = z^2;$$

ces équations ont été résolues au § VI.

Troisième groupe.

$$3x^4 - 2y^4 = z^2,$$
$$x^4 + 24y^4 = z^2,$$
$$x^4 - 6y^4 = z^2.$$

ces équations ont été résolues au § VII.

Quatrième groupe.

$$x^4 + 2y^4 = 3z^2, \qquad 9x^4 - 8y^4 = z^2.$$
$$x^4 + 18y^4 = z^2, \qquad x^4 - 72y^4 = z^2,$$

ces équations ont été résolues au § VIII.

Cinquième groupe.

$$27x^4 - 2y^4 = z^2,$$
$$x^4 - 54y^4 = z^2,$$
$$x^4 + 216y^4 = z^2,$$

ces équations ont été résolues au § IX.

Les autres équations sont impossibles ; il en est de même de toutes les équations des formes considérées ici lorsqu'on y remplace z par z^2, en exceptant les solutions immédiates.

Nous ferons voir dans un prochain travail que toutes ces équations peuvent se ramener à la résolution d'une seule quelconque d'entre elles, et nous donnerons aussi la résolution d'équations biquadratiques comprises dans des formes beaucoup plus générales.

§ XI. — DE LA RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES.

Nous appliquerons la méthode que nous avons développée précédemment à la résolution de quelques problèmes qui se rapportent à l'arithmétique de Diophante.

PROBLÈME I. — *Trouver en nombres un triangle rectangle dont l'hypothénuse soit égale à un carré, ainsi que la somme ou la différence des côtés de l'angle droit.*

En désignant par $x^2 - y^2$, $2xy$ et $x^2 + y^2$ les trois côtés du triangle, on a les équations

$$x^2 + y^2 = z^2 ,$$
$$x^2 - y^2 + 2xy = u^2 ,$$

en laissant à x et y un signe indéterminé. De la première, on tire

$$x = r^2 - s^2 , \quad y = 2rs, \quad z = r^2 + s^2 ,$$

et en transportant ces valeurs dans la seconde équation, on obtient

$$r^4 + s^4 - 6r^2s^2 + 4rs\,(r^2 - s^2) = u^2 ,$$

équation qu'on peut écrire sous la forme

$$(r^2 + 2rs - s^2)^2 - 8r^2s^2 = u^2 .$$

et qui nous donne

$$r^2 + 2rs - s^2 \pm u = 2p^2,$$
$$r^2 + 2rs - s^2 \mp u = 4q^2,$$

et ainsi

$$r^2 + 2rs - s^2 = p^2 + 2q^2,$$
$$rs = pq,$$

et en posant encore

$$p = mr, \quad s = mq,$$

on obtient pour m la valeur

$$m = \frac{rq \pm U}{r^2 + q^2},$$

avec la condition

$$r^4 - 2q^4 = U^2,$$

équation que nous avons résolue complètement au § III.

On a ainsi les triangles rectangles

— 119, 120, 169,
25 36953, — 4 73304, 23 25625,
456 54860 27761, 10 61652 23520, 468 72986 10289,
. . . . . .

formés respectivement des nombres

5 et 12,
1517 et — 156,
21 50905 et 2 46792,
. . . . . .

les deux premiers sont tels que la différence des côtés de l'angle droit est un carré parfait ; et le troisième tel que la somme des côtés est un carré

parfait. C'est la plus petite solution en nombres entiers, ainsi que l'avait assuré Fermat dans une observation sur le *Traité des doubles égalités* de Bachet.

On peut arriver plus simplement à ce résultat en remarquant que si l'on appelle x, y, z^2 les côtés du triangle, on a

$$x + y = u^2,$$
$$x^2 + y^2 = z^4,$$

et par suite

$$2z^4 - u^4 = (x - y)^2;$$

équation que nous avons résolue ; mais la méthode précédente résout immédiatement ce second problème de Fermat :

Problème II. — *Trouver en nombres entiers, un triangle rectangle avec cette condition que le carré de la somme ou de la différence des côtés de l'angle droit, diminué du double du carré du plus petit côté fasse un carré.*

En appelant x, y, z les côtés, on a de suite

$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$(x - y)^2 - 2y^2 = u^2,$$

équations identiques à celles du problème précédent. Ainsi le triangle rectangle dont les côtés sont

$$1517, \quad 156, \quad 1525,$$

formés des nombres 39 et 2 satisfait à la question. Nous donnerons encore la solution complète du pro-

blème suivant, pour lequel Fermat n'a point indiqué la méthode générale.

Problème III. — *Trouver un triangle rectangle dont les côtés soient exprimés en nombres entiers, et dont la surface soit égale à six fois celle d'un carré, comme pour le triangle rectangle dont les côtés sont* 3, 4 *et* 5 (1).

Les côtés du triangles étant désignés par

$$r^2 - s^2, \quad 2rs, \quad r^2 + s^2,$$

on doit avoir

$$rs\,(r^2 - s^2) = \pm\, 6\, U^2,$$

d'où on tire l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes

$$r = 6u^2, \quad s = v^2, \quad r + s = z^2, \quad r - s = w^2,$$

ou

$$r = 3u^2, \quad s = v^2, \quad r + s = 4z^2, \quad r - s = 2w^2;$$

de cette dernière hypothèse, on déduit le système

$$2z^2 - w^2 = v^2,$$
$$2z^2 + w^2 = 3u^2,$$

que nous avons résolu complètement, et la solution immédiate donne le triangle dont les côtés sont

$$3, \quad 4, \quad 5,$$

tandis que la solution $v = 47$, $u = 33$ donne le triangle

(1) *Arithmétique de Diophante.* — Liv. V. Prob. VIII. — Observation de Fermat.

$$72\ 16803,\quad 28\ 96804,\quad 77\ 76485,$$

De même, la première hypothèse conduit au système

$$v^2 - 6u^2 = w^2\,,$$
$$v^2 + 6u^2 = z^2\,,$$

que nous avons aussi résolu complètement, et la solution $u = 2$, $v = 5$ donne le triangle

$$49,\quad 1200,\quad 1201,$$

dont la surface est égale à $6(70)^2$.

Une discussion analogue à la précédente, conduit d'ailleurs au théorème suivant qui complète celui de Fermat.

THÉORÈME. — *L'aire d'un triangle rectangle dont les côtés sont des nombres entiers ne peut être égale à un carré, ni au double ou au triple d'un carré.*

La méthode que nous avons indiquée s'applique encore à l'équation suivante

$$(1)\qquad x^4 - 4x^2y^2 + y^4 = z^2\,,$$

qu'on n'avait point encore résolue complètement, et qu'on déduit de l'énoncé du problème suivant :

PROBLÈME IV. — *Trouver trois carrés inégaux tels que la somme de deux quelconques d'entre eux diminuée du troisième, soit un carré parfait* (1).

(1) LEGENDRE. — *Théorie des Nombres*. T. II, p. 126.

Dans cette équation nous pouvons toujours supposer x impair et y pair, et nous en tirons

$$(x^2 - 2y^2)^2 - z^2 = 3y^4 ,$$

et par suite

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 \pm z = \pm 24r^4, \\ x^2 - 2y^2 \mp z = \pm 2s^4, \end{cases}$$

ou bien encore

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 \pm z = \pm 6r^4, \\ x^2 - 2y^2 \mp z = \pm 8s^4, \end{cases}$$

et nous avons en même temps $y = 2rs$. Si nous prenons les signes inférieurs dans le premier des systèmes précédents ou les signes supérieurs dans le second, nous obtenons les équations

$$x^2 = 8r^2s^2 - 12r^4 - s^4,$$
$$x^2 = 3r^4 + 8r^2s^2 + 4s^4,$$

impossibles suivant le module 4 ; il nous reste donc à résoudre en prenant les autres combinaisons de signes, les deux équations

$$(2) \qquad 12r^4 + 8r^2s^2 + s^4 = x^2 ,$$
$$(3) \qquad 3r^4 - 8r^2s^2 + 4s^4 = -x^2 .$$

Pour résoudre l'équation (2), nous l'écrivons sous la forme

$$(s^2 + 4r^2)^2 - x^2 = 4r^4,$$

et par suite, nous avons avec $r = uv$,

$$s^2 + 4r^2 \pm x = 2u^4,$$
$$s^2 + 4r^2 \mp x = 2v^4,$$

et nous en déduisons l'équation

$$s^2 = u^4 - 4u^2v^2 + v^4,$$

identique avec l'équation (1), et qui a pour solution immédiate

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1,$$

d'où on tire

$$x_1 = 15, \quad y_1 = 4, \quad z_1 = 191\ ;$$

et en général, d'une première solution x, y, z de l'équation proposée, on obtient une série indéfinie de solutions nouvelles à l'aide des formules

$$\text{(A)} \quad X = x^4 - y^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = 12x^4y^4 - z^2,$$

qu'on déduirait d'ailleurs de la méthode de Fermat.

Quant à l'équation (3), nous pourrons l'écrire

$$4(s^2 - r^2)^2 + x^2 = r^4,$$

et poser, par suite,

$$x = u^2 - v^2\ , \quad s^2 - r^2 = uv, \quad r^2 = u^2 + v^2.$$

Nous en déduisons le système

$$\begin{cases} s^2 = u^2 + v^2 + uv, \\ r^2 = u^2 + v^2\ , \end{cases}$$

mais nous tirons de la seconde

$$u = 2qp, \quad v = p^2 - q^2, \quad r = p^2 + q^2,$$

et en portant dans la précédente

$$p^4 + 2p^3q + 2p^2q^2 - 2pq^3 + q^4 = s^2\ ;$$

pour résoudre cette équation, nous la mettrons sous la forme

$$s^2 = (p^2 + pq - q^2)^2 + 3p^2q^2,$$

et comme u et v sont premiers entre eux, et u pair, nous pouvons supposer p pair et q impair, et poser

$$\begin{aligned} p^2 + pq - q^2 \pm s &= \pm 6g^2, \\ p^2 + pq - q^2 \mp s &= \mp 2h^2, \\ pq &= 2gh; \end{aligned}$$

il est d'ailleurs évident que nous pouvons nous dispenser des signes inférieurs, et nous obtenons avec les supérieurs,

$$p^2 - q^2 = 3g^2 - 2gh - h^2;$$

posons comme nous l'avons fait jusqu'ici

$$p = 2mg, \quad h = mq,$$

nous obtenons pour que la valeur de m soit rationnelle

$$q^4 + 8q^2g^2 + 12g^4 = U^2,$$

équation qui se ramène, ainsi que nous l'avons vu plus haut, à l'équation (1). Et ainsi, on obtiendra une série indéfinie de solutions nouvelles de l'équation proposée, à l'aide d'une première x, y, z par les formules

$$(B) \quad \begin{cases} X = 16m^2x^2y^2z^2 - (4m^2x^2y^2 - z^2)^2, \\ Y = 2(4m^2x^2y^2 + z^2)(3x^2y^2 + m^2z^2) \\ Z = 4(3x^2y^2 + m^2z^2)^4 + 3(4m^2x^2y^2 + z^2)^4 \end{cases}$$

dans lesquelles

$$m = \frac{-xyz \pm (x^4 - y^4)}{4x^2y^2 + z^2}$$

Les formules (A) et (B) résolvent complètement l'équation proposée.

CHAPITRE II.

De la sommation des Puissances semblables des x premiers nombres entiers.

§ I. — DES NOMBRES DE BERNOULLI.

On sait qu'il est facile de trouver, à l'aide de la formule du binôme de Newton, la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, en fonction des sommes des puissances semblables d'exposant inférieur. En prenant, pour plus de simplicité, la progression arithmétique représentée par la série des nombres entiers, on a

$$(x+1)^{m+1} = x^{m+1} + [m+1]_1\, x^m + [m+1]_2\, x^{m-1} + \ldots + 1,$$

formule dans laquelle $[m]_n$ représente le coefficient de rang $n+1$ dans le développement de la puissance m du binôme ; en y faisant successivement x égal à 1, 2, 3,... x, on trouve en additionnant toutes les égalités obtenues

$$(1)\quad (x+1)^{m+1} - 1 = [m+1]_1\, s_m + [m+1]_2\, s_{m-1} + \ldots + [m+1]_1\, s_1 + s_0,$$

formule dans laquelle s_m désigne la somme des $m^{ièmes}$ puissances des x premiers nombres entiers, et on a d'ailleurs $s_0 = x$.

Des deux développements de

$$(x+1)^m + (x-1)^m \quad \text{et} \quad (x+1)^m - (x-1)^m,$$

on déduira de même

$$(2)\quad (x+1)^m - x^m - 1 = 2([m]_2\, s_{m-2} + [m]_4 s_{m-4} + \ldots),$$
$$(3)\quad (x+1)^m - x^m - 1 = 2([m]_1\, s_{m-1} + [m]_3 s_{m-3} + \ldots),$$

Les formules (1), (2) et (3) permettent de calculer s_m quand on connaît s_{m-1}, $s_{m-2}, \ldots$; en prenant successivement pour m les valeurs 0, 1, 2, 3, ... ; on trouve ainsi

$$s_0 = x,$$
$$s_1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$
$$s_2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x,$$
$$s_3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2,$$
$$s_4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x,$$
$$s_5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2,$$
$$s_6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x,$$
$$s_7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2,$$
$$s_8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x,$$
$$s_9 = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{20}x^2,$$
$$s_{10} = \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{66}x,$$
$$s_{11} = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{6}x^6 - \frac{11}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^2,$$

.....

Avant d'exprimer la loi des coefficients de s_m, nous allons en indiquer quelques propriétés qui découlent des formules précédentes, et nous considérerons deux cas suivant que m est pair ou impair.

La formule (1) nous montre d'abord à l'aide des valeurs de s_o et de s_1, que s_m est toujours divisible par le produit $x(x+1)$, ainsi qu'on le voit, en substituant $x = o$ et $x = -1$ dans le premier membre.

La formule (2) nous donne, en supposant m pair et égal à $2i$,

$$(x+1)^{2i} - x^{2i} - 2x - 1 = 2([2i]_2\, s_{2i-2} + [2i]_4\, s_{2i-4} + \ldots + [2i]_2\, s_2);$$

mais le premier membre s'annule pour $x = -\frac{1}{2}$; donc s_{2i} est divisible par le produit $x(x+1)(2x+1)$ ou par s_2. La même formule nous donne au contraire en supposant m impair, et égal à $2i+1$,

$$(x+1)^{2i+1} - x^{2i-1} - (2i+1)\,x(x+1) - 1 = 2([2i+1]_2\, s^{2i-1} + \ldots + [2i+1]_3\, s_3),$$

et comme la dérivée du premier membre s'annule pour $x = o$ et pour $x = -1$, on en conclut que s_{2i+1} est divisible par le produit $x^2(x+1)^2$ ou par s_3. On a donc le théorème suivant (1).

Théorème. — *La somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des x premiers nombres entiers est divisible par la somme*

(1) Ce théorème que nous démontrons très-simplement et que nous compléterons plus loin se trouve énoncé par M. Prouhet dans la note VI du *Cours d'Analyse* de Sturm. — T. II, p. 375.

des carrés des x premiers nombres si m et pair, et par la somme des cubes des x premiers nombres si m est impair.

Les deux formules dont nous venons de nous servir pour la démonstration du théorème précédent conduisent immédiatement à une propriété remarquable de la fonction s_m. Les premiers membres de ces équations représentent en effet une fonction impaire de $x + \frac{1}{2}$ dans le cas de m pair et une fonction paire de $x + \frac{1}{2}$ dans le cas de m impair. On a donc encore :

THÉORÈME. — *La somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des x premiers nombres entiers, est une fonction paire ou impaire de $x + \frac{1}{2}$, suivant que m est impair ou pair.*

Enfin comme le premier membre de la première des formules considérées est égal au produit de $2i + 1$ par la dérivée du premier membre de la seconde, on en déduit la relation

$$\frac{ds_{2i+1}}{dx} = (2i + 1)\, s_{2i}.$$

On trouvera d'ailleurs à l'aide des formules suivantes

$$\frac{ds_{2i}}{dx} = 2i\, s_{2i-1} - (-1)^p\, Bp,$$

et ces deux formules permettent de calculer rapidement s_m par voie d'intégration en déterminant chaque fois la constante et de déduire à l'aide du théorème de Rolle, ce théorème important (1).

(1) J. BERTRAND. — *Traité de Calcul différentiel.*— T. I, p. 352.

THÉORÈME. — *Lorsque x varie entre -1 et 0 la fonction $s_{2i}(x)$ change une fois de signe, en s'annulant pour $x = -\frac{1}{2}$, et la fonction $s_{2i+1}(x)$ conserve toujours le même signe et atteint un maximum ou un minimum pour $x = -\frac{1}{2}$.*

On a pour expression générale de s_m en supposant m pair et égal à $2i$, la formule

$$(4)\quad (2i+1)s_{2i} = x^{2i+1} + \frac{2i+1}{2}x^{2i} + B_1[2i+1]_2 x^{2i-1} + \ldots - (-1)^r B_r [2i+1]_{2r} x^{2i-2r+1} + \ldots - (-1)^i B_i (2i+1)x,$$

dans laquelle $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_r, \ldots, B_i$, représentent des facteurs numériques que nous allons déterminer.

En supposant au contraire m impair et égal à $2i+1$, on a

$$(5)\quad (2i+2)s_{2i+1} = x^{2i+2} + \frac{2i+2}{2}x^{2i+1} + B_1[2i+2]_2 x^{2i} + \ldots - (-1)^r B_r [2i+2]_{2r} x^{2i-2r+2} + \ldots - (-1)^i B_i [2i+2]_2 x^2.$$

Les facteurs numériques $B_1, B_2, \ldots$ qui figurent dans les formules précédentes se retrouvent dans un grand nombre de questions d'analyse et sont connus sous le nom de *Nombres de Bernoulli*. On les détermine par la condition que la valeur de s_m doit être égale à l'unité pour $x = 1$, ce qui donne les deux formules

$$(6)\quad \begin{cases} i-\frac{1}{2} = B_1\,[2i+1]_2 - B_2\,[2i+1]_4 + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - (-1)^i\,B_i\,[2i+1], \\ i = B_1\,[2i+2]_2 - B_2\,[2i+2]_4 + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - (-1)^i\,B_i\,[2i+2]_2\,, \end{cases}$$

qui déterminent B_i si l'on connaît $B_1, B_2, \ldots B_{i-1}$. En faisant successivement $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ il vient, à l'aide de la seconde des formules (6), par exemple,

$$1 = \frac{4.3}{1.2}B_1\,,$$

$$2 = \frac{6.5}{1.2}B_1 - \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}B_2\,,$$

$$3 = \frac{8.7}{1.2}B_1 - \frac{8.7.6.5}{1.2\,3.4}B_2 + \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}B_3\,,$$

$$4 = \frac{10.9}{1.2}B_1 - \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}B_2 + \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6}B_3 - \frac{10.9\ldots3}{1.2\ldots8}B_4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on tire de là

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_2 = \frac{1}{30},\quad B_3 = \frac{1}{42},\quad B_4 = \frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{5}{66},$$

$$B_6 = \frac{691}{2730},\quad B_7 = \frac{7}{6},\quad B_8 = \frac{3617}{510},\quad B_9 = \frac{43867}{798},$$

$$B_{10} = \frac{174611}{330},\quad B_{11} = \frac{854513}{138},\quad B_{12} = \frac{236364091}{2730},$$

$$B_{13} = \frac{8553103}{6},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les formules (4) et (5) se démontrent aisément par induction à l'aide de la formule (1) en faisant voir : 1° que si pour une valeur déterminée de x elles sont vraies pour les sommes $s_{m-1}, s_{m-2}, \ldots s_1$,

elles sont encore vraies pour s_m; 2° que si, pour toute valeur déterminée de m, elles sont vraies pour toutes les valeurs 1, 2, 3, ..., x de x elles sont encore vraies pour cette dernière valeur de x augmentée de l'unité.

On peut encore trouver d'autres formules pour le calcul des nombres de Bernoulli, en se servant des propriétés de la fonction s_m. Puisque s_{2i+1} est divisible par $(x+1)^2$, on déduit que la dérivée de s_{2i+1} par rapport à x s'annule pour $x = -1$, mais on retrouve ainsi la seconde des formules (6); la subtitution de $x = -\frac{1}{2}$ dans la valeur de s_{2i} donne

$$(7) \qquad 2i = [2i+1]_2\, 2^2\, B_1 - [2i+1]_4\, 2^4\, B_2 + \ldots (-1)^i\, [2i+1]_{2i} 2^{2i} B_i\,,$$

équation conforme à celle donnée par Mr Serret à l'aide des développements en séries (1).

La substitution de $x = 2$ donne au contraire pour $m = 2i$,

$$(7) \quad \frac{2i+1}{2^{2i+1}} + \frac{2i-3}{4} = [2i+1]_2 \frac{1}{2^2} B_1 - [2i+2]_4 \frac{1}{2^4} B_2 + \ldots - (-1)^i\, [2i+1]^{2i} \frac{1}{2^{2i}} B_i\,;$$

et pour $m = 2i+1$,

$$(7_1) \quad \frac{2i+2}{2^{2i+2}} + \frac{2i-2}{4} = [2i+2]_2 \frac{1}{2^2} B_1 - [2i+2]_4 \frac{1}{2^4} B_2 + \ldots - (-1)^i\, [2i+2]_2 \frac{1}{2^{2i}} B_i\,;$$

(1) J. A. Serret. — *Traité de Trigonométrie*, 4e édition, p. 258 et suivantes.

On a d'ailleurs les formules connues

$$B_i = \frac{1.2....2i}{2^{2i-1}\pi^{2i}}\left[1 + \frac{1}{2^{2i}} + \frac{1}{3^{2i}} + \frac{1}{4^{2i}} + ...\right],$$

et

$$B_i = 2.\frac{1.2....2i}{2^{2i-1}\pi^{2i}}\left[1 + \frac{1}{3^{2i}} + \frac{1}{5^{2i}} + \frac{1}{7^{2i}} + ...\right],$$

qui montrent que la suite des nombres de Bernoulli d'abord décroissante, ne tarde pas à devenir indéfiniment croissante, et ces nombres sont tous positifs.

La première des formules (7) a été aussi donnée sous une forme un peu différente et par les développements en séries (1).

On peut d'ailleurs trouver une formule qui permet de calculer directement B_i sans passer par le calcul de B_1, B_2, ..., B_{i-1}. En effet, si dans la formule (5) on fait successivement x égal à 1, 2, 3, ... i, on obtient i équations qui permettent de calculer les i inconnues B_i, B_2, ... B_i. On voit que ces équations du premier degré appartiennent à une forme spéciale dont la solution a été donnée pour la première fois par Lagrange, et il sera facile d'en déduire B_i.

(1) J. A. Serret. — *Cours de calcul différentiel et intégral*. T. II, p. 219.

§ II. — DE QUELQUES NOUVELLES FORMULES DE SOMMATION.

Considérons la série de x quantités

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_p, \quad \ldots, \quad u_x.$$

et formons une table de multiplication en écrivant successivement les uns au-dessous des autres les produits des termes de cette série par

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_p, \quad \ldots, \quad u_x,$$

La somme des termes de la table de multiplication sera égale au carré de la somme des x quantités, ainsi qu'on le voit en sommant successivement chaque ligne horizontale. D'autre part, en prenant seulement les p premiers termes de la table qui se trouvent dans la $p^{ième}$ ligne horizontale et les $p - 1$ premiers qui se trouvent dans la $p^{ième}$ colonne verticale, on a pour expression de leur somme, en désignant par U_p la somme des p premières quantités ci-dessus

$$2u_p U_p - u_p{}^2,$$

et en faisant la somme de toutes ces expressions de $p = 1$ à $p = x$, on retrouve la somme de tous les termes de la table, ce qui donne la formule générale

$$(8) \qquad U_x{}^2 - 2 \mathbf{S} u_p U_p + \mathbf{S} u_p{}^2 = 0,$$

les $\mathbf{S}$ étant pris entre les limites $p = 1$ et $p = x$.

On peut, à l'aide de cette formule, trouver la somme de nouvelles séries en donnant à u_p des valeurs particulières, ainsi que je l'ai indiqué dans une note publiée précédemment (1). En posant

$$u_p = p(p+1)\ldots(p+a-1),$$

on a

$$U_x = \frac{x(x+1)\ldots(x+a)}{a+1},$$

et par suite

$$\mathbf{S}\,(2p+a-1)u_p{}^2 = (a+1)U_x{}^2.$$

Si on pose encore

$$u_p = \frac{1}{p(p+1)\ldots(p+a-1)},$$

on a

$$U_x = \frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{1.2\ldots(a-1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+a-1)}\right],$$

et par suite

$$\mathbf{S}\,(2p+a-1)\,u_p{}^2 = \frac{2}{1.2\ldots(a-1)}\,U_x - (a-1)\,U_x{}^2.$$

Formons maintenant une table de multiplication en écrivant successivement les uns au-dessous des autres les produits des termes de la série

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\ \ldots,\quad u_p,\ \ldots,\quad u_x,$$

par ceux de la série

$$v_1,\quad v_2,\quad v_3,\ \ldots,\quad v_p,\ \ldots,\quad v_x;$$

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques.* — Année 1870. P. 49.

en faisant la somme des termes de la table d'après chacun des deux procédés indiqués ci-dessus, on trouve la formule générale suivante

$$(9)\quad U_x \,.\, V_x - \mathsf{S}\,(u_p V_p + v_p U_p) + \mathsf{S}\, u_p v_p = o,$$

dans laquelle U_p et V_p désignent les sommes des p premiers termes des deux séries, et les S sont pris entre les limites $p = 1$ et $p = x$.

En supposant, par exemple,

$$u_p = \frac{1}{p\,(p+1)} \quad \text{et} \quad v_p = a^p\,;$$

on déduit

$$\mathsf{S}\,\frac{a^p}{p\,(p+1)}\,[1 + (a-1)p^2] = \frac{x}{x+1}\,a^{x+1}\,;$$

en faisant en particulier $a = \frac{3}{4}$ et en faisant augmenter x indéfiniment on trouve

$$2 = \frac{1.5}{3.4}.\frac{3}{4} + \frac{2.6}{4.5}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3.7}{5\,6}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots.$$

En effectuant le quotient de $1 + (a-1)\,p^2$ par $p\,(p+1)$, on a encore

$$\mathsf{S}\,\frac{1-(a-1)\,p}{p\,(p+1)}\,a^p = a - \frac{a^{x+1}}{x+1},$$

et pour le cas particulier de $a = 2$, on a ainsi

$$\frac{1}{2.3}2 + \frac{2}{3.4}.2^2 + \frac{3}{4.5}.2^3 + \ldots + \frac{p}{(p+1)(p+2)}2^p = \frac{2^{p+1}}{p+2} - 1,$$

et pour $a = \frac{1}{2}$

$$\frac{3}{1.2}\,\frac{1}{2} + \frac{4}{2.3}.\frac{1}{2^2} + \frac{5}{3.4}.\frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{p+2}{p\,(p+1)}\,\frac{1}{2^p} = 1 - \frac{1}{p+1}.\frac{1}{2^p}.$$

Les formules (8) et (9) sont susceptibles de généralisation et peuvent s'appliquer à un nombre quelconque de séries. En effet supposons qu'on ait d'abord disposé dans un plan, une table de multiplication à l'aide de deux séries de quantités

$$\begin{array}{lllllll} u_1, & u_2, & \ldots, & u_p, & \ldots, & u_x, \\ v_1, & v_2, & \ldots, & v_p, & \ldots, & v_x, \end{array}$$

ainsi qu'on l'a fait plus haut. Considérons une troisième série de quantités

$$w_1, \quad w_2, \quad \ldots, \quad w_p, \quad \ldots, \quad w_x,$$

et plaçons les unes au-dessous des autres les tables obtenues en multipliant tous les termes de la première table successivement par tous les termes de cette troisième série. Nous formerons ainsi un cube, et le compartiment ayant pour coordonnées p, q, r contiendra le produit $u_p v_q w_r$. Cela posé, considérons successivement les cubes ayant à partir de l'origine 1, 2, 3, ..., p unités de côté, et cherchons la somme des termes qu'il faut ajouter au $(p-1)^{ième}$ cube pour obtenir le $p^{ième}$. Cette somme est, en désignant par U_p, V_p et W_p les sommes des p premiers termes des séries précédentes

$$[u_p V_p + v_p U_p - u_p v_p] [W_p - w_p] + w_p U_p V_p ;$$

et puisque la somme des termes de toutes les tables est égale au produit des sommes des trois séries, on a la formule suivante dans laquelle les S sont pris entre les limites $p = 1$ et $p = x$

$$(10)\ U_x V_x W_x - \mathbf{S}\, u_p V_p W_p - \mathbf{S}\, v_p W_p U_p - \mathbf{S}\, w_p U_p V_p + \mathbf{S}\, u_p v_p W_p + \mathbf{S}\, v_p w_p U_p + \mathbf{S}\, w_p u_p V_p - \mathbf{S}\, u_p v_p w_p = o.$$

Dans le cas particulier où les trois séries sont identiques, on a

$$(11)\quad U_x{}^3 - 3\ \mathbf{S}\, u_p U_p{}^2 + 3\ \mathbf{S}\, u_p{}^2 U_p - \mathbf{S}\, u_p{}^3 = o,$$

formule dans laquelle les différents coefficients sont ceux du développement du cube du binôme $(a - b)$, et qu'on peut d'ailleurs vérifier par induction.

On a de même par une voie analogue la formule générale

$$(12)\ U_x{}^n - \frac{n}{1}\ \mathbf{S}\, u_p U_p{}^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\ \mathbf{S}\, u_p{}^2 U_p{}^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\ \mathbf{S}\, u_p{}^3 U_p{}^{n-3} + \ldots \pm \mathbf{S}\, u_p{}^n = o.$$

Si dans cette formule, on fait en particulier $u_p = 1$, on obtient

$$x^n - \frac{n}{1} s_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} s_{n-2} + \ldots + (-1)^n s_0 = o.$$

Si dans la formule (8) on suppose $u_p = p^m$, on trouve à l'aide des formules (4) et (5), la formule

$$(13)\qquad \frac{m+1}{2} s_m{}^2 = s_{2m+1} + B_1 [m+1]_2\, s_{2m-1} - B_2 [m+1]_4\, s_{2m-3} + \ldots$$

qui donne comme cas particuliers

$$s_1{}^2 = s_3 .$$

$$s_2{}^2 = \frac{2}{3} s_5 + \frac{1}{3} s_3 ,$$

$$s_3{}^2 = \frac{1}{2} s_7 + \frac{1}{2} s_5 ,$$

$$s_4{}^2 = \frac{2}{5} s_9 + \frac{2}{3} s_7 - \frac{1}{15} s_5 ,$$

. . . . . .

Si dans la formule (9) on suppose $u_p = p^m$, et $v_p = p^n$, on obtient encore

$$(14)\ s_m s_n = \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}\right) s_{m+n+1} + \frac{1}{2} B_1 (m+n) s_{m+n-1}$$
$$- \frac{1}{4} B_2 (m_3 + n_3) s_{m+n-3} + \frac{1}{6} B_4 (m_5 + n_5) s_{m+n-5} - \ldots$$

Cette dernière équation nous fait voir : 1° en supposant m et n de même parité que s_{2i+1} est algébriquement divisible par $s_1{}^2$ et que le quotient est une fonction entière de s_1 ; 2° en supposant m et n de parité différente, que s_{2i} est algébriquement divisible par s_2 et que le quotient est encore une fonction entière de s_1. Ces propriétés permettent de déduire des formules qui facilitent le calcul des sommes s. En désignant par q_{2i+1} et par q_{2i} les quotients de s_{2i+1} par $s_1{}^2$ et de s_{2i} par s_2 et faisant successivement $n = 1$ et $n = 2$ dans la formule (11), on obtient en posant $y = 2 s_1 = x(x+1)$

$$(15)\quad (i+1) y \cdot q_{2i+1} = (i+2) q_{2i+3} + B_1 [2i+2]_2 q_{2i+1}$$
$$+ \ldots - (-1)^i B_i [2i+2]_{2i},$$

$$(16)\quad \frac{i+1}{2} y^2 q_{2i+1} = \left(\frac{2i+5}{3}\right) q_{2i+4} + B_1 [2i+2]_2 q_{2i+2}$$
$$+ \ldots - (-1)^i B_i [2i+2]_{2i}.$$

Ces deux formules donnent successivement pour $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ les équations suivantes :

$$q_3 = 1,$$
$$q_5 = \frac{2}{3} y - \frac{1}{3},$$
$$q_7 = \frac{1}{2} y^2 - \frac{2}{3} y + \frac{1}{3},$$
$$q_9 = \frac{2}{5} y^3 - y^2 + \frac{6}{5} y - \frac{3}{5},$$

et

$$3\, q_2 = 3,$$
$$5\, q_4 = 3y - 1,$$
$$7\, q_6 = 3y^2 - 3y + 1,$$
$$9\, q_8 = 3y^3 - 6y^2 + \frac{27}{5} y - \frac{9}{5},$$
$$11\, q_{10} = 3y^4 - 10y^3 + 17y^2 - 15y + 5,$$

. . . . . .

Les coefficients des diverses puissances de y sont alternativement positifs et négatifs, comme cela résulte de la loi de formation. On vérifie d'ailleurs ces formules en faisant $y = 2$ et on obtient pour q la valeur 1.

Il serait facile encore en appliquant les formules (10) et (11) d'exprimer $s_m\, s_n\, s_p$ et $s_m{}^3$ en fonction linéaire des sommes s et de généraliser ces résultats. On retrouverait ainsi comme cas particuliers les formules

$$4\, s_1{}^3 = 3s_5 + s_3\,,$$
$$12\, s_2{}^3 = 16s_6 - 5s_4 + s_2\,,$$

. . . . . .

qui seraient les deux premières d'une série de formules analogues et qui ont été indiquées par M. Edouard Amigues (1). On trouverait d'ailleurs à l'aide de la formule générale (12) le développement de $s_m{}^p$ en fonction linéaire des sommes s.

DE LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES x PREMIERS NOMBRES IMPAIRS.

En désignant par t_m la somme des $m^{ièmes}$ puissances des x premiers nombres impairs, on déduit du développement de $(2x-1)^m$ la formule

$$t_m = 2^m s_m - m.2^{m-1} s_{m-1} + [m]_2 s_{m-2} + \ldots - (-1)^m s_0.$$

On peut aussi, au lieu d'exprimer t_m en fonction des sommes s_m, exprimer t_m en fonction des sommes $t_{m-1}, t_{m-2}, \ldots$ en suivant la marche adoptée dans le § I, et on obtient les formules suivantes analogues aux formules (4) et (5)

$$(2i+1)\, t^{2i} = \tfrac{1}{2}\,(2x)^{2i+1} - C_1\,[2i+1]_2\,(2x)^{2i-1} + \ldots - (-1)^i\, C_i [2i+1]\,(2x),$$

$$(2i+2)\, t_{2i+1} = \tfrac{1}{2}\,(2x)^{2i+2} - C_1\,[2i+2]_2\,(2x)^{2i} + \ldots - (-1)^i\, C_i\,[2i+2]_2\,(2x)^2,$$

et les facteurs numériques C_i sont déterminés en remarquant que t_{2i} et t_{2i+1} sont égaux à l'unité pour $x=1$, et que t_{2i} s'annule pour $2x = \pm 1$, et ainsi on a les trois formules

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques.* — Année 1871, p. 81 et 117.

$$2i+1 = 2^{2i} - C_1\,[2i+1]_2\,2^{2i-1} + \ldots - (-1)^i C_i\,[2i+1].2,$$
$$2i+2 = 2^{2i+1} - C_1\,[2i+2]_2\,2^{2i} + \ldots - (-1)^i C_i\,[2i+2]_2\,.2^2,$$
$$0 = \tfrac{1}{2} - C_1[2i+1]_2 + C_2\,[2i+1]_4 - \ldots + (-1)^i C_i[2i+1];$$

de cette dernière formule qu'on obtient aussi dans les développements des fonctions circulaires en séries (1), on déduit les valeurs

$$C_1 = \frac{1}{6}, C_2 = \frac{7}{30}, C_3 = \frac{31}{42}, C_4 = \frac{127}{30}, C_5 = , \frac{2555}{66}, \ldots$$

On a d'ailleurs aisément les relations suivantes entre les facteurs C_i et les nombres de Bernoulli

$$(-1)^r C_r = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,[2r]_1 + [2r]_2\,.\,2B_1 - [2r]_4\,.\,2^3B_2 + \ldots - (-1)^r\,2^{2r-1}\,B_r\,.$$

Au lieu d'exprimer la somme des puissances semblables des x premiers nombres impairs en une fonction développée suivant les puissances de x, on peut aussi l'exprimer en une fonction développée suivant les puissances du dernier terme $z = 2x - 1$; on a ainsi

$$2(2i+1)\,t_{ri} = z^{2i+1} + (2i+1)\,z^{2i} + 2^2B^1\,[2i+1]^2\,z^{2i-1} + \ldots + (-1)^i\,2^{2i}\,B_i\,(2i+1)z,$$
$$2(2i+1)t_{2i+1} = z^{2i+2} + (2i+2)z^{2i+1} + 2^2B_1\,[2i+2]_2\,z^{2i} + \ldots + (-1)^i\,2^{2i}\,B_i\,[2i+2]_2\,z^2 + (-1)^i\,R_i\,;$$

et les nombres R_i sont déterminés par les formules

$$2R_i = 2i+1 - 2B_1\,[2i+2]_2 + 2^3\,B_2\,[2i+2]_4 + \ldots + (-1)^i\,2^{2i-1}\,B_i\,[2i+2]_2\,,$$

(1) J.-A. SERRET. — *Traité de Trigonométrie*, p. 265.

$$(-1)^i \,.\, 2\,\mathrm{R}_i = -C_1\,[2i+2]_2 + C_2\,[2i+2]_4 + \ldots + (-1)^i\,C_i\,[2i+2]_2\,,$$

et on a ainsi

$$\mathrm{R}_1 = 1,\ \mathrm{R}_2 = 3,\ \mathrm{R}_3 = 17,\ \mathrm{R}_4 = 155,\ \mathrm{R}_5 = 2073,\ldots$$

D'ailleurs en modifiant les calculs dans le cas qui nous occupe, on obtient, en posant $y = 4x^2$,

$$t_1 = x^2,$$

$$t_3 = x^2\left(\frac{y}{2} - 1\right),$$

$$t_5 = \frac{x^2}{3}\,(y^2 - 5y + 7).$$

$$t_7 = x^2\left(\frac{y^3}{4} - \frac{7}{3}\,y^2 + \frac{49}{6}\,y - \frac{31}{3}\right),$$

et

$$3\,t_2 = x\,(y-1),$$

$$5\,t_4 = t_2\,(3y - 7),$$

$$7\,t_6 = t_2\,(3y^2 - 18y + 31),$$

$$3\,t_8 = t_2\left(y^3 - 11y^2 + \frac{239}{5}\,y - \frac{381}{5}\right).$$

On obtient encore, en généralisant, le théorème suivant.

Théorème. — *La somme des puissances semblables impaires des x premiers termes d'une progression arithmétique est divisible algébriquement par la somme des x premiers termes, quel que soit x.*

§ III. — THÉORÈMES NOUVEAUX D'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

On sait que la somme des x premiers nombres impairs est toujours égale à un carré parfait, et précisément au carré de x; on sait aussi que la somme des x premiers cubes est un carré parfait, le carré de la somme des x premiers nombres. Il m'a paru intéressant de chercher des théorèmes analogues pour les sommes des puissances semblables des x premiers nombres, ou des x premiers nombres impairs, et j'ai reconnu que les théorèmes énoncés ci-dessus sont des principes d'exception, et que, le plus souvent, la somme des puissances semblables des x premiers nombres ou des x premiers nombres impairs n'est pas un carré parfait ou une puissance exacte.

En se servant des résultats indiqués sur l'équation

$$x^3 + y^3 = A z^3,$$

des théorèmes de Lejeune-Dirichlet et Lebesgue sur l'équation (1)

$$x^5 + y^5 = A z^5,$$

et des théorèmes que nous avons énoncés dans le

(1) LEJEUNE-DIRICHLET. — *Journal de Crelle*, t. III.
LEBESGUE. — *Journal de Liouville*, t. VIII.

chapitre précédent et quelques autres analogues sur les équations biquadratiques, on arrive aux principes suivants.

THÉORÈME I. — *La somme des x premiers nombres entiers n'est jamais égale à un cube, à un bicarré ou à une cinquième puissance.*

THÉORÈME II. — *La somme des carrés des x premiers nombres n'est jamais, excepté pour $x = 24$, égale au carré d'un nombre entier.*

THÉORÈME III. — *Aucun nombre pyramidal ne peut être égal à un carré, en exceptant les deux nombres*

$$\frac{2.3.4}{1.2.3} \quad \text{et} \quad \frac{48.49.50}{1.2.3}.$$

Il résulte immédiatement de ces deux théorèmes et des deux suivants qu'une pile de boulets à base triangulaire ou carrée ne contient jamais un nombre de boulets égal au carré, au cube ou à la cinquième puissance d'un nombre entier.

Il faut cependant excepter la pile à base carrée

$$\frac{24.25.49}{1.2.3} = 70^2,$$

et les piles triangulaires

$$\frac{2.3.4}{1.2.3} = 2^2 \quad \text{et} \quad \frac{48.49.50}{1.2.3} = 140^2.$$

THÉORÈME IV. — *La somme des carrés des x premiers nombres n'est jamais égale au cube ou à la cinquième puissance d'un nombre entier.*

THÉORÈME V. — *Aucun nombre pyramidal ne peut*

être égal au cube ou à la cinquième puissance d'un nombre entier.

THÉORÈME VI. — *La somme de x carrés consécutifs n'est jamais égale à un carré pour toutes les valeurs de x comprises entre* 1 *et* 24, *les valeurs* 2, 11, 23 *et* 24 *étant exceptées.*

Dans ces cas d'exception, on arrive à des équations indéterminées qu'il est facile de résoudre généralement, et qui comportent un nombre indéfini de solutions formant une série récurrente.

THÉORÈME VII. — *La somme des carrés de x nombres impairs consécutifs n'est jamais égale à un carré pour les valeurs de x égales à* 2, 3, . . . 14, 15.— *La somme des carrés des x premiers nombres impairs n'est jamais un carré, un cube ou une cinquième puissance.*

THÉORÈME VIII. — *La somme des cubes des x premiers nombres n'est jamais égale au cube, à la cinquième ou à la huitième puissance d'un nombre entier.*

Cette somme sera égale à un bicarré pour les valeurs de x qui rendent égale à un carré parfait la somme des x premiers nombres.

THÉORÈME IX. — *La somme des cubes des x premiers nombres impairs n'est jamais égale à un cube, à un bicarré ou à une cinquième puissance*

Elle est égale à un carré pour les valeurs de x (série récurrente)

1, 5, 29, 169, 985, . . .

THÉORÈME X. — *La somme de deux cubes consécu-*

tifs n'est jamais égale à un carré parfait, excepté pour les cubes 1 *et* 8.

THÉORÈME XI.— *La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais égale à un bicarré.*

THÉORÈME XII. — *La somme des cubes de* 3 *nombres consécutifs n'est jamais égale à un carré ou à un cube, ou à une cinquième puissance, en exceptant les solutions*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2,$$
$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

THÉORÈME XIII. — *La somme des cubes de* 5 *nombres consécutifs n'est jamais égale à un carré, en exceptant les solutions pour lesquelles le nombre moyen est* 2, 3, 27, 98 *ou* 120.

THÉORÈME XIV. — *La somme des x premiers bicarrés n'est jamais égale à un carré, à un cube ou à une cinquième puissance.*

THÉORÈME XV. — *La somme des cinquièmes puissances des x premiers nombres n'est jamais égale à un cube, à un bicarré, ou à une cinquième puissance.*

Etc., etc.

La première partie du théorème I est d'Euler, et la seconde de Fermat ; les autres théorèmes me semblent nouveaux.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ D'ÉMULATION

DU

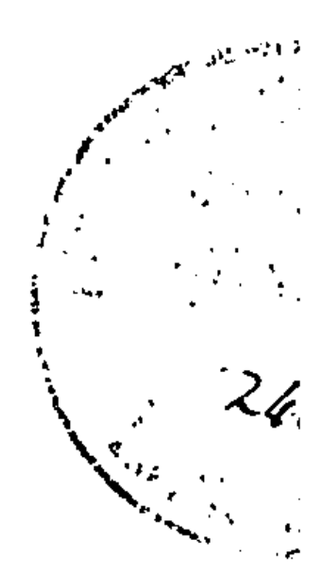
DÉPARTEMENT DE L'ALLIER.

—

(SCIENCES, ARTS ET BELLES-LETTRES.)

—

TOME XIII



MOULINS

IMPRIMERIE DE C. DESROSIERS

—

MDCCCLXXV

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

NOUVEAUX THÉORÈMES

DE

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

PAR EDOUARD LUCAS

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ

Les quelques théorèmes qui suivent sont extraits d'un ouvrage presque entièrement terminé sur la GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE, envisagée sous un point de vue nouveau. Ils ont été obtenus à l'aide d'une méthode qui permet de découvrir un grand nombre de propriétés métriques, et de démontrer la plupart des propriétés connues d'une manière intuitive. Bien que ces théorèmes soient énoncés dans des cas particuliers, ils sont beaucoup plus généraux qu'ils ne le paraissent au premier abord. D'ailleurs parmi les nombreux théorèmes que j'ai découverts à l'aide de cette méthode, j'ai choisi dans l'aperçu qui va suivre, ceux qui se rattachent plus spécialement à la transformation des aires et des volumes. Il nous parait essentiel de faire remarquer que cette partie de la

géométrie a été négligée jusqu'ici ; le traité de M. Chasles ainsi que les autres traités de géométrie contiennent fort peu de propriétés sur les équivalences des aires et des volumes. Poncelet, dans le TRAITÉ DES PROPRIÉTÉS PROJECTIVES ne fait qu'effleurer le sujet et ajoute comme conclusion : « On pourrait déduire « beaucoup de conséquences relatives aux aires de « certaines figures ; mais quoique cet examen se « rattache immédiatement à notre sujet, nous croyons « devoir nous borner simplement dans ce travail, aux « relations projectives concernant les distances et la « direction indéfinie des lignes, qui offrent par elles-« mêmes un assez vaste sujet de recherches (1). »

Nous ferons encore observer que jusqu'à présent, malgré le nombre considérable de mémoires qui ont paru sur la question, les règles sur l'emploi des signes en géométrie n'ont point été nettement définies, et il est généralement admis que si l'emploi de la règle des signes s'applique avec avantage, et pour ainsi dire, avec nécessité lorsque l'on a à considérer des segments comptés sur une même droite ou des angles ayant même sommet, elle ne s'applique plus lorsque l'on considère des segments comptés sur des droites différentes ou des angles n'ayant pas le même sommet. M. Chasles lui-même exprime formellement cette idée dans la préface de son traité de Géométrie supérieure, (p. IX) : « Si l'on ne démontre ordinairement une « formule ou une relation que par une certaine figure, « et non dans l'état de généralité et d'abstraction qui

(1) PONCELET. *Traité des propriétés projectives des figures*, t. I, p. 24.

« permettrait, au moyen des signes + et — appliqués « aux segments et aux angles, pour marquer leur « direction, de l'adapter à tous les états de la figure, « il est facile d'en reconnaître la raison. C'est que les « propositions qui forment le plus ordinairement les « éléments de démonstration, dans la Géométrie an- « cienne, *ne comportent pas l'application du principe des « signes*. Telles sont la proportionnalité des côtés « homologues dans les triangles semblables, celle « encore de la proportionnalité, dans tout triangle, « des côtés aux sinus des angles opposés. La règle « des signes ne s'applique point à ces propositions, « puisque les segments que l'on y considère sont « formés sur des lignes différentes et les angles autour « de sommets différents. »

Dans une note *sur la règle des signes en géométrie*, M. Laguerre (1) a examiné, sous ce point de vue, la dernière des propositions mentionnées dans la citation que j'ai reproduite ci-dessus, et après avoir démontré que cette proposition comportait l'emploi de la règle des signes, a posé la conclusion suivante :

« Lorsqu'un théorème relatif à des segments et à « des angles situés d'une façon quelconque dans un « plan est *convenablement et complètement énoncé*, il doit « toujours comporter la règle des signes. »

Nous ajouterons qu'il est curieux de constater que la plupart des traités de Géométrie pure contiennent des expressions dérivées de la mesure des angles, telles que des sinus et des cosinus. Avec un peu d'attention, il est facile de voir que ces expressions ne sont que

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1870, p. 176.

des coordonnées, et l'emploi de ces formules, à l'exclusion de celles de la géométrie analytique, ne nous paraît pas justifié. Les angles et les lignes sont, en effet, des quantités hétérogènes qui ne peuvent être comparées directement, et afin d'établir leurs relations réciproques, on a imaginé les fonctions circulaires, quantités intermédiaires entre les unes et les autres. Il résulte de là que l'intervention de ces fonctions n'est indispensable que dans le cas où l'on a réellement à conclure la valeur d'un angle de la valeur de plusieurs longueurs données et réciproquement.

Il importe donc, si l'on veut trouver séparément les relations qui existent entre les quantités linéaires, de laisser de côté les fonctions circulaires et de les remplacer par certaines quantités de la nature de celles dont on recherche les propriétés.

Dans un traité excellent publié récemment (1), M. Ricart fait ressortir d'une façon pittoresque cet antagonisme qui existe, pour ainsi dire, entre les grandeurs linéaires et les grandeurs angulaires.

Il est important de remarquer, dit-il, que l'idée de l'angle, considéré comme grandeur, présente un caractère de *fixité* qui n'apparaît pas de même dans la longueur d'une droite. Un angle étant la quantité dont une droite a tourné autour d'un point dans un plan, il existe naturellement un terme de comparaison, ou une unité, pour y rapporter cette grandeur ; c'est un *tour* entier. Mais pour la ligne droite, il ne se présente rien de pareil ; il n'y a pas d'unité fixe

(1) J. Ricart, *Eléments de Géométrie*, p. 21.

qu'on puisse retrouver en tous temps, en tous lieux, quelles que soient les catastrophes qui bouleversent le monde ; par conséquent, une ligne droite n'a pas *invariablement une longueur qu'on puisse assigner*. Deux droites qu'on a reconnues inégales en les comparant, si elles étaient considérées l'une après l'autre et isolément dans l'espace, ne présenteraient aucune différence à un observateur réduit à occuper successivement le point milieu de chacune d'elles ; et, dans certaines circonstances, la même droite, vue à des intervalles de temps éloignés, ne paraît pas identique ; car la distance de deux villages voisins, qui est immense pour un enfant, lui semble petite quand il a grandi et qu'il a voyagé. Tant il est vrai que l'idée de grandeur ne se conçoit pas sans un terme de comparaison, qui, pour la ligne droite, reste *essentiellement arbitraire, et peut même, une fois choisi, varier à notre insu avec l'ensemble de toutes les choses matérielles qui sont dans l'univers, et les distances mutuelles de tous leurs points qui varieraient simultanément de la même manière*, tandis que, pour l'angle, il est *déterminé* d'une façon absolue.

Nous ajouterons enfin, pour faire mieux saisir encore la différence de nature des grandeurs linéaires et des grandeurs angulaires, que les problèmes qui ont pour but la division de chacune d'elles en parties égales ne sont point du même ordre, puisque, par exemple, l'opération de la division d'une droite en trois parties égales est d'une très-grande simplicité, et qu'il n'en est pas de même de la *trisection de l'angle*.

Voilà pourquoi le traité de géométrie supérieure que j'espère publier incessamment, ne contiendra aucune expression dérivée de la mesure de l'angle ;

les fonctions circulaires doivent trouver principalement leur emploi dans la trigonométrie et non dans la géométrie pure.

Quant à l'emploi des signes, il est suffisamment établi et justifié quand il s'agit de segments comptés sur une droite, et le traité de M. Chasles contient un grand nombre de ces théorèmes que Poncelet nommait *équations linéaires de situation* (1). Toutes ces équations dérivent d'un premier principe sur l'emploi des signes, et qu'on peut appeler *principe de direction*. Lorsque l'on considère diverses droites d'inclinaisons différentes dans un plan, on peut, il est vrai, choisir arbitrairement sur chacune d'elles la direction positive. Mais alors comment doit-on considérer le signe de la distance d'un point quelconque à cette droite? Il suffit pour cela d'emprunter à la statique, pour l'appliquer en géométrie, la théorie des moments, et ainsi la distance d'un point à une droite sera considérée comme positive ou négative, suivant que le *moment* d'une force quelconque dirigée suivant le sens positif de la droite, par rapport à ce point, sera dirigé dans un sens ou dans l'autre. De là un second principe sur l'emploi des signes qu'on peut appeler *principe de circulation dans le plan*, et le sens positif de circulation sur ce plan est d'ailleurs arbitraire.

De même étant donnés dans l'espace différents plans dont les sens de circulation sont préalablement déterminés, la distance d'un point quelconque à ce plan sera positive ou négative, suivant que le mouvement d'un mobile dans le plan suivant le sens de

(1) Poncelet. *Applications d'analyse et de géométrie*, t II, p 77.

circulation sera vu de ce point de droite à gauche, ou de gauche à droite. C'est le troisième principe sur l'emploi des signes qu'on peut appeler *principe de circulation dans l'espace,* qui correspond en statique à la détermination du signe du moment d'un couple.

Si, au contraire, on choisit arbitrairement un point dans l'espace, et si l'on s'impose la condition que les distances de ce point à des points quelconques ou à des droites sont positives, les sens de circulation sur la droite en géométrie plane, ou sur le plan en géométrie solide, se trouveront nettement déterminés.

Ces idées, il est vrai, ne sont pas nouvelles ; elles sont constamment appliquées en statique et en astronomie, mais elles ont été jusqu'ici rarement appliquées en géométrie pure ; c'est ainsi qu'un certain nombre de théorèmes du traité de M. Chasles sont énoncés pour différents cas correspondants à des différences de situation, bien qu'ils comportent l'emploi des principes exposés ci-dessus.

Il y a longtemps, d'ailleurs, que Carnot réclamait l'introduction d'un certain nombre de ces idées dans la géométrie. Les ressources de la géométrie élémentaire, dit-il, qui est la plus usuelle, seraient beaucoup plus considérables, et une multitude de propositions très-utiles dans la pratique, et que cette géométrie ne saurait atteindre que fort difficilement, se démontreraient avec une extrême simplicité (1).

A l'aide des principes précédents, il est facile de définir le sens que l'on doit attribuer à l'aire d'une figure rectiligne ou curviligne quelconque.

(1) CARNOT, *Géométrie de position,* p. 336.

Considérons un triangle OAB; un point mobile peut parcourir le périmètre de ce triangle dans les deux sens de circulation OAB ou OBA; nous conviendrons d'appliquer dans ces deux cas un signe différent aux aires égales en valeur absolue des triangles OAB et OBA, et nous prendrons, arbitrairement d'ailleurs, comme sens positif de circulation, celui d'un mobile qui se meut sur le périmètre du triangle en laissant l'espace infini à sa droite. Nous poserons donc, et par convention,

$$\mathrm{OAB} + \mathrm{OBA} = o,$$

et il est clair que l'aire d'un triangle conserve son signe lorsque l'on permute circulairement l'ordre des sommets.

On voit immédiatement que si quatre points O, A, B, C, sont disposés d'une manière quelconque dans le plan, on a la relation fondamentale

$$\mathrm{OAB} + \mathrm{OBC} + \mathrm{OCA} = o.$$

Pour définir l'aire d'un polygone, il faut donner les sommets dans un certain ordre, et il est d'ailleurs évident que l'aire d'un polygone ne doit changer de valeur ni de signe, si l'on effectue sur les sommets une permutation circulaire. Si le polygone est convexe, ou, si le polygone étant concave, les côtés ne s'entrecoupent pas, il n'y a d'ailleurs aucune difficulté. Mais considérons, par exemple, le quadrilatère ABCD, dont les côtés BC et DA s'entrecoupent en un point I situé sur le périmètre. En remarquant que les deux triangles ABI et CID sont parcourus suivant

le périmètre dans des sens de circulation différents, on doit poser

$$ABCD = ABI - CID,$$

les triangles du second membre étant pris en valeur absolue.

C'est, du reste, à l'aide de cette convention qui s'impose d'elle-même, qu'il est permis d'interpréter les résultats obtenus pour les intégrales définies (1).

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que cette convention sur le signe des aires s'applique en tous points avec les conventions précédentes sur les signes des longueurs comptées sur des droites et des distances des points aux droites, et on peut ainsi vérifier que la mesure de l'aire d'un triangle est toujours égale, en grandeur et en signe, au produit de la base par la hauteur.

I. Théorème général.— Si P_1, P_2,... P_m désignent m points quelconques disposés dans un ordre circulaire déterminé, et si l'on forme avec un point O quelconque et p de ces points consécutifs un polygone de $p + 1$ sommets dans l'ordre convenu, la somme des aires de tous ces polygones est égale à $p - 1$ fois l'aire du polygone formé par les m points donnés.

Si les m points sont en ligne droite, l'aire du polygone est nulle, et l'on a la relation

$$P_1 P_p + P_2 P_{p+1} + \ldots + P_m P_{p-1} = 0.$$

(1) Ch. Hermite. *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique*, t. I, p. 388.

Il est important de faire remarquer que le théorème précédent et les théorèmes qui suivent peuvent s'adapter à la transformation corrélative, et de démontrer comment on doit procéder pour obtenir les théorèmes correspondants sur les aires des polygones formés par un système de droites dont l'ordre circulaire est déterminé. Désignons par L une droite quelconque et par D_1 et D_2 deux autres droites ; nous poserons encore

$$L\,D_1\,D_2 + L\,D_2\,D_1 = o.$$

En général, le mouvement du point mobile qui détermine le sens et le signe de l'aire d'un polygone formé par m droites s'obtient en faisant mouvoir ce point sur la droite D_1 jusqu'à son point d'intersection avec D_2, puis sur la droite D_2 jusqu'à son point d'intersection avec D_3 et ainsi de suite ; et enfin sur D_m pour revenir au point de départ. Par suite :

II. Théorème général. — Si D_1, D_2 ... D_m désignent m droites quelconques disposées dans un ordre circulaire déterminé, et si l'on forme avec une droite L quelconque et p de ces droites consécutives un polygone de $p + 1$ côtés dans l'ordre convenu, la somme des aires de tous ces polygones est égale à $p - 1$ fois l'aire du polygone formé par les m droites données.

Ces théorèmes comprennent un certain nombre de cas particuliers ; et ainsi si les m droites du théorème précédent sont tangentes à une circonférence, on peut remplacer la somme des aires par celle des périmètres, et le théorème devient évident.

III. Théorème. — Les aires des n polygones obtenus

à l'aide d'un premier polygone formé de $2n$ points ou de $2n$ droites et en permutant ensuite circulairement les sommets ou les côtés de rang pair ont une somme égale à zéro.

Les théorèmes précédents s'appliquent d'ailleurs, avec une légère modification, aux volumes des polyèdres formés avec m points ou m plans donnés dans un ordre circulaire déterminé.

Considérons maintenant un triangle ABC et un point O quelconque de son plan, que nous pouvons considérer comme le centre des distances proportionnelles des trois points A, B, C affectés respectivement des coefficients l, m, n. Désignons par a, b, c, o, les distances des quatre points à une droite qui joint deux points P et Q quelconques. On a évidemment

$$la + mb + nc = (l + m + n)\, o,$$

et en multipliant par PQ

$$l.\mathrm{APQ} + m.\,\mathrm{BPQ} + n.\,\mathrm{CPQ} = (l + m + n)\,\mathrm{OPQ}.$$

Désignons encore par a' et o' les distances de A et O à la droite BC, nous avons aussi

$$la' = (l + m + n)\, o',$$

et en multipliant par BC,

$$l.\mathrm{ABC} = (l + m + n)\,\mathrm{OBC},$$

et par suite

$$\frac{l}{\mathrm{OBC}} = \frac{m}{\mathrm{OCA}} = \frac{n}{\mathrm{OAB}} = \frac{l + m + n}{\mathrm{ABC}},$$

et en remplaçant l, m, n, par les valeurs proportionnelles dans la relation donnée ci-dessus, nous obtenons :

IV. Théorème.— Entre six points quelconques d'un plan, on a la relation

$$OBC\ APQ + OCA.BPQ + OAB.CPQ = OPQ.ABC.$$

Si le point Q coïncide avec le point O, on obtient la formule

$$OBC.OAP + OCA.OBP + OAB.OCP = o.$$

Cette relation, qui n'est qu'un cas particulier de la précédente, se trouve énoncée sous forme de théorème dans le *Traité de Géométrie supérieure* (p. 23), mais ne renferme pas le principe des signes. Ce théorème, dit M. Chasles, a été démontré par Monge dans le *Journal de l'Ecole polytechnique*, xve cahier, p. 86. L'auteur le conclut d'une identité entre huit quantités qui sont les coordonnées des quatre sommets du quadrilatère et en fonction desquelles s'expriment les aires des triangles. Cette identité avait déjà été donnée par Fontaine dans un mémoire d'analyse de 1748.

V. Théorème. — On a de même pour quatre points de l'espace A, B, C, D, et quatre autres O, P, Q, R, situés d'une manière quelconque entre les volumes des tétraèdres la relation

$$\begin{aligned} OBCD.APQR + OCDA.BPQR + ODAB.CPQR \\ + OABC.DPQR = OPQR.ABCD \end{aligned}$$

qui donne la relation générale précédente en supposant les points A, B, C, D dans un même plan.

VI. Théorème général. — Considérons un polygone ABC...HKL et deux points quelconques O et P, on a la relation

$$\frac{OAB}{OPA.OPB}+\frac{OBC}{OPB.OPC}+\ldots+\frac{OLA}{OPL.OPA}=o.$$

On a aussi un théorème analogue pour l'espace. Le théorème précédent compte un grand nombre de cas particuliers. Et on a ainsi :

Corollaire I. Si les points AB,... L sont en ligne droite, et si a, b,... l désignent leurs distances à une droite quelconque, on a la relation

$$\frac{AB}{ab}+\frac{BC}{bc}+\ldots+\frac{KL}{kl}+\frac{LA}{la}=o.$$

Corollaire II. Si les points A, B, C,... sont sur une ligne droite passant par le point P, on a

$$\frac{AB}{PA.PB}+\frac{BC}{PB.PC}+\ldots+\frac{KL}{PK.PL}+\frac{LA}{PL.PA}=o.$$

On sait d'ailleurs que cette formule s'applique au cas où tous les points A, B,... sont sur une circonférence passant par le point P et se déduit de la formule

$$AB+BC+\ldots+KL+LA=o,$$

à l'aide de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Cette méthode de transformation permet

encore de déduire des formules précédentes un grand nombre de formules nouvelles.

Corollaire III. Si le polygone est circonscrit au cercle, on en déduit le principe suivant : La somme des côtés d'un polygone circonscrit à une circonférence divisés respectivement par le produit des distances des deux extrémités à une droite quelconque passant par le centre est égale à zéro.

Nous remarquons encore ici, une fois pour toutes, que tous ces théorèmes sont également vrais avec quelques modifications dans l'espace ainsi qu'en corrélation.

Considérons maintenant trois points consécutifs dans l'ordre circulaire convenu d'un polygone de m points, nous obtenons ainsi un *triangle périphérique*, et, par exemple, ABC, BCD,... EAB, sont les triangles périphériques du pentagone ABCDE ; on peut considérer les quadrilatères, les pentagones,... périphériques d'un polygone de m sommets. Désignons encore par S_m l'aire d'un polygone de m points et par S_p l'aire du polygone obtenu en joignant les sommets de p en p ; nous formons ainsi le polygone étoilé d'ordre p, et l'on a d'ailleurs

$$S_p + S_{m-p} = 0.$$

Il n'est pas nécessaire de supposer p premier avec m, mais dans le cas où p est un diviseur de m, ou même seulement si p et m ont un facteur commun, on considère le polygone étoilé comme égal à la somme d'un certain nombre de polygones dont le nombre des sommets sera inférieur à m.

THÉORÈME VII.— Si $P_1, P_2, \ldots P_m$ désignent m points rangés dans un ordre circulaire convenu, on a

$$P_1 P_2 P_3 + P_2 P_3 P_4 + \ldots + P_m P_1 P_2 = 2S - S_2.$$

On a d'autres théorèmes analogues dans le plan et dans l'espace, et aussi en appliquant le principe de corrélation ; on en déduit les corollaires suivants :

COROLLAIRE I. L'aire du quadrilatère qui joint les milieux des côtés consécutifs d'un quadrilatère quelconque, concave ou convexe, est égale à la moitié de l'aire du quadrilatère donné.

COROLLAIRE II. Dans un polygone de $2n$ sommets, et dans lequel les sommets de rang pair sont situés sur une droite et les sommets de rang impair sont sur une autre droite, l'aire du polygone obtenu en joignant les milieux des côtés consécutifs est égale à la moitié de l'aire du polygone donné.

COROLLAIRE III. Dans un polygone de $4n$ sommets, tels que les sommets de rangs $4p$ et $4p + 2$, sont situés sur deux droites parallèles, et les sommets de rang $4p + 1$ et de rang $4p + 3$ sont situés sur deux autres droites parallèles, l'aire du polygone obtenu en joignant les milieux des côtés consécutifs est égale à la moitié de celle du polygone proposé, etc., etc.

THÉORÈME VIII. — Si $2n$ points sont disposés dans un plan de telle sorte que les points de rangs p et $n + p$ soient situés de part et d'autre et à égale distance d'une droite fixe, la somme des aires des polygones périphériques de n sommets consécutifs est égale à $n - 2$ fois l'aire du polygone de $2n$ côtés, et la

somme des aires des polygones périphériques de $n + 2$ ou $n - 2$ sommets consécutifs est égale à $\pm (n + 2)$ fois l'aire du polygone de $2n$ côtés (1).

Corollaire. Dans le cas particulier de l'hexagone assujetti aux conditions énoncées dans le théorème précédent, il résulte que l'aire de l'hexagone étoilé est égale au double de l'aire de l'hexagone donné.

Nous avons, du reste, transformé ainsi tous les théorèmes contenus dans le *Traité de géométrie supérieure*, et qui expriment des relations entre les distances de points situés en ligne droite ou entre les sinus des angles formés par des droites qui se coupent en un même point, et nous avons constaté que toutes ces relations s'appliquent, avec quelques modifications, il est vrai, à des systèmes quelconques de points et de droites dans le plan, et de points et de plans dans l'espace.

Nous indiquerons encore, sans autres développements, les énoncés suivants :

Théorème IX.— Le rapport de l'aire d'un triangle à celle d'un triangle circonscrit est égal à la somme des produits obtenus en multipliant trois des six distances des sommets du premier, qui n'ont aucune extrémité commune aux côtés du second, divisée par le produit des trois hauteurs du second.

Théorème X. — Ce rapport est encore égal à la

(1) L'énoncé et la démonstration de ce théorème m'ont été donnés, sur mes indications, par un de mes élèves, M. Alfred Chervet, actuellement à l'Ecole normale supérieure.

somme des produits obtenus en multipliant trois des six segments formés sur les côtés du triangle circonscrit, et qui n'ont aucune extrémité commune, divisée par le produit des trois côtés du triangle circonscrit.

On en peut déduire des relations entre les rayons des cercles inscrit et circonscrit à ces triangles.

THÉORÈME XI. — L'aire du triangle formé par les projections d'un point sur les trois côtés d'un triangle donné, est maxima lorsque ce point coïncide avec le centre de gravité du triangle donné.

THÉORÈME XII. — La somme des hauteurs d'un triangle, divisées respectivement par les distances d'un point quelconque aux trois côtés, est minima lorsque ce point coïncide avec le centre de gravité de ce triangle.

THÉORÈME XIII. — Si par les sommets d'un tétraèdre on mène des parallèles de direction quelconque, ces parallèles rencontrent les faces opposées en quatre points formant un tétraèdre de volume constant.

THÉORÈME XIV. — L'aire d'un triangle est la moyenne harmonique des aires des quatre triangles formés par les projections d'un point et de ses trois conjugués.

Nous appelons *points conjugués* d'un point donné par rapport à un triangle, les trois points d'intersection des polaires de ce point par rapport à deux des angles de ce triangle.

THÉORÈME XV. — L'aire du triangle formé par les projections du centre d'homologie d'un triangle fixe inscrit et du triangle circonscrit à une parabole va-

riable, sur les côtés du triangle qui joint les milieux des côtés du triangle inscrit, est constante et égale à la moitié prise en signe contraire de l'aire du triangle inscrit.

THÉORÈME XVI.— L'aire du triangle formé par trois tangentes à la parabole est égale à la moitié, prise en signe contraire, de l'aire du triangle formé par les trois points de contact (1).

THÉORÈME XVII. — L'aire du triangle formé par les points de contact des tangentes menées à une parabole parallèlement aux côtés d'un triangle inscrit, est égale au huitième pris en signe contraire de l'aire de ce triangle inscrit.

THÉORÈME XVIII.— Les aires des segments détachés dans une parabole par les côtés d'un triangle inscrit sont respectivement proportionnelles aux distances du centre de gravité du triangle circonscrit aux côtés opposés du triangle inscrit, divisées respectivement par les hauteurs correspondantes du triangle inscrit.

THÉORÈME XIX. — L'aire du triangle formé par les centres de gravité des trois triangles ayant pour bases les trois côtés d'un triangle inscrit dans la parabole, et pour sommets les points de contact des tangentes parallèles, est égale au huitième de l'aire du triangle inscrit.

(1) Ce théorème est donné habituellement sans le signe convenable. Voir GREGORI, *Cambridge Journal*, t. II, p. 16. — L. PAINVIN, *Principes de Géométrie analytique*, p. 601.

THÉORÈME XX. — L'aire du triangle formé par les centres de gravité des segments détachés sur une parabole par les côtés d'un triangle inscrit, est égale au dixième de l'aire du triangle inscrit.

THÉORÈME XXI.— Si par les sommets d'un triangle inscrit dans la parabole, on mène des parallèles aux côtés opposés, ces droites rencontrent la parabole en trois points formant un triangle dont l'aire est égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle inscrit.

THÉORÈME XXII. — Si par les sommets d'un triangle inscrit dans la parabole, on mène des parallèles aux côtés opposés, les pôles de ces droites forment un triangle dont l'aire est égale à celle du triangle inscrit.

THÉORÈME XXIII. — Si l'on joint les milieux des côtés d'un triangle inscrit dans la parabole, et si l'on prend les milieux des cordes interceptées dans la courbe, l'aire du triangle formé par ces trois points est égale à la moitié, prise en signe contraire, de celle du triangle inscrit.

THÉORÈME XXIV.— L'aire du triangle formé par les pôles des droites qui joignent les milieux des côtés d'un triangle inscrit dans la parabole, est égale au quart de celle du triangle inscrit.

THÉORÈME XXV.— L'aire du triangle formé par les projections du point d'intersection d'une parabole circonscrite à un triangle avec le diamètre passant par le centre du triangle, est égale au quart de l'aire du triangle inscrit.

THÉORÈME XXVI. — Si par les sommets d'un triangle on mène trois paraboles dont les axes sont parallèles aux trois lignes projetantes d'un point, l'aire du triangle formé par le quatrième point d'intersection de ces paraboles deux à deux, est constante et égale à quatre fois l'aire du triangle inscrit.

Les centres de gravité des triangles considérés, les centres et les axes d'homologie des triangles deux à deux, donnent lieu à de nombreuses propriétés analogues ; dans la plupart des cas, l'axe d'homologie enveloppe une transformée homographique de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

THÉORÈME XXVII. — Si le centre de gravité d'un triangle inscrit à l'hyperbole est situé sur la courbe, l'aire du triangle des tangentes aux sommets est égale, en signe contraire, à la moitié de l'aire du triangle inscrit.

THÉORÈME XXVIII. — Si le centre de gravité d'un triangle inscrit à l'hyperbole est situé sur la courbe, les parallèles menées par les sommets aux côtés opposés rencontrent la courbe en trois points formant un triangle dont l'aire est égale à huit fois l'aire du triangle inscrit.

THÉORÈME XXIX. — L'aire du triangle obtenu en prenant les milieux des cordes interceptées dans une hyperbole passant par le centre du triangle inscrit, par les droites qui joignent les milieux des côtés de ce triangle, est égale à la moitié, prise en signe contraire, de l'aire du triangle inscrit.

THÉORÈME XXX. — Si le centre de gravité d'un

triangle inscrit dans une hyperbole est situé sur la courbe, le triangle obtenu, en joignant les milieux des côtés, est conjugué de l'hyperbole, et réciproquement.

THÉORÈME XXXI. — Si par les sommets d'un triangle inscrit dans une hyperbole passant par le centre du triangle, on mène des parallèles à la tangente passant au centre du triangle, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points, formant un triangle dont l'aire est égale à *moins* vingt-sept fois l'aire du triangle inscrit.

THÉORÈME XXXII. — Si par le centre d'un triangle inscrit dans une hyperbole passant en ce point, on mène des parallèles aux côtés du triangle, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois points formant un triangle dont l'aire est égale à *moins* vingt-sept fois l'aire du triangle inscrit.

THÉORÈME XXXIII. — Par le centre d'un triangle inscrit à une hyperbole passant en ce point, on mène des parallèles aux côtés du triangle inscrit, et par les points d'intersection de ces parallèles avec l'hyperbole on mène des tangentes à la courbe, l'aire du triangle formé par ces tangentes est égale, en signe contraire, à l'aire du triangle inscrit.

THÉORÈME XXXIV.— Si sur une hyperbole on prend trois points formant un triangle dont le centre de gravité est situé sur l'une des asymptotes, l'aire du triangle des tangentes menées par ces trois points, est égale à quatre fois l'aire du triangle inscrit. Etc.

Les théorèmes précédents s'appliquent encore dans l'espace avec quelques modifications, soit aux surfaces du second ordre, soit à la surface réciproque de Steiner, et donnent des théorèmes analogues, en appliquant les méthodes de la transformation corrélative à la transformation des aires et des volumes.